FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A. M. N. H.
1924

Sitzungsberichte

5.06(4326)M

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1918

München 1918
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

24-94731 Mag

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

	Seite
12. Jan.: Hoffmeister	1*
9. Febr.: Willstätter u. Stoll, Burmester, Seeliger, König	1*
2. März: Mollier, Pringsheim, v. Frey, Lagally	4*
4. Mai: Voss, Klengel, Giessberger, Lindemann, Johnsen	5*
1. Juni: Sommerfeld, Liebmann	7*
6. Juli: Schmidt, Liebmann	7*
5. Okt.: Emden	9*
2. Nov.: Günther	9*
7. Dez.: Hertwig, Lindemann	10*
Verzeichnis der im Jahre 1918 eingelaufenen Druckschriften	11*

II. Abhandlungen.

L. Burmester: Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges (mit 1 lithogr. Tafel)	171
R. Emden, Über elektrische Wellen in geschichteten Medien	417
O. Frank: Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme (2. Abhandlung)	107
M. v. Frey: Die Bedeutung des Drucksinns für die Wahrnehmung von Bewegung und Lage der Glieder	93
H. Gießberger, Das Reichenhaller Einsturzbeben vom 19. November 1910 (mit einer Kartenskizze und einem Anhang)	221
S. Günther, Über eine ostafrikanische Naturkatastrophe	437
A. Johnsen, Optisches Drehungsvermögen und Schraubungsaxen regulärer Kristalle	279
F. Klengel, Der Verlauf des Winters 1916/17 im sächsisch-bayerischen Grenzgebiete (mit einer Kartenskizze und fünf Figuren)	259

Seite

R. König: Weierstraß' „Abelsche Transzendenten" und ihre Weiterführung 47

M. Lagally: Die Abbildung einer bewegten Ebene durch eine photographische Kammer mit Schlitzverschluß . . . 161

W. Lenz, Über ein invertiertes Bohrsches Modell . . . 355

H. Liebmann, Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen (nach Ideen von Boltzmann und Jacobi) 385

H. Liebmann, Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme 489

F. Lindemann, Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon . . . 203

F. Lindemann, Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon . . 453

A. Pringsheim: Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche . 65

M. Schmidt, Untersuchung von Höhen- und Lageänderungen von Messungspunkten im bayerischen Alpenvorland (mit einem Kärtchen) 373

R. Seeliger: Über den Ursprung der durchdringenden atmosphärischen Strahlung 1

A. Sommerfeld, Über die Feinstruktur der $K\beta$-Linie . . 367

A. Voss, Zur Theorie der Kurven im Raume 283

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1918.

Sitzung am 12. Januar.

Herr v. Seeliger legt vor und bespricht eine Abhandlung des Assistenten an der Romeis-Sternwarte in Bamberg Dr. Kuno Hoffmeister:

Untersuchungen über mehrfach beobachtete Feuerkugeln. (Wird später veröffentlicht.)

Sitzung am 9. Februar.

1. Herr R. Willstätter trägt vor eine von ihm gemeinsam mit Herrn A. Stoll ausgeführte Arbeit

Über pflanzliche Peroxydase.

Die Untersuchung behandelt die Kinetik der Peroxydasereaktion, die quantitative Bestimmung des Enzyms in Präparaten und Pflanzenteilen und die Darstellung von sehr wirksamen Enzympräparaten. (Wird anderweitig gedruckt.)

2. Herr Ludwig Burmester sprach über

Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges.

Die irrtümlichen Begriffe „Raddrehung“ und „Rollung“ des Auges, die dadurch entstanden sind, daß der Unterschied der absoluten und der relativen Bewegung nicht beachtet worden ist, haben in der viel behandelten Lehre von der Bewegung

des Auges Anlaß gegeben zu vielen Mißverständnissen und Schwierigkeiten, die durch die kinematische Aufklärung erledigt werden. Purkinje hat zuerst 1823 die Bewegung des Auges, die er eine Musik des Auges nennt, beschreibend behandelt. Aber die wissenschaftlichen messenden Beobachtungen erfolgten erst 1848 von F. C. Donders. Bei der theoretischen Behandlung der Bewegung des Auges wird der Augapfel als eine Kugel angenommen, die sich um einen im Kopfe festen Drehpunkt bewegt, weil er sich nach Beobachtungen während der Bewegung des Auges nur um Bruchteile eines Millimeters in Bezug auf den Kopf verändert. Demnach sind die Bewegungsvorgänge des Auges ersetzbar durch die sphärische Bewegung eines sphärischen Gebildes auf einer ruhenden Kugelfläche und können dadurch zur leichten Vorstellung veranschaulicht werden. Die Benennung „Raddrehung", daß sich bei der Bewegung des Auges die Iris wie ein Rad um ihren Mittelpunkt dreht, wird als nicht zutreffend an einem Beispiel erörtert. Für einen auf einem Wagen sitzenden Beobachter vollzieht ein Wagenrad Drehung um die Achse. Für einen an der Straße stehenden Beobachter dreht sich das Wagenrad nicht um die bewegte Achse, sondern es erfolgen beständig sehr kleine Drehungen des Wagenrades um den jeweiligen Punkt, in dem es theoretisch die Straße berührt. Ebenso gibt es für den Beobachter des Auges überhaupt keine Raddrehung. Sonach ist auch die Benennung „Rollung", die für Raddrehung gebraucht wird, nicht zutreffend; und Rollung ist keine Drehung, sondern entsteht z. B. wenn ein Zylinder auf einem anderen oder auf einer Ebene rollt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Sommerfeld legt vor eine Arbeit von Herrn Dr. R. Seeliger in Charlottenburg

Über den Ursprung der durchdringenden atmosphärischen Strahlung.

Wenn man die Leitfähigkeit der Gasfüllung eines dickwandigen geschlossenen Gefäßes (einer Jonisationskammer) bei

Ballonaufstiegen mißt und diejenigen Beträge davon abzieht, die von den Gammastrahlen bekannter irdischer Ursachen (Emanationen der Erdrinde) abzieht, so bleibt eine mit der Höhe des Beobachtungsortes zunehmende Jonisation übrig, die ihre Quelle in den höchsten Schichten der Atmosphäre (etwa oberhalb 30 km) hat und einen sehr durchdringenden Charakter besitzt (etwa den der Gammastrahlung von *RaC*). Die Abhandlung stellt sich die Aufgabe, die Methoden zu diskutieren, die dazu dienen können, aus vorhandenen Beobachtungen Stärke, Härte und Ursprung dieser Strahlung zu ermitteln und Hinweise zu geben, wie neue Beobachtungen am besten einzurichten sind. Solche Beobachtungen werden vom Verfasser vorbereitet und durch Mittel der Akademie unterstützt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Pringsheim legt vor eine Abhandlung des Herrn Robert König (Tübingen)

Weierstraß'-Abelsche Transzendenten und ihre Weiterführung.

Dem Verfasser ist es gelungen, in einer Reihe von 12 Arbeiten (deren erste im Jahre 1911 veröffentlicht wurde, während die Vollendung der übrigen in die Jahre 1915—17 fällt) die in Weierstraß' Vorlesungen entwickelte arithmetische Theorie der Abelschen Transzendenten (algebraischen Funktionen und deren Integrale) auf die sog. Riemannschen Transzendenten (Funktionen mit gegebener Monodromiegruppe und deren Integrale) auszudehnen. Von jenen 12 Arbeiten sind bisher nur 4 erschienen, 4 andere befinden sich bei den Redaktionen verschiedener mathematischer Zeitschriften, der Rest liegt beim Verfasser. Da bei den leider noch immer im Zunehmen begriffenen Schwierigkeiten an eine Drucklegung in absehbarer Zeit kaum gedacht werden kann, hat der Verfasser es unternommen, in möglichst knapper Form zunächst eine Übersicht über den systematischen Aufbau seiner ganzen Theorie zu geben.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

1. Herr Mollier spricht über die Bewegungen des menschlichen Schultergürtels nach neuen eigenen Untersuchungen. (Erscheint anderwärts.)

2. Herr Alfred Pringsheim legt vor eine Abhandlung:

Zur Theorie der Kettenbrüche.

Der Verfasser gibt einige nützlich scheinende Ergänzungen zu mehreren seiner früheren Arbeiten über das gleiche Thema. Dieselben beziehen sich zum Teil auf eine zweckmäßigere Anordnung und Gestaltung gewisser allgemeiner Konvergenz-Kriterien, zum anderen Teil auf die Konvergenz, der sogenannten eingliedrig limitär-periodischen Kettenbrüche, bzw. einer etwas allgemeiner gearteten, zuerst von Herrn Perron behandelten Kategorie, die der Verfasser als „nahezu" eingliedrig periodisch bezeichnet. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr O. Frank legt vor eine Abhandlung des korrespondierenden Mitglieds der Klasse Max von Frey:

Die Bedeutung des Drucksinus für die Wahrnehmung von Bewegung und Lage der Glieder.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Ferner eine Fortsetzung seiner eigenen früheren Abhandlung:

Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme.

(Erscheint gleichfalls in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Dr. Max Lagally:

Die Abbildung einer bewegten Ebene durch eine photographische Kammer mit Schlitzverschluß.

Es wird die Verzerrung, die das Bild erfährt, in eine Reihe infinitesimaler Transformationen zerlegt und aus ihr jene ausgeschieden, die projektiven Charakter haben. Die infolge der endlichen Schlitzbreite entstehende Bildunschärfe entspricht im Gegensatz zur Verzerrung einer rein projektiven Verschiebung der Bildpunkte. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 4. Mai.

1. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung des o. Mitgl. Herrn Aurel Voss:

Zur Theorie der Kurven im Raume.

Die Untersuchung befaßt sich mit den abwickelbaren Flächen, die von den Tangentenebenen einer festen Raumkurve umhüllt werden, die bisher nur in Sonderfällen z. B. den Developpablen der Filarevoluten Beachtung gefunden haben. Sie löst das allgemeine Problem der Trajektorien einer Raumkurve auf zwei Wegen, deren einer auf eine aus den natürlichen Variablen der Kurve gebildete Riccatische Differentialgleichung führt, während der andere die Integration einer homogenen linearen Differentialgleichung 3. bzw. 4. Ordnung verlangt. Als Beispiele werden die räumlichen Trajektorien der Helix und des Kreises abgeleitet, welch letztere sich als sphärische Kurven erweisen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. Günther legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von Professor Dr. F. Klengel, Plauen i. V.:

Der Verlauf des Winters 1916/17 im sächsisch-bayerischen Grenzgebiete.

War der fragliche Winter überhaupt einer der strengsten, die je in Europa erlebt wurden, so steigerte sich seine Kältewirkung im bezeichneten Bereiche so gewaltig, daß dasselbe eine vollkommene Ausnahmestellung in unserem Erdteile einnimmt.

Derselbe legte einen Aufsatz von Gymnasiallehrer Dr. H. Giessberger, München, vor:

Das Reichenhaller Einsturzbeben vom 19. November 1910.

Genauer Nachweis, daß man es bei dieser Erderschütterung, die geographisch und geologisch nach allen Seiten verfolgt

wird, mit einem reinen Bruchbeben zu tun hat, bedingt durch den Charakter des südostbayerischen Salzgebirges.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Derselbe hielt seinen zweiten Vortrag über

Kriegsmeteorologie.

3. Herr F. Lindemann spricht über

Konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr P. v. Groth legt eine Mitteilung vor von A. Johnsen in Kiel über

Optisches Drehungsvermögen und Schraubungsaxen regulärer Krystalle.

Das Drehungsvermögen optisch aktiver einaxiger Krystalle in der Richtung ihrer optischen Axe hat zuerst Sohncke aus deren schraubenartiger Struktur erklärt. Eine solche Struktur konnte er bei kubischen Krystallen theoretisch nur in den drei Richtungen der Kanten des Würfels erhalten, während die optisch aktiven Krystalle des kubischen Systems nach allen Richtungen gleiches Drehungsvermögen besitzen. Dieser Widerspruch wird nun von Johnsen beseitigt durch den Nachweis, daß aus der Annahme, die von einer Schraubungsaxe in einer beliebigen Richtung bewirkte Drehung proportional dem Quadrat des Kosinus der Wirbel zwischen der Richtung und jener Axe ist, sich ergibt, daß in kubischen Krystallen die Drehung unabhängig von der Richtung des Strahles ist.

Sitzung am 1. Juni.

1. Herr Sommerfeld spricht über seine Untersuchungen zur Frage des Atombaus und der Spektrallinien Er legt vor eine Arbeit von Herrn W. Lenz Über ein invertiertes Bohrmodell, in der erstmalig das Problem der Kernstruktur behandelt wird, und eine eigene Note Über die Feinstruktur einer Röntgen-Linie aus dem K-Spektrum, deren Voraussagen durch Erfahrungen von Herrn Siegbahn bestätigt werden.

(Beide Mitteilungen erscheinen in den Sitzungsberichten.)

2. Herr H. Liebmann hält einen Vortrag über:

Eine Methode der konformen Abbildung auf Grund einer Idee von Boltzmann.

Sitzung am 6. Juli.

1. Herr M. Schmidt berichtet über die

Untersuchung von Höhenänderungen im oberbayerischen Alpenvorland,

welche durch Vergleichung der Ergebnisse älterer und von neuerdings für dieselben Hauptfestpunkte ausgeführten Feinnivellements festgestellt wurden und auf Senkungen der Erdkruste zurückzuführen sind.

Die beobachteten Senkungen zeigen Beträge bis zu rund 80 mm und sind für ein Gebiet nachgewiesen, das sich auf 100 km Länge von München ostwärts bis zur Salzach und auf 50 km Breite vom Fuß der Nordkette der Alpen bis zum Inntal erstreckt.

Das genannte Gebiet ist zur näheren Untersuchung einer im Jahre 1906 bei Laufen a. d. Salzach beobachteten Höhenstörung mit einem Netz von Feinnivellementslinien von 625 km Gesamtlänge überzogen worden, die größtenteils mit Linien des

in dieser Gegend bereits vor 45 Jahren ausgeführten bayerischen Präzisionsnivellements zusammenfallen und mit diesen eine große Anzahl von zuverlässigen Höhenmarken gemeinsam haben.

Die aus der Netzausgleichung berechneten mittleren Nivellierfehler betragen für das ältere Nivellement ± 2,3 mm für das Kilometer und für das neuerdings wiederholte Nivellement ± 0,8 mm nach der Linienausgleichung und ± 1,3 mm nach der Netzausgleichung, so daß man für die kilometrische Differenz beider Nivellements den mittleren zufälligen Kilometerfehler zu ± 2,8 mm annehmen kann. Hieraus ergibt sich für die äußerste Grenze des Messungsgebietes eine mittlere Unsicherheit der beobachteten Senkungen von ± 28 mm, ein Betrag, der den dritten Teil der ermittelten größten Senkung von 82,8 mm bei Laufen gerade erreicht.

In einem das Senkungsgebiet darstellenden Kärtchen sind die beobachteten Senkungen durch Linien gleicher Senkung (Isokatabasen) mit 10 mm Höhenabstand dargestellt. Dieselben lassen die durch die Schubwirkung der gegen Norden vorrückenden Alpenkette in den jüngeren Gebirgsschichten hervorgerufene Faltung deutlich erkennen, die in geringem Maße offenbar in der Neuzeit noch fortdauert.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr H. Liebmann legt vor seine Abhandlung:

Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen.

Die Arbeit gibt die weitere Ausführung und Begründung der in der Juni-Sitzung gemachten Mitteilung. Insbesondere wurde noch die Verwertung funktionentheoretischer Forschungen von P. Köbe und die Anwendung auf die im Jakre 1902 zuerst von W. Kutta veröffentlichte, seitdem bis in die neueste Zeit mehrfach bearbeitete Theorie des Auftriebs von Tragflächen dargelegt. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 5. Oktober.

1. Herr R. Emden spricht

Über abnorme Hörbarkeit.

2. Derselbe legt vor eine Abhandlung:

Über elektrische Wellen in geschichteten Medien.

Untersucht wurde das Fortschreiten elektromagnetischer Wellen in einem geschichteten Medium mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsexponenten. Die theoretische Lösung zeigt, daß auch unter diesen Umständen die Strahlungsintensität konstant bleibt; gleichzeitig gestattet sie eine Behandlung des Reflexionsproblems durch Annahme einer Übergangsschicht an der Berührungsfläche zweier Medien.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 2. November.

Herr S. Günther legte einen für die Sitzungsberichte bestimmten Aufsatz vor:

Über eine ostafrikanische Naturkatastrophe.

Diese fand im Frühjahr 1912 statt und hatte zur Folge, daß das in der Landschaft Urundi gelegene Tal des Ruvuvuflusses durch gewaltige Wassermassen von einem darin wuchernden Papyrussumpfe vollkommen rein gefegt wurde. Die Erscheinung scheint übereinzustimmen mit den namentlich aus Irland wohlbekannten „Moorbrüchen", die nach neueren Untersuchungen nicht eigentlich auf das Platzen von Torfmooren, sondern auf ein den Muhrbrüchen vergleichbares Vorkommnis zurückzuführen sind.

Sitzung am 7. Dezember.

1. Herr R. v. Hertwig hielt einen Vortrag

Über die Unsterblichkeit der Protozoen.

Dieselbe ist von vielen Protozoen-Forschern, darunter auch dem Vortragenden bekämpft und ihr die Lehre entgegengesetzt worden, daß auch bei den Protozoen die Kontinuität des Lebens nur dadurch ermöglicht werde, daß zeitweilig bei ihnen „Depressionszustände" eintreten, während deren die durch den Lebensprozeß verbrauchten Teile zu Grunde gehen und durch neue ersetzt werden, Vorgänge, welche als Partialtod der Zelle bezeichnet werden. Vorübergehend schienen die Untersuchungen des amerikanischen Zoologen Woodruff an Infusorien die Weismannschen Ansichten neu zu bestätigen. Genauere Prüfung hat jedoch auch hier nachgewiesen, daß periodische Erneuerungen des Kernapparats eintreten. Der Ansicht, daß es sich hier um Besonderheiten der Infusorien handele, welche bei anderen Protozoen nicht vorkommen, tritt der Vortragende entgegen, indem er auf Grund eigener Untersuchungen durchführt, daß die gleichen Erscheinungen wie bei Infusorien auch bei Rhizopoden beobachtet werden.

2. Herr F. Lindemann spricht über

Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr H. Liebmann legt für die Sitzungsberichte eine Abhandlung vor

Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme.

Bei den klassischen Beweisen für die isoperimetrischen Eigenschaften von Kreis und Kugel treten geometrische Größen, wie Umfang, Flächeninhalt, Oberfläche, Rauminhalt usw. in bestimmten Verbindungen auf, die bei Dilatationen ihren Wert nicht ändern. Es wird nun systematisch nach solchen Invarianten gesucht, wodurch sich eine Reihe neuer isoperimetrischer Aufgaben ergibt.

Verzeichnis der im Jahre 1918 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 39, 1917.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. 13, 14 Index.
— — Ljetopis 30; 31, 1, 2; 32, 1.
— — Rad, Kniga 216, 217.
— — Zbornik, Kniga XVIII 20, 2; 22.
— — Rječnik 35.
— — Monumenta spectantia historiam Slavorum, vol. 38, 40, 41, 42.
— — Stari Prisci 24.
— — Prirodoslovna istrazivanja Svezak 8, 11, 12.
— — Opera Acad. scient. et artium Slav. merid., vol. 26—28.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. 19, Heft 1—2.
Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, deel XIX, 2—6. I. sectie, deel XII, 3.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 25, 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XVII, 1—4, XVIII, 1.
— — Verslagen en mededeelingen, 5. Reeks, deel 2.
— — Jaarboek 1916.
— — Prijsvers 1917.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 35, No. 2—6; deel 36, No. 1.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 12, stuk 3.
— — Wiskundige opgaven, deel 12, stuk 5.
— — Revue des publications mathém., tom. 26, partie 1.

Bamberg. Lehrerbildungsanstalt:
— — 44. Jahresbericht, 1917/18.

Basel. Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 28. 1917.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1918 in 4^0 und 8^0.
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1916/17.

Bayreuth. Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 27, Heft 1.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarsberetning for 1917/18.
— — Aarbog 1916 17, Naturw. 1, Hist.-ant. 3.
— — Sars G. O., Crustacea, vol. VI, No. 13/14.
— — Skrifter Bd. 3 Nr. 1.

Berlin. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-histor. Klasse, 1917, 8; 1918, 1—13. / Physikal.-math. Klasse, 1918, 1—4.
— — Sitzungsberichte 1917, 39—51; 1918, 1—38.
— — Politische Korrespondenz Friedrichs des Großen. Bd. 37.
— — Inscriptiones Graecae, Editio minor, Pars IV, fasc. 1.
— — Rede auf Schmoller.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 26, Nr. 1 - 4; Bd. 27, Nr. 1, 3, 4.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte. 50. Jahrg., Nr. 18; 51. Jahrg., Nr. 1—17.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Zeitschrift 1917, Bd. 69 Nr. 1 - 12.
— — Abhandlungen, Bd. 69, Nr. 3, 4.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 47.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Die Fortschritte der Physik, 72. Jahrg., 1916, 1—3.
— — Verhandlungen, Jahrg. 20, Nr. 1—20, 25.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
— — Jahrbuch, Bd. 44, Heft 2, 3.
— Deutsches Archäologisches Institut, Bd. 32 Nr. 3, 4; Bd. 33 Nr. 1, 2.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Jahrbuch, Bd. 35 (1914) II, 3; Bd. 36 (1915) I, 3; II, 1, 2; Bd. 37 (1916) I, 1, 2.

Berlin. Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Beiträge zur geologischen Erforschung der deutschen Schutzgebiete, Heft 13, 14.
— Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1920.
— Reichsamt des Innern:
— — Der Obergermanisch-Raetische Limes des Römerreiches. Liefg. 43.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen, Bd. 2, Heft 3.
— — Mitgliederverzeichnis 1918, Nr. 1/2.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1918, Nr. 1—24.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 30, 2 und Bd. 31, 1.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1918, Nr. 1—12.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift 1918, 38. Jahrg., Nr. 1—11.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. III, Heft 4, 5.
Bern. Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Jahrbuch, Bd. 43.
— Historischer Verein des Kantons Bern:
— — Archiv, Bd. 23, 2; Bd. 24, 1.
Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 124.
— — Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1914—16.
Brasso. Historische Kommission:
— — Quellen zur Geschichte der Stadt Brasso, Band 7.
Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch für 1916 und 1917 (= 27. und 28. Jahrg.).
Breslau. Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur:
— — 93. Jahresbericht 1915, I u. II.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, S.-S. 1917, W.-S. 1917/18, S.-S. 1918.
— — Programm 1918/19.
Bromberg. Stadtbibliothek: Jahresbericht der deutschen Gesellschaft 1915.
— — Jahresbericht 1916 u. 1917.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 8 Nr. 5—12; Jahrg. 9 Nr. 1—12; Jahrg. 10 Nr. 1—4.

Bromberg. Kaiser Wilhelm-Institut für Landwirtschaft:
— — Jahresbericht 1915/16.

Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Bd. 14, 2; Bd. 15, 1, 2.
— — Zeitschrift, Bd. 14—16.
— — Navratil 1916.
— Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 21. Jahrg. Heft 1—4; 22. Jahrg. Heft 1, 2.

Budapest. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Almanach 1918.
— — Értekezések, Történettudományi (geschichtswissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 23 Nr. 6—10; Bd. 24 Nr. 1—10.
— — Értesitö, Archaeologiai N. F., Bd. 33 Nr. 4, 5; Bd. 34 Nr. 1, 2, 4, 5. Bd. 35 Nr. 1—5; Bd. 36 Nr. 1—5.
— Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 28, Heft 4—6; Jahrg. 29, Heft 1—4.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 58, Heft 6; Bd. 59, Heft 1—6; Bd. 60, Heft 3/4.
— Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 47, Heft 1—9.
— Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 24, 1917.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1917.
— — Wissenschaftliche Abhandlungen IV, 3.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 47. Jahresbericht, 1917.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — 58. Jahresbericht 1917/18.

Cincinnati. Society of Natural History:
— — Journal, vol. 21, Nr. 4.

Como. Società storica:
— — Periodico, No. 84.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 17, 1918.
— — Zeitschrift, Heft 58.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XIV, Heft 3, 4.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — 40. Bericht.

Darmstadt. Firma E. Merck:
— — 40. Jahresbericht 1917.
— — Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, N. F., Bd. 11, 3 u. Bd. 12, 1.
Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1918, Nr. 1, 2, 4—11.
Dessau. Verein für Anhaltische Geschichte:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 13, Heft 1.
Dillingen. K. Lyzeum:
— — Studienjahr 1917/18.
Alt-Dinkelsbühl. Historischer Verein:
— — Mitteilungen, 6. Jahrg. Nr. 1—6 (Nikolaus von Dinkelsbühl).
Dresden. Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1917, Nr. 19—24; 1918, Nr. 1 29.
— Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 26, 1—4.
— — Mitteilungen, Heft 25.
— — Gunnerus, Erinnerungsblatt 26. II. 1918.
Drontheim. Norske Videnskabens-Selskab:
— — Skrifter 1916, I.
— — Aarsberetning 1916.
Dürkheim. Pollichia:
— — Mitteilungen, Nr. 30.

Emden. Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Jahrbuch, Bd. 19. 2.
— — Uptalsboom-Blätter, 7. Jahrg. 1917/18.
Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1917/18.
— K. Universitätsbibliothek:
— — Schriften aus den Jahren 1916/17 in 4^0 und 8^0.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 35, 2 und Bd. 36, 3.
— Römisch-germanische Kommission des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — 10. Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung, 1917.
— — Korrespondenzblatt, 2. Jahrg., Nr. 1—3, 5—6.
Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land“:
— — „Schau ins Land“, 44. Jahrlauf.

Freiburg i. Br. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1918.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv, 45. Jahrg.
Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 47, 1918.

Genf. Archives suisses d'anthropologie générale:
— — Archives, tome 4, No. 4.
— Observatoire:
— — Resumée météorologique de l'année 1917.
— Redaktion des „Journal de chimie physique“:
— — Journal, tome XVI, No. 1—3.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Compte rendu des séances 34 u. 35, 1—3.
— Universität:
— — Thèses, 1916/17.
Giessen. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1918 in 4^0 und 8^0.
Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1917, Nr. 9—12.
— — Abhandlungen, N. F.: Philol.-hist. Klasse, Bd. 16, Nr. 6.
— — Nachrichten: a) Philol.-hist. Klasse, 1917, Heft 3—5; 1918 Heft 1, 2.
b) Math.-phys. Klasse, 1917, Heft 2, 3 und Beiheft.
Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1918.
— — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1917/18 u. 1918/19.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Zeitschrift, Jahrg. 16, Heft 1—4.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 54.
Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 18.
Groningen. Astronomisches Laboratorium:
— — Publications, No. 27, 28.
— Niederländische botanische Gesellschaft:
— — Recueil des travaux, vol. XIV, 3, 4.
Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 14, Heft 1—4.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1918.

Haag. K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, deel 73, afl. 3, 4; deel 74, afl. 1—4.
— — Naamlijst der leden, 1918.
Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III A, tom. 4, livr. 2; tom. 5, livr. 1.
Halle. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Nova Acta, Bd. 103.
— — Leopoldina, Heft 54, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 72, Heft 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 14; Bd. 15, Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, N. F., Nr. 5, 6.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1918/19.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Jahresbericht 1916/17.
— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 8, Heft 2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen u. Thüringen:
— — Zeitschrift für Naturwissenschaften, Bd. 83, Nr. 1—6.
Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 34 und Beiheft 1—5.
— — Staatshaushaltsberechnung 1916, 4^0.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1918, 4^0.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1917, 4^0.
— Deutsche Dichter-Gedächtnis-Stiftung:
— — Kalender für 1919.
— Deutsche Seewarte:
— — Aus dem Archiv, Bd. 36; Bd. 37, Nr. 1.
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 46, Nr. 1—12 und Beilage zu 1918.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 37. Jahrg., 1917.
— — Zeitschrift, Bd. XXII.
Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 21. Jahrg., Heft 1—4.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, 82. Jahrg., 1917, Heft 1—4.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philologisch-philosophischen Klasse, Nr. 5.
— — Abhandlungen der math.-naturw. Klasse, Nr. 4—6.
— — Sitzungsberichte: a) philol.-histor. Klasse, 1917, Nr. 12, 13; 1918, Nr. 1—7; b) mathem.-naturw. Klasse, 1917, A, Nr. 14—17; 1918, A, Nr. 2—9, 1918, B, Nr. 1, 2.
— — Jahresheft 1917.
— Universität:
— — Schriften der Universität aus dem Jahre 1918 in 4^0 und 8^0.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 20, Heft 2.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 13, Heft 3.
Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 40, 1913, Heft 1.
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 66, 1—6; Bd. 67, 1—6.

Ingolstadt. Historischer Verein:
— — Sammelblatt, Heft 37.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 55, Heft 2, 3.
— Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Zeitschrift, N. F., Bd. 23, 1, 2; Suppl.-Heft 6—8.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1918, Nr. 1—7, 9—43, 45, 47, 49—52; 1919, Nr. 1, 2.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1918, W.-S. 1918/19.
— — Bericht 1916/17.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 33, Heft 1—4.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für das Jahr 1916.
Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 51.
— — Mitteilungen 1916/17.
Kaufbeuren. Verein „Heimat“:
— — Deutsche Gaue, Heft 361—364; 373—380 und Sonderheft 105.
Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 47.
— — Quellen und Forschungen, Bd. 5.

Köln. Historisches Archiv der Stadt Köln:
— — Mitteilungen aus dem Stadtarchiv, Heft 36, 37.
— Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 37. Jahresbericht, 1917.

Königsberg i. Pr. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. 58, 1917.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt Juni 1917 — Mai 1918.
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 8, tom. II, No. 6; tom. III, No. 1—3; tom. V, No. 1.
— — Biologiske Meddelelser I, 3—8.
— — Hist.-filol. Meddelelser I, 5—7; II, 1, 2.
— — Mathemat.-fysiske Meddelelser I, 3—10.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 82—85.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 14, livr. 2.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Publications de circonstance, No. 71.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Mémoires N. S. 1914—15, 1916—17.
— — Nordiske fortidsminder, Bind 2, Heft 2.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä No. 27, 29.
— Dänische biologische Station:
— — Report No. 25, 1918.

Krakau. Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 52, 53.
— — Rocznik, tom. 17.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1918, No. 1. 2, 4—10.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 9, No. 1, 2.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 54, 1.

Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 193.

Leiden. s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen, No. 31—36.

Leiden. Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Handlingen en Mededeelingen 1915/16.
— — Levensberichten 1916/17.
— — Tijdschrift, deel 36, afl. 1—4.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 25, No. 5—12; Jahrg. 26, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, N. S., Bd. 46, No. 2—4.
— Physikalisches Laboratorium der Universität:
— — Commentationes, No. 140—151, vol. 13 = 133—144.
— — Supplement, No. 1—35, 37—40.

Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter, 1917, Bd. 41, Nr. 22—24; 1918, Bd. 42, Nr. 1—23.
— Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 34, Nr. 4; Bd. 35. Nr. 1; Bd. 36, Nr. 1.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 35, Nr. 4 5.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 69, Nr. 1—8; Bd. 70, Nr. 2—3.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 69, Nr. 3—4; Bd. 70, Nr. 1.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 1918.
— Börsenverein der deutschen Buchhändler:
— — 5. Bericht über die Verwaltung der deutschen Bücherei i. J. 1917.

Lemberg. Verein für Volkskunde:
— — Lud, tom. 19, 1—4. tom. 20, 1—4.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 76. Jahresbericht.

Ludwigshafen a. Rh. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1917/18.

Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser“:
— — Notiser, 1918, No. 1.
— Universität:
— — Bibelforskaren 1917, 1—4.
— — Arskrift, Kyrkohistorisk, Jahrg. 18, 1917.

Luxemburg. Institut Grand-ducal:
— — Archives trimestr. (de la section des sciences naturelles), vol. 6, fasc. 1—4; vol. 7, 1912—13.

Luzern. Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Heft 7, 1917.

Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 11, 1916.

Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 19. Jahrg., 1918, Nr. 1—10.

Marbach. Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 22, 1917/18.

Marburg. Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Schriften, Bd. 14, 1, 2.

Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1917/18.

Meissen. Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1916—18.

Metz. Gesellschaft für lothringische Geschichte:
— — Jahrbuch, 26—28. Jahrg. 1914—1916.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1915—1917.

München. Statistisches Amt:
— — Tauflut, Februar 1909.
— — Hygiene und soziale Fürsorge in München (Einzelschriften Nr. 12).
— Landesanstalt für Gewässerkunde:
— — Jahrbuch 1916, Heft 2—4.
— Ornithologische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 13, Heft 3 und 4.
— Realgymnasium:
— — Jahresbericht, 1917/18.
— Technische Hochschule:
— — Programm für das Studienjahr 1918, 1918/19.
— — Personalstand 1918.
— Kadettenkorps:
— — Bericht 1917/18.
— Landeswetterwarte:
— — Übersicht der Witterungsverhältnisse, 1917, 12; 1918, 1—10.
— Lehr- und Versuchsanstalt für Photographie:
— — Jahrbuch, 1916—18.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1918.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München-Freising 1918 mit Register.
— Deutsches Museum:
— — Verwaltungsbericht über das 14. Geschäftsjahr 1916—17.

München. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1918.
— — Schriften aus dem Jahre 1918 in 4^0 und 8^0.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1918 und W.-S. 1918/19.
— — Vorlesungsverzeichnis für das Kriegsnothalbjahr, 15. Januar bis 15. April 1919.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Altbayerische Monatschrift, Bd. 14, Heft 3.
Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 45, 1916/17.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 75, 1.

Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 27, 1918.
— Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 41, 42.
— Bibliothèque de l'Université:
— — Recueil de travaux, fasc. 6.
Nördlingen. Historischer Verein:
— — Jahrbuch 6, 1917.
Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 19, 5; Bd. 21, 2.
— — Jahresbericht 1917.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1916, 1—4; 1917, 1—4.
— — Mitteilungen 1915 und 1916.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 38., 39. und 40. Jahresbericht (1915—1917).
— — Mitteilungen, Heft 22.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 41, 1918.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 75, 2.
Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1917/18.
Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 28. Jahresschrift, 1918.
Pola. Hydrographisches Amt der Kriegsmarine:
— — Veröffentlichungen, Nr. 38, 39.

Posen. Historische Gesellschaft:
— — Historische Monatsblätter, Jahrg. 17, 18.
Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., Nr. 75.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, Nr. 32.
Prag. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht 1917.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1917; der math.-naturwiss. Klasse, 1917.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos":
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 65, Nr. 1—8.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 13, Nr. 1.
— Knopfmuseum:
— — Berichte, Jahrg. 2, Nr. 2—4; Jahrg. 3, Nr. 1/2.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 56, Nr. 1—4.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1918; W.-S. 1918/19.
— — Inauguration des Rektors 1917/18.

Regensburg. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Heft 12.

Salzburg. Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 58, 1918.
Sarajevo. Institut für Balkanforschung:
— — I. Reisen und Beobachtungen, Heft 19 und 20.
— Landesmuseum:
— — Glasnik 28, 1916, 1—4; 29, 1917.
Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 81, 1, 2; Jahrg. 82.
Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 8.
Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 21, 1918.
Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Handlingar, Bd. 56, No. 1—6.
— — Arkiv för Zoologie, Bd. 11, No. 1, 2.
— — Arkiv för Kemi, Bd. 6, No. 4, 5.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Arkiv för Botanik, Bd. 14, No. 4, Register 1826—1917.
— — Arkiv för Matematik, Bd. 11, No. 4; Bd. 12, Nr. 1—4.
— — Årsbok for år 1917.
— — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 58.
— — Astronomiska Jakttagelser i Sverige, Bd. 10, No. 5, 6.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 57, 1918, No. 1—6.
— Geologiska Föreningens:
— — Förhandlingar, Bd. 40, No. 1—6.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1917.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 37, Heft 3, 4; Jahrg. 38 (1918), Heft 1—3.
— Svenska Literatursälskapet:
— — Skrifter 10, No. 1; Samlaren 38.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1917, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, N. F., 42—44.
— Sveriges geologiska Undersöckning:
— — Årsbok 1917.
— — Afhandlingar och uppsatser, Ser. C, No. 204—280; Ser. Ca, No. 12—16.
— — Serie B, Öfversiktskartor No. 9 (mit Karte).
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 13, 14, I, II, 1916—17.
— — Flygblad 7—9.

Strassburg. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 32—35.
— Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1913, Heft 5.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1918.

Straubing. Historischer Verein:
— — Jahresbericht 20, 1917.
— — Heimatkundliche Geschichte von Straubing.
— — Urkundenbuch der Stadt Straubing, 1. Bd.

Stuttgart. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 55, 56.

Stuttgart. Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 26, 3/4.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:
— — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 11, 1916, Heft 1—4.
Tübingen. Universität:
— — Universitäts-Schriften 15, 16.

Ulm. Verein für Kunst und Altertum:
— — Mitteilungen, Heft 21.
Upsala. K. Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1916/17 in 4^0 und 8^0.
— — Årskrift 1914.
— — Arbeten, No. 21; 22, 1, 2; 23.
— — Zoologiska Bidrag, Bd. 6, 1918.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 49, 1917.
Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en mededeelingen, Ser. III, No. 37, 38; Deel 38.
— — Verslag 1917.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Overzicht, Jahrg. 14, No. 1—12; Jahrg. 15, No. 1, 4—11.
— Observatoire astronomique:
— — Recherches astronomiques, Jahrg. 7, 1917.
— Physiol. Laborat. d. Hoogeschool:
— — Onderzoekingen V, No. 19.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 17.

Weihenstephan. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1917/18.
Weimar. Thüring. botanischer Verein:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 34.
Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 50, Heft 1, 2 und Jahrg. 51.
Wien. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte: a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 181, Abh. 6; Bd. 185, Abh. 3—5; Bd. 186, Abh. 1—3; Bd. 187, Abh. 1 und 2; Bd. 188, Abh. 4; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 126, Heft 4—9 und Register zu Bd. 121—125; Abt. IIa, Bd. 126, Heft 3—9; Abt. IIb, Bd. 126, Heft 3—10; Abt. III, Bd. 127 Heft 1, 2; Abt. III, Bd. 126 (1. Heft).

Wien. Akademie der Wissenschaften:
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 60, 1, 3; Bd. 61, 1; Bd. 62, 1; math.-naturw. Klasse, Bd. 93.
— — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1917, Nr. 23–27; 1918, Nr. 1–17.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, Nr. 49, 50.
— — Almanach, 67. Jahrg., 1917.
— — Fontes rerum austriacarum, 2. Abt. Diplomataria et acta. 68. Bd.
— — Der Briefwechsel des Eneas Silvius Piccolomini, III. Abt., 1. Bd.
— Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1918, Nr. 1—52.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 67, Nr. 7—10.
— — Abhandlungen, Bd. 9, Nr. 4.
— Österreichische Kommission für internationale Erdmessung:
— — Verhandlungen 1916 und 1917.
— Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 31, Nr. 1–4.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 24 und 25.
— Mechitaristen-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1914, Nr. 12; 1915, Nr. 1—12.
— Geologische Reichsanstalt:
— — Verhandlungen 1917, Nr. 9—17.
— — Jahrbuch, Bd. 66, Heft 2—4; Bd. 67, Heft 1.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Klimatographie von Österreich 7 und 8.
— — Jahrbücher, Bd. 51.
— — Windmessungen 1915 und 1916.

Wiesbaden. Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, Jahrg. 70.

Würzburg. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1917/18.
— Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1917/18.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1917—1918/19.
— — Personalstand 1918.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 59.
— — Jahresbericht für 1916.

Zürich. Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 27, Heft 4 und Nr. 82.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 120.
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 62, Heft 3/4; Jahrg. 63, Heft 1/2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 50 u. 76. Karte 1 : 100000, Bl. 8.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 19, Nr. 4; Bd. 20, Nr. 1, 2.
— — 26. Jahresbericht, 1917.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Programm, S.-S. 1918; W.-S. 1918/19.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, Nr. 107.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 53 Jahrg., 1916.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1917/18.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Dr. Adamkiewicz in Wien:
— Zum Wesen der Schlaflosigkeit (S.-A.) und 5 weitere Sonderabdrücke.
Bechold H. in Frankfurt a. M.:
— Das Institut für Kolloidforschung der Neubürgerstiftung.
Berndt G. in Berlin:
— Druckfestigkeit von Glas und Quarz. (S.-A.)
v. Fischer Hermann in Tübingen:
— Schwäbisches Wörterbuch. Liefg. 56.
Dr. Fricke Hermann in Berlin:
— Die neue und einfache Deutung der Schwerkraft.
Dr. Kayser Emanuel in München:
— Lehrbuch der Geologie. 1. Teil. Allgemeine Geologie. 5. Aufl.
Kazem-Zadeh H. in Charlottenburg:
— Rahe Nau.
Keune in Metz:
— Museum der Stadt Metz. (5 S.-A. aus Paulys Realenzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaft.)

Kuhlmann Fritz in München:
— Flugschriften des Münchner Bundes, Heft 3.
— Schreiben in neuem Geiste, I und II.

Kull J. V. in München:
— Die Grafen von Königsegg.
— Deutsche Halbbrakteaten durch Umschrift.
— Die Welfen als Herzoge von Bayern.

Dr. Lenz Max in Hamburg:
— Für die Hamburgische Universität. Zugleich eine Kritik ihrer Gegner.

Dr. Liebermann Felix in Berlin:
— Geiger zum 70. Geburtstag.
— Shakespeares Anschauung von Staat, Gesellschaft und Kirche.

Dr. Luschin v. Ebengreuth A. in Gratz:
— Grundriß der Österreichischen Reichsgeschichte. 2. verb. Aufl.

Dr. Mehlis C. in Neustadt a. H.:
— Denkmäler aus dem Gebiete der Haingeraiden. (S.-A.)
— Des Claudius Ptolemäus:
„Geographia" und die Rhein-Weserlandschaft. (S.-A.)

Dr. Patsch Carl in Sarajevo:
— Die Volkspoesie der Albaner (v. Dr. M. Lambertz).

Dr. Reichert J. in Berlin:
— Aus Deutschlands Waffenschmiede. 2. Aufl.

Reininghaus Fritz in Zürich:
— Neue Theorie der Biegungs-Spannungen.

Dr. Scherman Lucian in München:
— Orientalische Bibliographie. Bd. 20—24 und Bd. 25, Heft 1.

Dr. Sven v. Hedin in Stockholm:
— Southern Tibet. Vol. I, II, III und V mit Atlas tibetanischer Panoramen und erste Folge von Karten.

Teubner B. G. in Leipzig:
— Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. III, Heft 6.

Trübner J., Verlagsbuchhandlung in Straßburg:
— Zeitschrift für Assyriologie. Bd. 31, Heft 3/4; Bd. 32, Heft 1.

Dr. Walte Wilhelm in Hamburg:
— Eine neue Erklärung der osmotischen u. elektrischen Erscheinungen.
— Beiträge zur Energielehre.

Dr. Willstätter und Stoll in München:
— Untersuchungen über die Assimilation der Kohlensäure.

Über den Ursprung der durchdringenden atmosphärischen Strahlung.

Von R. Seeliger.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 9. Februar 1918.

Inhaltsübersicht: § 1. Einleitung. § 2. Das Beobachtungsmaterial. § 3. Die Problemstellung. § 4. Abhängigkeit der Jonisation von der Höhe; Bestimmung der Absorption. § 5. Zusätze und Ergänzungen (Erdkrümmung, Richtungseffekt). § 6. Die Streuung der Strahlen. § 7. Bestimmung der Aktivität. § 8. Zusammenfassung der Resultate.

§ 1. In ihrem vorzüglichen Buch über die Radioaktivität haben St. Meyer und von Schweidler[1]) eingehend auch den Ursprung der dauernden schwachen Jonisierung diskutiert, welche die Gasfüllung allseitig geschlossener Gefäße zeigt. Sie finden, daß dieselbe sich zusammensetzt aus sieben Summanden, von denen sechs sich zwanglos erklären lassen durch die jonisierende Wirkung der Strahlungen radioaktiver Substanzen, die im Jonisationsgefäß selbst und in dessen Umgebung vorhanden sind; abzüglich gewisser Unsicherheiten hinsichtlich der Konzentration der Thor- und Aktiniuminduktionen ergibt sich der Betrag der beobachteten Jonisierung qualitativ und quantitativ aus den bekannten Konzentrationen strahlender Substanzen in den irdischen Körpern (Gefäßmaterial, feste Erdrinde, Atmosphäre usw.) und aus den ebenfalls bekannten Eigenschaften dieser Strahlungen. Anders liegen jedoch die Verhältnisse be-

[1]) St. Meyer und v. Schweidler: Die Radioaktivität (Teubner 1916), S. 472 ff.

züglich des siebten Summanden, dessen Deutung sich nicht, wie die der übrigen, auf bereits Bekanntes zurückführen läßt; man deutet ihn, in erster Linie veranlaßt durch die Ergebnisse einiger Ballonhochfahrten von Heß, Kolhörster u. a. als die Wirkungen einer γ-ähnlichen Strahlung bisher unbekannten Ursprungs, der sogenannten durchdringenden Strahlung. Um deren Herkunft erklären zu können, sah man sich nun zu Hypothesen gezwungen, die nicht nur geophysikalisch, sondern auch rein physikalisch hinsichtlich der Eigenschaften der emittierenden Substanzen und der Strahlung selbst das größte Interesse beanspruchen können, worauf besonders v. Schweidler in einer grundlegenden Arbeit hingewiesen hat[1]). Die Untersuchung v. Schweidlers weiter zu führen und namentlich dieselbe mathematisch tunlichst exakt auszuarbeiten, schien mir nun wünschenswert, um ein Urteil darüber zu bekommen, inwieweit die Tatsachen zu derartigen Hypothesen wirklich zwingen und um gewisse Richtlinien für die weitere Erforschung der durchdringenden Strahlung zu erhalten.

Wählt man die Wandstärke des Jonisationsgefäßes genügend groß, so daß von außen kommende α und β Strahlen abgehalten werden und nur γ Strahlen durchzudringen vermögen, so kommen als Jonisatoren außer den Strahlungen des Gefäßes und der Gasfüllung selbst bzw. der auf dem Gefäß sitzenden Induktionen nur γ Strahlen in Betracht, welche aus dem Außenraum des Gefäßes stammen; die Gesamtwirkung der ersteren (die von der Größenordnung 10 Jonen pro Sekunde zu veranschlagen ist) kann im stationären Zustand als eine Konstante des Apparates betrachtet werden, so daß wir uns im folgenden also lediglich um die letztere zu kümmern brauchen. Beobachtungen im Freiballon und im Gebirge haben nun gezeigt, daß diese cet. par. abhängt von der Lage des Jonisationsgefäßes im Raum, d. h. von der Höhenlage desselben über dem Meeresniveau, und es ist gelungen, sie nicht nur qualitativ als Funktion der Höhe, sondern auch quantitativ zu bestimmen.

[1]) v. Schweidler, Festschrift für Elster und Geitel 1915, S. 411.

Unter der obigen Annahme, daß der hier interessierende Anteil der Jonisation herrührt von einer von außen in das Jonisationsgefäß eindringenden Strahlung, läßt sich dann das Problem folgendermaßen formulieren: Gegeben ist die Anzahl von Jonenpaaren, welche in der Volumeinheit des Füllgases pro Zeiteinheit erzeugt werden, und zwar ist diese Anzahl gegeben als eine Funktion des Orts; gesucht sind die räumliche Verteilung und die Ergiebigkeiten der Strahlungsquellen im Außenraum und die Eigenschaft der durchdringenden Strahlung, d. h. vor allem der Absorptionskoeffizient und die Gesetze ihrer Ausbreitung im Raum. Damit ist die Problemstellung absichtlich möglichst formal, ähnlich etwa den Problemen der Potentialtheorie, gegeben; ein zweiter Schritt erst wird es dann sein, die erhaltenen Lösungen physikalisch zu interpretieren und an sie Hypothesen über die Natur der Strahlungsquellen anzuschließen.

§ 2. Die erste Aufgabe ist es natürlich, das Beobachtungsmaterial daraufhin zu diskutieren, was wir an demselben als gesicherte Kenntnis betrachten dürfen. Wie wir bereits bemerkten, hängt die Jonisation ab von der Erhebung des Beobachtungsortes über das Meeresniveau; die ganze Sachlage bedingt nun, daß die experimentelle Untersuchung gebunden ist an die Möglichkeit, im Freiballon zu beobachten, und dies wiederum ist der Grund, warum bisher nur eine geringe Zahl von Messungsreihen uns zur Verfügung steht. Jedenfalls ist es notwendig, nachdrücklich auf den geringen Umfang des vorhandenen Beobachtungsmaterials hinzuweisen, um vor einer Überschätzung der quantitativen Seite desselben bewahrt zu bleiben. Andererseits aber ist es immerhin schon heute bei vorsichtiger Interpretation möglich, gewisse Daten als sicher gestellt anzunehmen und auf ihnen einige das Prinzipielle ohne Zweifel treffende Schlüsse aufzubauen. Wenn wir nun alle hypothetischen Elemente a priori tunlichst ausschalten wollen, ist es unbedingt erforderlich, jene Daten herauszuschälen; eine gewisse Schematisierung der Beobachtungsergebnisse unter Hervorhebung der wichtigen Punkte ist allerdings notwendig, aber sie dürfte zunächst für die Theorie nur von Vorteil sein.

Wir charakterisieren die Intensität der jonisierenden Strahlung in der üblichen Weise durch die Anzahl q von Jonenpaaren, welche pro Volum- und Zeiteinheit in Luft von Atmosphärendruck erzeugt werden. Die Beobachtungen haben dann zweierlei Angaben zu liefern; die der ersten Art sind quantitativer Natur und geben jeweils den Zahlenwert von q an, die der zweiten Art sind funktioneller Natur und geben q als Funktion der Höhe. Beide sind für die Theorie von gleicher Wichtigkeit, beide aber können aus den Beobachtungen nicht direkt entnommen werden, sondern erst nach einer Reduktion, die mit einiger Unsicherheit behaftet ist. Was man nämlich direkt mißt, ist die Gesamtjonisation Q in der Volumeinheit des Füllgases, die sich zusammensetzt aus drei Teilen, nämlich aus 1. der gesuchten, d. h. in die Theorie eingehenden Volumjonisierung q durch die äußere Strahlung, 2. der bereits besprochenen und sozusagen als Apparatkonstante aufzufassenden Eigenjonisierung q_1 des Jonisationsgefäßes und 3. der Jonisierung q_2 durch die von der äußeren Strahlung in den Wänden des Gefäßes ausgelösten Sekundärstrahlen. Es ist also

$$Q = q + q_1 + q_2. \qquad 1)$$

Der Teil q_1 läßt sich, wie verschiedentlich gezeigt wurde[1]), exakt bestimmen und ist für denselben Apparat in der Tat konstant, so daß er also bei der Reduktion des q aus dem Q lediglich als additive Konstante auftritt. Wesentlich anders liegt jedoch die Sache leider hinsichtlich des Anteils q_2, welche eine beträchtliche Unsicherheit in jene Reduktion hereinbringt. Man wird im allgemeinen annehmen können — es hat darauf wohl zuerst Linke hingewiesen[2]) —, daß q_2 proportional q ist. Setzt man $q_2 = \alpha q$, so wird Gl. 1)

$$q = \frac{1}{1+\alpha}(Q - q_1). \qquad 2)$$

Die Größe des Proportionalitätsfaktors α wird nun nicht nur von der Gestalt und dem Material des benutzten Jonisations-

[1]) Z. B. Bergwitz, Festschrift für Elster und Geitel 1015, S. 585.
[2]) Linke, Meteor. Zeitschr. 33, S. 157, 510, 1916.

gefäßes abhängen, sondern auch von der Natur der primär einfallenden Strahlen, d. h. von deren Durchdringungsfähigkeit. In welchem Maß eine solche Abhängigkeit besteht, läßt sich allerdings kaum angeben, um so mehr, als wir über die Natur der erregenden Strahlung a priori nichts aussagen können, sondern dies ja gerade erst auf Grund einer Diskussion der reduzierten Beobachtungsergebnisse tun wollen. Jedenfalls zwingt nichts dazu, für α etwa gerade den für die γ Strahlen des RaC gefundenen Wert $^1/_3$ einzusetzen und man wird demgemäß auf die quantitativen mit $\alpha = {}^1/_3$ erhaltenen q Werte kein allzu großes Gewicht legen dürfen. Um ein Bild des Einflusses der Größe von α zu geben, habe ich die Resultate von Kolhörster[1]) reduziert mit $\alpha = 0{,}1$ und $\alpha = 0{,}5$ und das Ergebnis in Fig. 1 dargestellt. Bedenkt man, daß die angenommenen Werte von α immerhin einen bereits recht weiten Variabilitätsbereich umfassen dürften, so wird man aus dieser Figur wohl abnehmen können, daß die genannte Unsicherheit der Reduktion die Größenordnung und den Charakter des funktionellen Verlaufs von q kaum verändern wird, daß aber die Errechnung exakter quantitativer Einzelwerte (wie dies z. B. Hr. Linke loc. cit. getan hat) nicht als bindende Unterlage für eine Theorie angesehen werden kann. Dazu kommt nun aber noch ein weiterer Punkt, der immerhin einiges Bedenken erregen kann und mindestens zur Vorsicht mahnt. So lange α konstant ist für alle Höhen, aus denen Beobachtungen vorliegen, wird der Charakter der reduzierten q Kurve durch die Größe von α in wesentlichen Punkten nicht berührt; es ist dann z. B. das Verhältnis zweier q Werte für zwei verschiedene Höhen ganz unabhängig von α. Eine solche Abhängigkeit wird aber eintreten, sobald α nicht mehr räumlich konstant ist; so z. B. verläuft die von Linke erhaltene q Kurve in ihrem oberen Teil nahezu linear, würde aber bei einer Zunahme von α mit der Höhe gegen die x Achse konkav verlaufen und so ihren Charakter in einem wesentlichen Punkt ändern. Nun ist

[1]) Kolhörster, Abh. d. Naturf. Ges. Halle, N. F., Nr. 4 (1914).

es allerdings nicht möglich, im einzelnen eine etwaige Veränderlichkeit des α mit der Höhe abzuleiten; es läßt sich aber immerhin aussagen, daß für homogene Strahlen α konstant ist. Da andererseits für inhomogene Strahlen eine Filtration derselben in der Atmosphäre und damit eine Zunahme der mittleren Durchdringungsfähigkeit mit abnehmender Höhe eintreten wird, — und zwar wie eine einfache Rechnung etwa für ein von oben in die Atmosphäre eindringendes „Spektrum" zeigt, in recht beträchtlichem Maß — wird man eine Veränderlichkeit des α jedenfalls a priori nicht von der Hand weisen und bei der Bewertung quantitativer Schlüsse aus den Beobachtungen nicht ignorieren können.

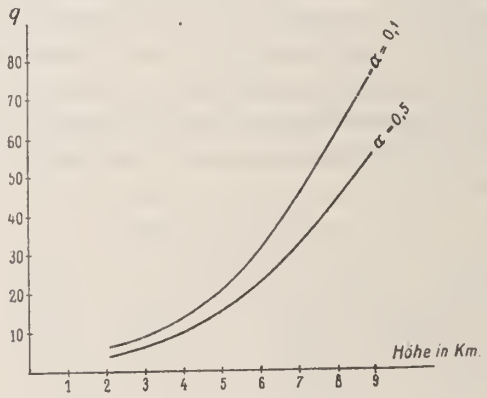


Fig. 1

Es hat nun v. Schweidler in der oben zitierten Untersuchung eine andere Methode der Reduktion angewendet. v. Schweidler macht allerdings von vornherein über die Eigenschaften und die Herkunft der Strahlen bestimmte Annahmen, es ist aber bemerkenswert, daß die von ihm und von Linke erhaltenen Kurven für q nahe zusammen fallen, wenn man berücksichtigt, daß die bei v. Schweidler mit q bezeichneten Jonisierungswerte unseren $(q + q_2)$ entsprechen und demgemäß jeweils etwa 33 % von ihnen abzuziehen sind.

Man kann nun aber trotz der eben besprochenen Unsicherheiten in der Reduktion gewisse wesentliche Aussagen über die Größe und den Verlauf der Jonisierung machen; exakt quantitative Angaben aus dem Beobachtungsmaterial zu entnehmen, scheint mir zur Zeit noch nicht möglich zu sein und ist auch vorerst nicht notwendig, da sich auch so schon recht brauchbare Unterlagen für die Theorie und Fingerzeige für die weitere experimentelle Untersuchung ergeben. Fassen wir das Ergebnis der obigen Diskussion zusammen, so können wir (unter der Annahme der Homogenität der primären Strahlen) als sicher gestellt folgendes über die Größe q aussagen. 1. Die Jonisation q nimmt mit zunehmender Höhe rasch zu, und zwar derart, daß diese Zunahme mit zunehmender Höhe jedenfalls nicht kleiner wird, d. h. daß $\frac{d^2q}{dH^2}$ stets gleich oder größer Null ist. Im großen und ganzen ist der Verlauf von q also jedenfalls charakterisiert durch Kurven der Art, wie sie in Fig. 1 gezeichnet sind. 2. Wir können aus diesen Kurven mit hinreichender Genauigkeit das Verhältnis je zweier q Werte für zwei verschiedene Höhen entnehmen. 3. Die Absolutwerte von q sind der Größenordnung nach bekannt und für den Erdboden von der Größenordnung 1. Auf diese Angaben also wollen wir uns im folgenden im wesentlichen stützen und zusehen, welche Schlüsse sich aus denselben ziehen lassen.

§ 3. Wir nehmen an, im Raum seien Strahlungsquellen verteilt, welche eine jonisierende Strahlung vom Absorptionskoeffizienten λ mit der Intensität i aussenden. Wenn dann die Strahlung bei ihrer Ausbreitung lediglich durch Absorption geschwächt wird, eine Streuung also ausgeschlossen wird, so ist die Intensität derselben in bekannter Weise als Funktion der Entfernung von der Quelle gegeben. Wir setzen demgemäß für die Jonisation dq, welche von einem strahlenden Volumelement dv in der Entfernung r herrührt, an

$$dq = \frac{i}{4\pi} \lambda \cdot \frac{e^{-\lambda r}}{r^2} dv. \qquad 3)$$

Die Bedeutung von i in diesem Ansatz erkennt man sofort durch eine Integration über den ganzen unendlichen Raum um das strahlende Element; es ist nämlich

$$q = \frac{i}{4\pi}\lambda \iiint \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}\, dv \cdot dv' = i\,dv \qquad 4)$$

d. h. i ist die Anzahl von Jonen, welche die von der Volumeinheit in der Zeiteinheit ausgehende Strahlung in dem betrachteten Medium überhaupt erzeugen kann. Im allgemeinen Fall ist nun λ eine Funktion des Ortes, d. h. es ist $\lambda = \lambda_0 \cdot f(x, y, z)$, worin $f(x, y, z)$ eine bekannte Funktion sein soll. Dann ergibt also 3) für den im Jonisationsgefäß beobachteten Wert von q die folgende quellenmäßige Darstellung:

$$q = \frac{\lambda_0}{4\pi} \iiint i \frac{e^{-\lambda_0 f}}{r^2}\, dv \qquad 5)$$

und die Problemstellung läßt sich nun analytisch in Strenge folgendermaßen fassen. Gegeben ist q als Funktion des Ortes, gesucht ist die Ergiebigkeit i und die Verteilung der Quellen und der Wert von λ_0. Für die uns hier interessierenden Fragen vereinfacht sich nun die Sachlage insofern noch in formaler Beziehung, als alle eingehenden Größen nur Funktionen einer Koordinate, nämlich der Höhe x über dem Boden sind. Wir können nämlich in allen hier in Betracht kommenden Fällen ohne Bedenken annehmen (vgl. S. 26 ff.), daß alle Verhältnisse jeweils in horizontalen, der Erdoberfläche parallelen Ebenen dieselben sind, d. h. daß q, i und f nur Funktionen der vertikalen Koordinate x sind. Eine einfache Überlegung[1]) gibt dann auf Grund des Ansatzes 3) die Beziehung 5) in der folgenden Form

$$q(\xi) = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^\infty i(x)\, dx \int_{L(x,\xi)}^\infty \frac{e^{-n}}{n}\, dn, \qquad 6\,a)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$L(x, \xi) = \int_\xi^x \lambda(z)\, dz. \qquad 6\,b)$$

[1]) Man vgl. eine Arbeit von Schrödinger, Wien. Ber. 121, S. 2391, 1912.

Diese beiden Gleichungen werden wir allem folgenden zu Grunde legen. Der eingehenden Diskussion ist jedoch noch eine Bemerkung allgemeiner Art über die Eindeutigkeit der Lösungen vorauszuschicken, deren Inhalt von ausschlaggebender Bedeutung für die Bewertung des Folgenden ist. Es ist aus den Gleichungen 6) ohne weiteres ersichtlich, daß die Problemstellung in obiger allgemeinen Form ganz unbestimmt ist, und zwar aus 3 Gründen: 1. sind die Werte von q nicht im ganzen unendlichen Raum $0 \leq \xi \leq \infty$, sondern nur in einem relativ kleinen Raumteil bekannt, nämlich in den uns zugänglichen Teilen der Troposphäre. 2. ist nicht nur die Funktion $i(x)$, sondern auch der Wert von λ_0 (der auch in $L(x, \xi)$ eingeht) unbekannt. 3. endlich ist — worauf, soweit mir bekannt, bisher noch nicht geachtet wurde, — eine weitere Größe unbekannt, die implicite in $L(x, \xi)$ steckt, nämlich die Absorption der Strahlung in der strahlenden, räumlich verteilten Substanz selbst. Man wird diese durch eine dem λ_0 analoge Konstante λ' beschreiben und hat dann strenge genommen mit der Komplikation zu rechnen, daß $L(x, \xi)$ ihrerseits wieder Funktion von $i(x)$ ist. A priori wird man jedenfalls die Eigenabsorption der strahlenden Substanz schon deshalb nicht vernachlässigen, weil erfahrungsgemäß die Absorption in einem Medium stark mit dem Atomgewicht desselben ansteigt und wir über dieses nichts wissen, bzw. nicht von vornherein bestimmte Annahmen darüber machen dürfen. Abgesehen davon werden wir auch rein formal zur Einführung einer Eigenabsorption gedrängt durch den Umstand, daß das Doppelintegral in Gl. 6 a) ohne eine solche nicht mehr konvergent ist, wenigstens so lange wir die obere Grenze des äußeren Integrals unendlich groß ansetzen. Dies ist natürlich auch physikalisch unmittelbar verständlich; denn die Grenze ∞ bedeutet eine Verbreitung von Strahlungsquellen im ganzen unendlichen Raum und liefert bei endlicher Dichte und Ergiebigkeit der Quellen die Strahlungsintensität unendlich, wenn nicht eine Eigenabsorption der quellenerfüllten Raumteile angesetzt wird.

Bei dieser Sachlage der Dinge erscheint nun eine Diskussion der Gl. 6) — abgesehen von den noch nahezu ungelösten Schwierigkeiten bei der Lösung derartiger Integralgleichungen erster Art — unmöglich; es bleibt bis jetzt in der Tat nichts anderes übrig, als die eben besprochene Unbestimmtheit der Aufgabe zu kompensieren durch irgend welche Zusatzhypothesen. Als solche bieten sich nun von selbst alle Annahmen dar, welche die Verteilung $i(x)$ von vornherein festlegen, und zwar im Anschluß an anderweitig bekannte oder physikalisch gerechtfertigte Verhältnisse. So wird man z. B. die Dichte der kontinuierlichen Verteilung eines gasförmigen Strahlers in der Erdatmosphäre nach dem Daltonschen Gesetz annehmen oder wird in der erfahrungsgemäß bestehenden scharfen Grenze zwischen Stratosphäre und Troposphäre einen Grund für eine Diskontinuität in der Verteilung staubförmiger Strahler erblicken können usw. Eine weitere willkommene Möglichkeit, hypothetische Annahmen bestimmter zu gestalten und zu stützen, wird ferner die Heranziehung anderer dem Problem an sich fremder Daten bieten, wie z. B. die Absorption und die diffuse Zerstreuung des Lichts in den mit strahlender Substanz erfüllten Räumen oder etwa die Festlegung der Größe von in der Atmosphäre suspendierten Substanzteilchen durch die Geschwindigkeit des stationären Herabsinkens derselben usw. Es gelingt in der Tat in solcher Weise die Lösung wesentlich bestimmter zu gestalten, d. h. die Zahl der Möglichkeiten weitgehend einzuschränken.

Eine Möglichkeit in diesem Sinne wäre nun, als Strahlungsquelle ein in der Atmosphäre vorhandenes noch unbekanntes radioaktives Gas anzunehmen. Dieser Fall wurde auch bereits von v. Schweidler und dann ausführlicher von Schrödinger behandelt und gezeigt, daß er zu einer Erklärung des beobachteten Verlaufs der Jonisation nicht herangezogen werden kann. Da mir durch die genannten Untersuchungen diese Frage in der Tat im verneinenden Sinn erledigt zu sein scheint, wollen wir gleich zur Diskussion einer zweiten Möglichkeit übergehen; wir wollen annehmen, daß als Strahlenquelle radioaktive Sub-

stanzen in Betracht kommen, die in sehr großen Höhen lagern. Ohne weitere Hypothesen können wir dies zunächst formal so ausdrücken, daß wir ansetzen

$$\begin{aligned} i(x) &= 0 \qquad H_2 \leq x \leq H_1 \\ i(x) &= i_0 \qquad H_2 > x > H_1, \end{aligned} \tag{7}$$

worin bereits H_1 eine Höhe jenseits der uns bis jetzt erreichbaren ist. Dieser Ansatz umfaßt für $H_2 = \infty$ naturgemäß als speziellen Unterfall zugleich die Annahme eine Erfüllung des Weltraumes oder praktisch hinreichend großer Teile desselben mit strahlender Substanz. Ferner wollen wir annehmen, daß i_0 eine konstante Größe ist, nämlich der Mittelwert der Quellendichte; wie man unschwer einsieht, genügt diese wesentlich vereinfachende Annahme zunächst allen Bedürfnissen. Die Gl. 6a) wird dann also

$$q(\xi) = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{H_2} dx \int_{L(x,\xi)}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} dn. \tag{8}$$

Um diese nun der Diskussion zugänglich zu machen, müssen wir ferner L analytisch darstellen, d. h. wir müssen hinsichtlich des Verlaufs von λ mit der Höhe gewisse Annahmen machen. Es ist wohl als sicher anzunehmen, daß λ außerhalb der mit strahlender Substanz erfüllten Raumteile proportional der Dichte ϱ der Atmosphäre ist. Über den Verlauf dieser sind wir nun namentlich in den hohen Schichten nur sehr unvollkommen unterrichtet[1]); wie man sich rechnerisch jedoch leicht überzeugt, nimmt die genaue Kenntnis der Dichte und der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre mit steigender Höhe praktisch an Bedeutung sehr rasch ab, so daß nur der Dichteabfall in den unteren Schichten von Wichtigkeit ist. Am einfachsten und nächstliegendsten ist es jedenfalls, nach der gewöhnlichen barometrischen Höhenformel

[1]) Man vgl. etwa die Diskussion der hier hereinspielenden Fragen in dem Artikel von Bemporad über die Refraktion des Lichts in der Erdatmosphäre. Winkelmanns Handbuch, Bd. VI, S. 503 ff.

für eine isotherme Atmosphäre zu rechnen, die bei Annahme einer geeigneten Mitteltemperatur eine für das Folgende vollkommen genügende Anschmiegung an die wirklichen Verhältnisse ergibt. Innerhalb der strahlenden Substanz selbst kommt nun zu der Absorption der Atmosphäre noch die Selbstabsorption der strahlenden Substanz, deren Einführung bereits oben begründet wurde. Setzen wir also $\varrho = \varrho_0 \cdot e^{-\alpha x}$ ($\alpha = 1 \cdot 25 \cdot 10^{-6}$) und dementsprechend $\lambda = \lambda_0 \cdot e^{-\alpha x}$ und bezeichnen den Koeffizienten der Selbstabsorption mit λ', so wird

$$L(x, \xi) = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha x}) + \lambda' (x - H_1). \qquad 9\,a)$$

Dieser Ausdruck ist nun zur weiteren Verwendung recht wenig geeignet, er führt zu sehr komplizierten und unübersichtlichen Rechnungen. Wir wollen deshalb zunächst eine erste Näherung benutzen in der Form:

$$L(x, \xi) = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}) + \lambda' (x - H_1), \qquad 9)$$

d. h. wir wollen die Luftabsorption innerhalb der strahlenden Schicht einfach gegenüber der Selbstabsorption vernachlässigen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit zu einer fast mühelosen Behandlung des Problems ohne merkliche Einbuße an Genauigkeit; die Annäherung durch den Ausdruck 9) ist nämlich eine sehr gute, wenn H_1 genügend groß ist. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man die Totalabsorption der Atmosphäre oberhalb H_1, die wir eben vernachlässigt haben, ausrechnet, und die sich zu

$$\frac{\Delta J}{J} = \left(1 - e^{-\frac{\lambda_0}{\alpha} e^{-\alpha H_1}}\right)$$

ergibt. Für $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$ und $\lambda_0 \sim 5 \cdot 10^{-6}$ entsprechend den späteren Resultaten erhält man

H_1 (km)	20	30	40	50	100
$\frac{\Delta J}{J}$	0.27	0.09	0.025	0.008	$< 10^{-4}$

Man sieht nun ohne weiteres, daß unsere Näherung bis zu Höhen $H_1 \sim 30$ km herab eine genügende ist, so daß wir also die folgenden Ausführungen zunächst auf diese Verhältnisse — die strahlende Substanz soll, um dies nochmals zu wiederholen, nicht tiefer als bis zu einer Höhe von etwa 30 km herabreichen — beschränken wollen. Damit umfassen wir jedenfalls einen großen Teil der Möglichkeiten, und zwar, wie ich glaube, gerade diejenigen, welche eine große Wahrscheinlichkeit für sich haben. Der Vollständigkeit halber werden wir jedoch am Schluß dieses Abschnittes auch noch eine Erstreckung bis in geringere Höhen herab behandeln und dafür eine der Gl. 9) analoge Näherung angeben (vgl. S. 21 ff.); vorgreifend sei bemerkt, daß sich dort außerdem der Gültigkeitsbereich der jetzigen Näherung gerade in den wichtigsten Punkten als ein noch beträchtlich unter die 30 km Grenze herabreichende erweisen wird. Zum Schluß ist endlich noch ein Wort zu sagen über den oben benutzten Ansatz des isothermen Dichteabfalls mit der Höhe, soweit dieser nicht von selbst aus der ganzen Sachlage sich rechtfertigt. So könnte man, wie dies z. B. Linke in der oben zitierten Arbeit getan hat, eine der vollständigen barometrischen Höhenformel oder eine empirische Dichteformel anwenden; ich habe deshalb die Rechnungen überschlagsweise durchgeführt unter der Annahme eines linearen vertikalen Temperaturgradienten[1]) von 6° pro km, für den sich $L(x\,\xi)$ ebenfalls in einfacher geschlossener Form darstellen läßt und mich überzeugt, daß sich in Betracht kommende Änderungen der numerischen Werte von q dadurch nicht ergeben.

§ 4. Die beiden Gl. 8) und 9) geben nun zunächst für den einfachsten Fall $H_2 = \infty$ sofort den folgenden Ausdruck für $q(\xi)$, wenn man die Integrationsfolge in der üblichen Weise umkehrt und die Integrale auswertet:

---

[1]) Diesen Ansatz hat Tetens (Jahrbuch des aërolog. Observ. Lindenberg 1911) verwertet; derselbe Ansatz ist benutzt z. B. in der Refraktionstheorie von Schmidt (vgl. Bemporad, loc. cit.).

$$q(\xi) = \frac{\lambda_0 i_0}{2\lambda'} \cdot \Phi(c) \qquad 10)$$

$$c = \frac{\lambda_0}{a}(e^{-a\xi} - e^{-aH_1}), \qquad 11)$$

worin Φ die verschiedentlich tabulierte Transzendente[1]) ist:

$$\Phi(y) = e^{-y} - y\int_y^\infty \frac{e^{-n}}{n}\,dn. \qquad 12)$$

Aus diesem Resultat können wir nun bereits eine Reihe wichtiger Folgerungen ziehen. Da nach allen bisherigen Erfahrungen sowohl i_0 wie λ' proportional der räumlichen Dichte der strahlenden Substanz ist, so folgt, daß $q(\xi)$ unabhängig ist von der Dichte; wir können also die strahlende Substanz im Raum mit beliebiger Dichte verteilen, ohne die beobachteten q Werte zu beeinflussen.

Wenn wir in Gl. 11) das zweite Glied des Arguments weglassen, also die untere Grenze der strahlenden Schicht ebenfalls in sehr große Höhe legen, so erhalten wir, da an sich $H_1 > 30$ km und $\xi < 10$ km anzusetzen ist, nur geringe Änderungen der q Werte. Wie eine numerische Rechnung zeigt, betragen diese selbst gegen die Werte für $H_1 = 30$ km nur 11% (für $\xi = 0$) bzw. 13% (für $\xi = 10$ km) und nehmen mit wachsenden H_1 sehr rasch weiter ab. In Anbetracht der nach § 2 geringen Genauigkeit der bis jetzt zur Verfügung stehenden Beobachtungsresultate ist es also gleichgültig bzw. nicht zu entscheiden, in welcher Höhe die strahlende Schicht (oberhalb 30 km) beginnt.

Nach Gl. 10) enthält nun der Ausdruck für q außer λ_0 noch die Unbekannte λ', deren Größe zunächst wenig interessiert und zudem ganz unbekannt ist, so daß wir sie tunlichst aus der weiteren Diskussion eliminieren müssen; es genügt nun in der Tat, dies in gewissem Umfang zu erreichen. Zunächst können wir lediglich aus der S. 7 postulierten Eigen-

[1]) Tabellen und Literaturnachweise in dem Buch von St. Meyer und v. Schweidler, S. 72, 489.

schaft der q Kurve, nirgends konkav zum Erdboden zu verlaufen, einen unteren Grenzwert für λ_0 abzuleiten. Bilden wir nämlich $\frac{dq}{d\xi}$ und setzen zur Abkürzung

$$\frac{\lambda_0}{\alpha} e^{-\alpha\xi} = z; \quad \frac{\lambda_0}{\alpha} e^{-\alpha H_1} = c_1, \tag{13}$$

so erhalten wir

$$\frac{dq}{d\xi} = \text{konst.}\, z \int_{c_1+z}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}\, dn = \varrho(z). \tag{14}$$

Die Funktion $\varrho(z)$ steigt nun mit wachsendem z rasch zu einem Maximum auf, um dann langsam wieder gegen Null abzusinken; sie ist in Fig. 2 für $c_1 = 0$ ($H_1 = \infty$) und zur Übersicht noch für $c_1 = 0.05$ ($H_1 \sim 35$ km) aufgezeichnet. Nun ist nach der Voraussetzung $\frac{d^2q}{d\xi^2}$ im ganzen Beobachtungsintervall ≥ 0. Bezeichnen wir die Abscisse des Maximums von ϱ mit z_{H_1}, so muß also das ganze Beobachtungsintervall zwischen $z = \frac{\lambda_0}{\alpha}$ und $z = z_H$ liegen, d. h. es muß $z \geq z_H$ sein. Nach Gl. 13) erhalten wir daraus die folgende Ungleichung für λ_0

$$\lambda_0 \geq \alpha \cdot z_H \cdot e^{\alpha\xi_m}, \tag{15}$$

worin ξ_m den größten Wert von ξ im Beobachtungsintervall bedeutet. Nun ist außer für $H_1 = \infty$ die Größe z_H nach Gl. 13) ihrerseits wieder Funktion von λ_0, so daß 15) in Strenge nur für ersteren Fall eine untere Grenze für λ_0 ergibt. In praxi ist jedoch, wie aus der Fig. 2 hervorgeht, der Einfluß dieser Vernachlässigung so gering, daß er nicht in Betracht kommt[1]). Setzen wir nun in 15) die Zahlenwerte $\alpha = 1{,}25 \cdot 10^{-6}$, $z_H = 0{,}45$ und ξ_m entsprechend dem jetzigen Stand der Beobachtungstechnik 10 km $= 10^6$, so erhalten wir

$$\lambda_0 \geq 1{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

[1]) In Strenge läßt sich natürlich die entsprechende analoge Ungleichung direkt aus Gl. 13, 14 gewinnen für den Fall $c_1 \neq 0$ und numerisch relativ einfach lösen.

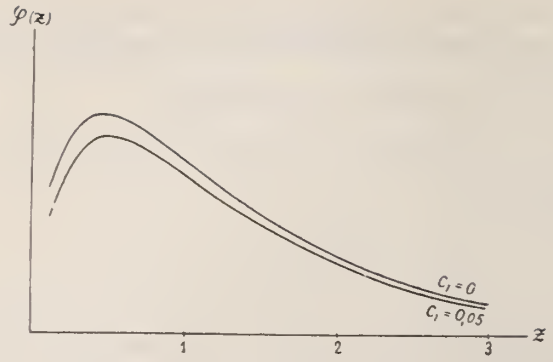


Fig. 2

Durch Vergrößerung des Beobachtungsintervalls würde sich naturgemäß diese Grenze nach größeren Werten verschieben, die Festlegung des wahren Wertes von λ_0 also wie zu erwarten, eine genauere werden. Zur Übersicht darüber, in welchem Maß die Erreichung größerer Beobachtungshöhen hier Vorteile bringen würde, diene die folgende Zusammenstellung:

Größte Höhe ξ_m	10 km	12	15	20
Grenzwert $\lambda_0 \cdot 10^6$	1,7	2,5	4,0	7,3

Um weitere Angaben über λ_0 machen zu können, müssen wir nun allerdings die Eigenschaften der q Kurve etwas spezieller fassen; entsprechend dem in § 2 Gesagten wird es dabei jedoch erwünscht sein, immerhin so wenig wie möglich über dieselbe vorauszusetzen. Ein erster Schritt in dieser Richtung ist nun eine Bestimmung der Größenordnung von λ_0, die sich bereits aus zwei Punkten der q Kurve ergibt. Und zwar bilden wir, um die Unbekannte λ' zu eliminieren, nach Gl. 10) das Verhältnis zweier q Werte, die wir möglichst günstig auszuwählen haben. Um hierbei die Gestalt der q Kurve tunlichst zu eliminieren, werden wir die beiden Punkte möglichst weit auseinander liegend wählen; andererseits ergibt sich aus der ganzen Sachlage, daß es nicht günstig ist, den unteren Punkt allzu nahe am Erdboden zu wählen, da dort die q Werte

nicht nur sehr klein und deshalb relativ unsicher, sondern auch durch die Erdstrahlung beeinflußt sind. Da der letztere Einfluß nach dem bekannten Durchdringungsvermögen der Erdstrahlung ($\lambda_E \sim 5 \cdot 10^{-5}$) in 2 km Höhe praktisch bereits erloschen ist, scheint von den genannten Gesichtspunkten aus die Wahl der Punkte $\xi = 2$ km und $\xi = 9$ km (entsprechend der größten von Kolhörster erreichten Höhe) die günstigste zu sein. Wir setzen demgemäß als Bestimmungsgleichung für λ_0 nach Gl. 10) und 11) an:

$$\frac{q_2}{q_9} = \frac{\Phi\left\{\frac{\lambda_0}{\alpha}\left(e^{-\alpha\xi_2} - e^{-\alpha H_1}\right)\right\}}{\Phi\left\{\frac{\lambda_0}{\alpha}\left(e^{-\alpha\xi_9} - e^{-\alpha H_1}\right)\right\}} \qquad 16)$$

die sich an Hand der für die Transzendente Φ existierenden Tafeln numerisch lösen läßt. Zu bemerken ist, daß die in § 2 besprochene Reduktion hier wegen der Quotientbildung ganz herausfällt und die Größe des dort eingeführten Reduktionsfaktors also keine Rolle spielt; ebenso ist, wie wir bereits sahen, der Einfluß der Größe von H_1 bereits von $H_1 = 30$ km ab kein nennenswerter. Zur Übersicht ist in Fig. 3 die Lösung der Gl. 16) für verschiedene Werte von $\frac{q_2}{q_9}$ und für $H_1 = \infty$ sowie für $H_1 = 30$ km gegeben. Für die von Kolhörster beobachteten Werte ist $\frac{q_9}{q_2} = 12{,}7$, so daß sich also λ_0 zu $5 \cdot 10^{-6}$ ergeben würde. Dies ist, wie nebenbei bemerkt sei, in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem auf Grund recht spezieller Annahmen von Linke erhaltenen Resultat $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ und dürfte die eingangs empfohlene, etwas großzügigere Interpretation des Beobachtungsmaterials rechtfertigen.

Wir hatten nun bisher die Form der beobachteten q Kurve absichtlich weitgehend unbeachtet gelassen und nur gewisse allgemeine Eigenschaften derselben verwendet. Berechnen wir nun zum Schluß den Verlauf von q_ξ nach Gl. 11) und vergleichen ihn mit dem beobachteten Verlauf, so erhalten wir

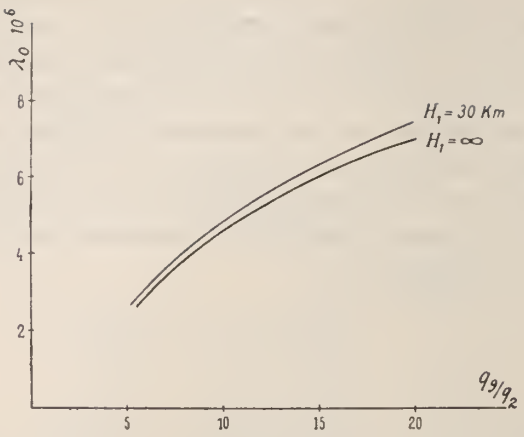

$\lambda_0\ 10^6$
8
6
4
2
$H_1 = 30$ Km
$H_1 = \infty$
g_9/g_2
5
10
15
20

Fig. 3

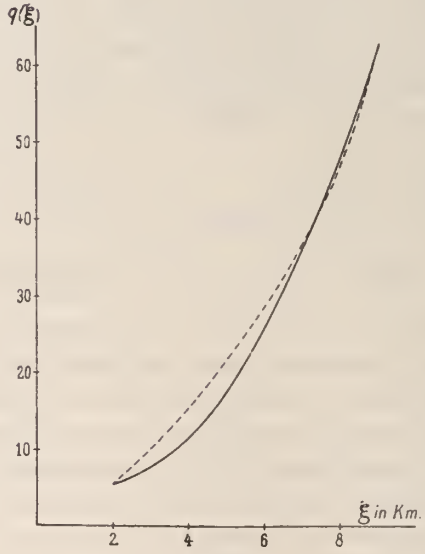

$q(\xi)$
60
50
40
30
20
10
ξ in Km.
2
4
6
8

Fig. 4

das in Fig. 4 gegebene Bild. Die theoretische Kurve ist dabei gezeichnet für $H_1 = \infty$, da bereits für $H_1 = 30$ km die Abweichungen so gering sind, daß sie keine Rolle spielen. Ohne Zweifel ist der Charakter der beiden Kurven durchaus derselbe; quantitativ aber treten immerhin Abweichungen auf, die bereits jenseits der Messungsfehler liegen dürften, so daß immerhin die Diskussion anderer Annahmen über die Verteilung der strahlenden Substanzen lohnend erscheint. Meines Erachtens sind die Abweichungen aber andererseits keineswegs groß genug, um die vorhergehenden Ausführungen — deren Grundlage, nämlich die Erfüllung des Weltraums mit strahlender Substanz, zweifellos sehr viel Sympathisches für sich hat, — von vornherein als zwecklos erscheinen zu lassen (vgl. übrigens S. 21).

Wir wollen deshalb die nächstliegende Erweiterung der bisherigen einfachsten Annahme vornehmen und die strahlende Schicht nun auch nach oben hin begrenzt uns denken. Die Ausgangsgleichungen 8) und 9) geben dann, wenn man nach geeigneter Teilung des Integrationsintervalles wiederum die Integrationsfolge umkehrt, an Stelle von Gl. 11) die folgende Beziehung:

$$q(\xi) = \frac{i_0 \lambda_0}{2 \lambda'} \left\{ \Phi(c) - \Phi(c + \lambda' d) \right\}, \qquad 19)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$d = H_2 - H_1; \qquad c = \frac{\lambda_0}{\alpha} (e^{-\alpha \xi} - e^{-\alpha H_1}). \qquad 20)$$

Der Ausdruck 19) konvergiert mit wachsendem d natürlich gegen den früheren Ausdruck 11). Andererseits erhalten wir für kleines $\lambda' d$ durch eine Entwicklung nach Taylor

$$q(\xi) = \lambda' d \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \frac{\lambda_0 i_0}{2} d \int_c^\infty \frac{e^{-n}}{n} dn. \qquad 21)$$

Es ist dies nun gerade der von Linke loc. cit. benutzte Ansatz, der sich hier also als eine spezielle Form des allgemeinen Ausdrucks ergibt. Der Vorteil von 21) gegen 19) liegt nun in dem Fortfall der unbekannten Größe λ', doch ist dieser

Vorteil natürlich ein nur scheinbarer und hier lediglich dadurch erreicht, daß wir eben die benutzte Reihe mit dem ersten Glied abgebrochen haben. Nimmt man übrigens, wie dies Linke später in der Erwiderung auf einige von Bergwitz[1]) geäußerte Bedenken tut, die Schicht nun doch wieder von endlicher Dicke an, indem man mehrere Schichten von kleiner Dicke übereinander lagert, so kommt λ' auch physikalisch wiederum herein, wenn man nicht die Selbstabsorption überhaupt vernachlässigt.

In Gl. 19) können wir nun wie früher setzen

$$\lambda' d = (\lambda')_{\varrho=1}\, \varrho \cdot d = (\lambda')_{\varrho=1} \cdot \text{Masse} \qquad 22)$$

und erhalten so das allgemeine Resultat, daß q nur abhängt von der in der Schicht verteilten Gesamtmasse, daß es dagegen ganz gleichgültig ist, wie dick die Schicht ist. Wir könnten z. B. deshalb, wenn λ' bekannt wäre, aus unseren Beobachtungen die Gesamtmasse und die untere Grenze der Schicht bestimmen, aber nichts über die Höhenlage der oberen Grenze aussagen; natürlich ist dies Resultat eine Folge unseres Näherungsansatzes 9), wird aber jedenfalls mit großer Annäherung gelten.

Zum Schluß sei noch kurz hingewiesen auf die Möglichkeiten, durch eine Erweiterung des Ansatzes 8) ev. einen engeren Anschluß der theoretischen an die beobachtete q Kurve zu gewinnen; bei der Mannigfaltigkeit der sich bietenden Möglichkeiten und dem heutigen Stand der experimentellen Forschung scheint ein näheres Eingehen mir hier unnötig zu sein und ein allgemeiner Hinweis zu genügen, zumal prinzipielle Schwierigkeiten bei der Durchführung nicht auftreten. Wir könnten einmal i_0 räumlich variabel annehmen und dadurch die q Kurve in weiten Grenzen verbiegen, oder wir könnten die Strahlung inhomogen annehmen und damit an Stelle von 8) den folgenden Ansatz treten lassen:

$$q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\varkappa=1}^{m} i_\varkappa \lambda_\varkappa \int_{H_1}^{H_2} dx \int_{L(x,\xi)}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}\, dn. \qquad 23)$$

[1]) Bergwitz, Met. Zeitschr. 33, S. 310, 1916.

Ein derartiger Ansatz wird durch die Erfahrungen an radioaktiven Substanzen jedenfalls plausibel gemacht und erlaubt natürlich eine beliebig genaue Darstellung der Beobachtungen; zu bemerken ist, daß die Zahl der verfügbaren Konstanten $\lambda_\varkappa$ und $\lambda'_\varkappa$ nicht gleich $2m$, sondern wegen der Beziehungen $\frac{\lambda_{\varkappa_1}}{\lambda'_{\varkappa_1}} = \frac{\lambda_{\varkappa_2}}{\lambda'_{\varkappa_2}}$, die man wohl als gültig wird ansehen müssen, nur gleich $(1 + m)$ ist. Eine Durchrechnung spezieller Beispiele erübrigt sich mangels jedes Anhaltes über die Größe der $\lambda_\varkappa$ umsomehr, als die Größenordnung für das $\lambda_\varkappa$ der durchdringendsten, also gerade der physikalisch interessantesten Strahlen, durch einen Ansatz der Form 23) nur nach höheren Werten verschoben werden kann.

Wir müssen nun noch auf die bereits S. 13 angekündigte Erweiterung unserer Ansätze für die Fälle eingehen, in denen die Brauchbarkeit der bisher benutzten nicht mehr genügt oder wenigstens nicht unmittelbar einzusehen ist. Solche Fälle liegen, wie wir sahen, vor, wenn die strahlende Substanz wesentlich unter eine Höhe von 30 km herabreicht, und diese Annahme ist nun jedenfalls nicht a priori von der Hand zu weisen und wird physikalisch sogar recht plausibel, wenn man nach Linke die Grenze zwischen Tropo- und Stratosphäre in gewissem Sinn als eine hydrodynamische Diskontinuitätsfläche in der Atmosphäre ansieht[1]), und die untere Grenze der strahlenden Substanz ebenfalls in sie verlegt.

Die bisher benutzte Näherung bestand nun physikalisch darin, daß wir oberhalb 30 km die Luftabsorption überhaupt vernachlässigt und die Eigenabsorption der strahlenden Substanz allein berücksichtigt, unterhalb dieses Niveaus bzw. von der unteren Grenze der substanzerfüllten Schichten ab die Luftabsorption entsprechend der isothermen Dichteverteilung in Rechnung gezogen haben. Anschließend an diesen das Problem

[1]) Vgl. die diesbezüglichen Ausführungen von Wegener, Meteor. Zeitschr. 29, S. 49, 1912. Die genannte Hypothese wurde übrigens bereits von Wigand im Jahre 1914 ausgesprochen. Vgl. Wigand, Phys. ZS. 18, S. 1, 1917, wo sich verschiedene andere wichtige Bemerkungen finden.

namentlich in mathematischer Beziehung wesentlich vereinfachenden Ansatz wollen wir nun für den Fall, daß die untere Schichtgrenze $H_1 < 30$ km ist, für alle $H > 30$ km wie bisher die Luftabsorption ignorieren und nur die Eigenabsorption berücksichtigen, für $H_1 < H < 30$ km die Luftabsorption nun aber auch innerhalb der strahlenden Substanz und zwar in der Weise berücksichtigen, daß wir dort mit einer mittleren homogenen Absorption rechnen, entsprechend der mittleren isothermen Luftdichte zwischen H_1 und 30 km. Dadurch erreichen wir einen recht guten Anschluß an die wirklichen Verhältnisse, ohne die mathematische Behandlung zu komplizieren; allerdings tritt dabei gerade die Höhe $H = 30$ km willkürlich als Grenzniveau der Absorption und der Mittelwertsbildung auf, sie kann aber natürlich ohne prinzipielle Änderung durch eine andere ersetzt werden und außerdem dürfe ihre Wahl durch die S. 12 durchgeführte Überschlagsrechnung auch sachlich in gewissem Grad gerechtfertigt sein. Erstreckt sich die strahlende Schicht von H_1 bis H_2 ($d = H_2 - H_1$), so ist für $H_2 < 30$ km

$$\left.\begin{aligned} L(x, \xi) &= \frac{\lambda_0}{\alpha}\,(e^{-\alpha\xi} - e^{-\alpha H_1}) + \lambda\,(x - H_1) \\ \lambda &= \frac{\lambda_0}{\alpha}\,\frac{e^{-\alpha H_1}(1 - e^{-\alpha d})}{d} \end{aligned}\right\} \qquad 9'\,\text{a})$$

wobei hier wie im folgenden die Eigenabsorption der unterhalb 30 km liegenden relativ dünnen Schichten gegen die Luftabsorption vernachlässigt ist; für die oberhalb 30 km gelegenen Schichten dagegen ist, wie dies in den folgenden Formeln zum Ausdruck kommt, die Eigenabsorption nach wie vor berücksichtigt, da sich diese im Grenzfall bis $H_2 = \infty$ erstrecken können und die Luftabsorption rasch mit der Höhe auf sehr kleine Werte abnimmt. Es hat übrigens gar keine Schwierigkeiten, die vollständigen Formeln hinzuschreiben.

Ist $H_2 > 30$ km, so erhalten wir die Jonisation $q(\xi)$ durch Zerteilung der Schicht in zwei Teile, deren einer von H_1 bis 30 km reicht und in der eben besprochenen Weise behandelt

wird, deren anderer von 30 km bis H_2 reicht und wie früher zu behandeln ist. Wir erhalten dann aus Gl. 8) und 9a) die der Formel 19) entsprechenden Ausdrücke[1])

$$\left.\begin{aligned}
H_2 < 30\text{ km}\quad q(\xi) &= \frac{i_0\lambda_0}{2\lambda}\{\Phi(c) - \Phi(c+\lambda d)\}\\
\bar{\lambda} &= \frac{\lambda_0}{a}\,\frac{e^{-aH_1}(1-e^{-ad})}{d}\\
H_2 > 30\text{ km}\quad q(\xi) &= \frac{i_0\lambda_0}{2\lambda'}\{\Phi(c_1) - \Phi(c_1+\lambda'(H_2-30))\}\\
&\quad + \frac{i_0\lambda_0}{2\lambda}\{\Phi(c) - \Phi(c+\lambda(30-H_1))\}\\
\lambda &= \frac{\lambda_0}{a}\,\frac{e^{-aH_1}(\lambda - e^{-a(30-H_1)})}{30-H_1}\\
c &= \frac{\lambda_0}{a}(e^{-a\xi} - e^{-aH_1})\\
c_1 &= \frac{\lambda_0}{a}(e^{-a\xi} - e^{-a30})
\end{aligned}\right\}\quad 19\text{a})$$

Für $H_2 = 30$ km werden wegen $d = 30 - H_1$, wie dies sein muß, beide Ausdrücke identisch. Vergleichen wir nun 19a) mit 19), so erkennen wir ohne weiteres, in welcher Richtung nun eine Modifikation eingetreten ist, und wir übersehen auch, wie die bisher auf Grund von 19) abgeleiteten allgemeinen Folgerungen umzuschreiben sind, bzw. in welchem Umfange sie noch gelten. Die Verhältnisse liegen so einfach, daß ein näheres Eingehen hierauf sich wohl erübrigt; bemerkt sei nur, daß maßgebend dabei in erster Linie der Umstand ist, daß nun λ nicht mehr proportional der Dichte der strahlenden Substanz ist.

Was die quantitativen[2]) Folgerungen aus den neuen Formeln anlangt, so ist zweierlei zu bemerken. Zunächst ist von

---

[1]) Zur Abkürzung ist die Bezeichnung 30 eingeführt für 30 km; da alles im C. G. S-System gilt, ist natürlich $H_2 - 30$ usw. in cm zu messen.

[2]) Für kleine Änderungen des Arguments ist zur numerischen Rechnung benutzt $\Phi(c) - \Phi(c + \Delta c) = -Ei(-c)$.

Wichtigkeit der Wert von $q(0)$, den wir später zur Bestimmung der Aktivität i_0 benutzen werden; für $\lambda' = 0$ können wir die Formeln 19) und 19a) numerisch direkt miteinander vergleichen und finden, daß eine Änderung der Größenordnung für die praktisch überhaupt in Betracht kommenden Werte von $H_1 > 15$ km nicht eintritt; $q(0)$ nach der neuen Formel berechnet sich im ungünstigsten Fall ($H_1 = 15$ km) nur etwa 20% kleiner als der nach der alten Formel berechnete Wert, so daß wir also unbedenklich stets unsere erste Näherung benutzen können. Bedenklicher ist allerdings deren Anwendung zur Berechnung von λ_0 aus dem Verhältnis zweier q Werte, wie man dies bereits aus der physikalischen Anschauung einsieht. Für $\lambda' = 0$ — eine Annahme, die für geringe Schichtdicken wohl erlaubt ist — hat nun Linke die Rechnungen in allerdings speziellerer Anlage durchgeführt und für λ_0 den Wert $4{,}6 \cdot 10^{-6}$ gefunden, der, wie bereits früher bemerkt, mit dem hier stets zu Grunde gelegten Wert $5 \cdot 10^{-6}$ bemerkenswert gut übereinstimmt; zugleich hat er den Verlauf der q Kurve berechnet, so daß der Anschluß an unsere Formeln durchwegs hergestellt ist und ein weiteres Eingehen auf die an sich einfache Diskussion der Gl. 19a) sich erübrigen dürfte; zu bemerken ist nur noch für die Rechnung, daß die naheliegende Vereinfachung dieser Gleichungen durch die bekannten Reihenentwicklungen für die Funktion Φ (d. h. für die darin eingehende Funktion Ei) praktisch keine Vorteile gewährt. Von Interesse ist vielleicht ferner in diesem Zusammenhang eine Bemerkung über die Eigenabsorption der strahlenden Substanz, wenn wir uns dieselbe in Form dünn verteilten Staubes ausgebreitet denken. Man findet, wenn ϱ der Radius der kugelförmigen Staubkörnchen, N deren Anzahl in der Volumeinheit und λ'' der Absorptionskoeffizient der kompakten Substanz ist, für kleines ϱ durch eine kurze Rechnung $\lambda' = \frac{4}{3} \varrho^3 \pi N \cdot \lambda''$ in Übereinstimmung damit, daß es sich hier um ein Volumeffekt handelt, während für die Absorption von Licht der Querschnitt maßgebend ist; vgl. S. 42). Aus dem Auftreten der dritten Potenz des Radius können wir schließen, daß λ' jedenfalls klein

ist gegenüber λ'', so daß für nicht zu große Schichten die vorgenommene Vernachlässigung der Eigenabsorption jedenfalls gerechtfertigt ist.

Auf eine Anwendung der Gl. 19a) sei jedoch noch hingewiesen, die von praktischem Interesse ist, nämlich auf die Berechnung der Abhängigkeit der Strahlungsintensität speziell von der unteren Schichtgrenze H_1. Während nach den früheren Formeln (für $H_1 > 30$ km) die Intensität in den uns zugänglichen Höhen praktisch unabhängig ist von H_1, ergibt sich nun, daß q von H_1 abhängt. Dies kann dazu benutzt werden, um eine eventuelle zeitliche Schwankung von q zu deuten durch ein zeitliches Auf- und Absteigen der unteren Begrenzung; man könnte jedenfalls daran denken, namentlich langperiodische, etwa jährliche Schwankungen von q in dieser Weise zu erklären, wenn man dem hübschen, bereits mehrfach erwähnten Gedanken Linkes folgend, die untere Begrenzung der strahlenden Substanz in Zusammenhang bringt mit der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre oder die Konsequenzen der weiter unten besprochenen möglichen Zusammenhänge mit dem Eindringen korpuskularer Strahlen in die Erdatmosphäre weiter ausspinnen will. Nach den Ergebnissen einer soeben erschienenen Arbeit von Heß und Kofler[1]) über Strahlungsmessungen auf dem Obirgipfel scheinen nun allerdings nennenswerte Schwankungen der von oben kommenden harten Strahlungskomponente nicht vorhanden zu sein, so daß man die Frage gerade umgekehrt stellen müßte, nämlich: Inwieweit muß cet. par. die Höhe der unteren Grenze der quellenerfüllten Räume konstant sein, damit die beobachtete Konstanz der Intensität gewährleistet wird. Aufschluß darüber gibt das Resultat der zur Orientierung für einige Werte durchgeführten numerischen Rechnungen nach den Gl. 19a), das in Fig. 5 dargestellt ist. Als Ordinate ist die Jonisation $q(0)$ am Erdboden aufgetragen, als Abscisse die Höhe H_1 der unteren Grenze. Erstreckt sich die strahlende Substanz in sehr große Höhen,

[1]) V. Heß und M. Kofler, Phys. Zeitschr. 18, S. 585, 1917.

so überwiegt die von den über $H = 30$ km liegenden Raumteilen stammende Strahlung mit abnehmender Eigenabsorption λ' mehr und mehr, und die prozentuelle Schwankung von q wird demgemäß rasch kleiner; für kleine Werte von H_2 dagegen kommt es der geringen dann in Betracht kommenden Schichtdicken wegen praktisch überhaupt nicht auf die Größe von λ' an, vorausgesetzt natürlich, daß λ' an sich klein ist gegen λ_0 (bzw. λ), wie wir das von vornherein angenommen haben.

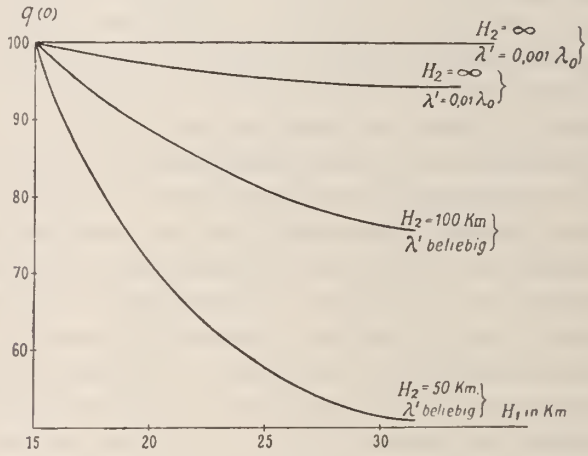


Fig. 5

§ 5. In drei Punkten sind nun aber die vorhergehenden Überlegungen einer Erweiterung fähig, ohne daß wir den Boden gesicherter Grundlagen verlassen müßten. Die erste Erweiterung betrifft die Untersuchung des Einflusses der Erdkrümmung, die zweite handelt von der Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Incidenzwinkel gegen die Vertikale und gibt immerhin Resultate, die einer experimentellen Nachprüfung zugänglich sind und so weitere Aussagen über die Natur der durchdringenden Strahlung ermöglichen würden, und die dritte endlich soll sich mit der Grundgleichung 5) unserer bisherigen Rechnungen beschäftigen und ein neues Moment in der Streuung der Strahlen durch die Erdatmosphäre aufweisen.

Bisher hatten wir stets angenommen, daß die Erdoberfläche eben ist, und daß dementsprechend die Intensität i_0 der hypothetischen Strahlenquellen nur Funktion der vertikalen Erhebung x ist; für Erhebungen, die klein sind gegen den Erdradius, gilt dies sicher mit hinreichender Annäherung, bedarf jedoch der genaueren Untersuchung für Höhen, die mit dem Erdradius vergleichbar werden. Um uns hierüber ein Urteil zu verschaffen, betrachten wir das folgende einfache Beispiel, das sich ohne Mühe behandeln läßt, während die Durchrechnung des allgemeinen Falles wegen des in $L(x, \xi)$ auftretenden Linienintegrals längs des Radius vectors unverhältnismäßig kompliziert wird. Wir betrachten eine Kugel vom Radius R_0, die von einer homogenen strahlenden Substanz von der Höhe H_1 ab umgeben ist, und zwar soll diese strahlende Substanz eingelagert sein in einer Atmosphäre vom Absorptionsindex λ_0. Dann erhält man (Fig. 6) für die Jonisationen in einem Punkt auf der Kugeloberfläche

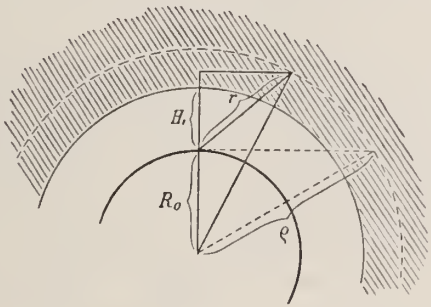


Fig. 6

$$q_\varkappa = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1 + R_0}^{\infty} \frac{\varrho}{R_0} \, d\varrho \int_{\lambda_0 H_1}^{\lambda_0 H_1 \sqrt{\varrho^2 - R_0^2}} \frac{e^{-n}}{n} \, dn, \qquad 23)$$

wofür man schreiben kann:

$$q_\varkappa = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \left(1 + \frac{x}{R_0}\right) \left\{ Ei(-\lambda_0 x) - Ei\left(-\lambda_0 x \sqrt{1 + \frac{2 R_0}{x}}\right) \right\} \quad 24\,a)$$

während für die Ebene sich die analoge Beziehung ergibt

$$q_e = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \cdot Ei(-\lambda_0 x). \qquad 24\,b)$$

Die Integrationen lassen sich wie früher ausführen; bezeichnen wir die Konstante $\lambda_0 R_0$ mit $\varkappa$ und das Verhältnis $\frac{H_1}{R_0}$ mit Σ, so erhalten wir

$$q_\varkappa = \left(1 + \frac{\Sigma}{2}\right) \Phi(\varkappa \Sigma) - \frac{\sqrt{\Sigma^2 + 2\Sigma}}{2} \Phi(\varkappa \sqrt{\Sigma^2 + 2\Sigma}) + \frac{1}{2\varkappa} (\varrho^{-\varkappa\Sigma} - \varrho^{-\varkappa\sqrt{\Sigma^2+2\Sigma}}) \qquad 25\,a)$$

während für die Ebene aus 24 b) die entsprechende Formel folgt

$$q_e = \Phi(\varkappa \Sigma). \qquad 25\,b)$$

Das Verhältnis $Q = (q_e - q_\varkappa)/q_\varkappa$ läßt sich aus diesen beiden Gleichungen sofort berechnen. Für große Werte von Σ konvergiert zwar Q gegen $\Sigma(1 - \frac{1}{2}\varrho^{-\varkappa})$, ist aber für kleine Σ, wie sie für uns in Betracht kommen, stets recht klein. So ergibt sich z. B. für $\varkappa = 3 \cdot 10^3$ (entsprechend $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6}$) der Wert $Q = 0{,}1$ für $\Sigma = 0{,}1$ (d. h. für $H_1 = 600$ km) und für $\varkappa = 0{,}3$ der Wert $Q = 0{,}05$ für dieselbe Höhe, wobei natürlich Q mit abnehmenden Σ gegen Null konvergiert. Durch geeignete Reihenentwicklungen nach positiven bzw. negativen Potenzen[1]) von $\varkappa \cdot \Sigma$ lassen sich die Werte von Q sehr einfach berechnen. Wir können als Ergebnis jedenfalls verzeichnen, daß die Korrektion infolge der Erdkrümmung für unsere Zwecke stets zu vernachlässigen ist.

Wir gehen nun dazu über, eine Eigenschaft der durchdringenden Strahlung zu studieren, die zwar bisher noch nicht experimentell untersucht wurde, deren empirische Verfolgung aber durchaus im Bereich des Möglichen liegt und eine erwünschte Ergänzung des Beobachtungsmaterials bringen dürfte. Es ist das die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von dem

[1]) Jahnke und Emde, Funktionentafeln S. 19.

Incidenzwinkel gegen die Vertikale, aus der sich, wie wir sehen werden, eine Möglichkeit zur Bestimmung von λ_0 ergibt; der Vorteil dieser Methode würde in erster Linie darin zu suchen sein, daß die erforderlichen Messungen sich in einem einzigen festen Höhenniveau ausführen lassen, eine Erhebung in große Höhen überhaupt entbehrlich machen und dadurch auch eine viel weiter gehende Elimination eventueller zeitlicher Schwankungen der Intensität ermöglichen.

Nehmen wir wie früher an, daß in der absorbierenden Atmosphäre von isothermer Dichteverteilung die strahlende und absorbierende Substanz homogen verteilt ist, und zwar in der Höhe H_1 beginnend und bis ins Unendliche reichend. Die Jonisation durch die Strahlen, welche in einem mit dem Öffnungswinkel φ um die Vertikale gelegten Kegel einfallen, finden wir dann analog zu der früheren Formel 6 a)

$$q_\varphi = \frac{i_0 \lambda_0}{2} \int_{H_1}^{\infty} dx \int_{L(x)}^{L(x)/\cos\varphi} \frac{e^{-n}}{n} dn, \qquad 26)$$

wenn wir zur formalen Vereinfachung etwa $\xi = 0$ setzen. Wie früher läßt sich durch geeignete Transformation der Variablen, Spaltung des inneren Integrals und Umkehr der Integrationsfolgen das Integral auswerten und ergibt den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} q_\varphi &= \frac{i_0 \lambda_0}{2 \lambda'} \{\Phi(c) - \Phi(c/\cos\varphi) \cdot \cos\varphi\} \\ \text{mit} \quad c &= \frac{\lambda_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha H_1}) \end{aligned}\right| \qquad 27)$$

der für φ gleich 90° in den Wert 11) von früher übergeht. Aus 27) können wir nun leicht eine entsprechende Beziehung ableiten, die für die praktische Verwendung brauchbarer ist. Man wird nämlich nicht so verfahren, daß man den Öffnungswinkel des zur Wirkung kommenden Strahlenbündels sukzessive verändert, sondern man wird ein und dasselbe Jonisationsgefäß, welches durch geeignete Blenden nur ein begrenztes Strahlenbündel einläßt, gegen verschiedene Teile des Himmels

richten. Läßt das Jonisationsgefäß nur Strahlen zur Wirkung kommen, die in einem Kegel mit der Öffnung ψ einfallen, und neigt man die Achse dieses Kegels um den Winkel φ gegen die Vertikale, so ist (Fig. 7)

$$q_\varphi = q_{\psi,\varphi} \cdot \frac{\text{Fläche } f}{\text{Fläche des Kreisringes}} \qquad 28)$$

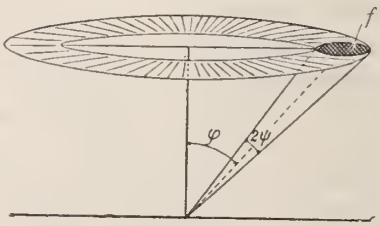


Fig. 7

worin q_φ die beobachtete Jonisation und $q_{\psi\varphi}$ die Jonisation in dem ganzen Raum zwischen den beiden Vollkegeln mit der Öffnung φ und $\varphi + \psi$ ist. Das Verhältnis der beiden Flächen läßt sich durch eine einfache, elementar geometrische Betrachtung durch φ und ψ ausdrücken, $q_{\varphi\psi}$ ergibt sich aus 27) unmittelbar durch die Differenzbildung $q_{\varphi+\psi} - q_\varphi$, so daß also 28) q_φ als Funktion des Neigungswinkels φ und der „Apparatkonstante“ ψ gibt. Die Endformel ist allerdings ziemlich kompliziert, und wir wollen uns deshalb hier mit der Diskussion des einfacheren Falles begnügen, daß die Öffnung ψ sehr klein ist, d. h. daß unser Apparat wie ein Fernrohr nur die aus einer bestimmten Richtung kommenden Strahlen aufnimmt. Mit Übergehung der einfachen Zwischenbetrachtungen erhalten wir dann für die in der Richtung φ einfallenden Strahlen:

$$q_\varphi \text{ proportional } e^{-c/\cos\varphi}.$$

Um die Reduktion auf gleiche Maximalwerte für $\cos\varphi = 1$ zu vermeiden, bilden wir gleich

$$\varkappa(\varphi) = e^{-c/\cos\varphi} / e^{-c} = e^{-c\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}} \qquad 29)$$

das für verschiedene Werte von c in der Fig. 8 aufgetragen ist. Man sieht, daß $\varkappa(\varphi)$ in einem für die Messung aussichtsreichen Maß von c abhängt, und zur numerischen Bestimmung dieser Größe dienen kann. Nun ist nach Gl. 27 $c = \frac{\lambda_0}{a}(1 - e^{-aH_1})$. Setzen wir für a den Wert $1{,}25 \cdot 10^{-6}$, für H_1 die Größenordnungen $10 - 10^3$ in Kilometern und für λ_0 entsprechend den früheren Resultaten Werte von der Größenordnung $10^{-5} - 10^{-6}$, so erhalten wir für c die folgenden Werte:

$\lambda_0 \cdot 10^{-6}$	H_1	30	50	100	500	1000
2		1,57	1,60	1,60	1,60	1,60
4		3,14	3,20	3,20	3,20	3,20
6		4,71	4,80	4,80	4,80	4,80
8		6,28	6,40	6,40	6,40	6,40
10		7,85	8,00	8,00	8,00	8,00

In Verbindung mit der aus der Fig. 8 sich ergebenden Abhängigkeit des $\varkappa(\varphi)$ vom Parameter c können wir also schließen, daß der hier untersuchte Richtungseffekt sehr unempfindlich ist gegen den Wert von H_1, wenigstens innerhalb der hier in Betracht kommenden Höhenlagen, daß er dagegen hinsichtlich des Wertes von λ_0 empfindlich genug ist, um eine experimentelle Bestimmung desselben auf diesem Wege aussichtsreich erscheinen zu lassen.

§ 6. Namentlich durch die zuletzt durchgeführten Betrachtungen über die Richtung der durchdringenden Strahlung werden wir nun von selbst darauf geführt, die Grundlagen aller unserer bisherigen Überlegungen in einem wesentlichen Punkt zu verallgemeinern. Wir haben, wie das in dem grundsätzlichen Ansatz 3) bzw. 5) zum Ausdruck kommt, angenommen, daß die von einem strahlenden Volumelement ausgehende Strahlung sich geradlinig in der Atmosphäre fortpflanzt und dabei durch Absorption geschwächt wird; es sollte also räumliche Ausbreitung nach dem quadratischen Gesetz und Absorp-

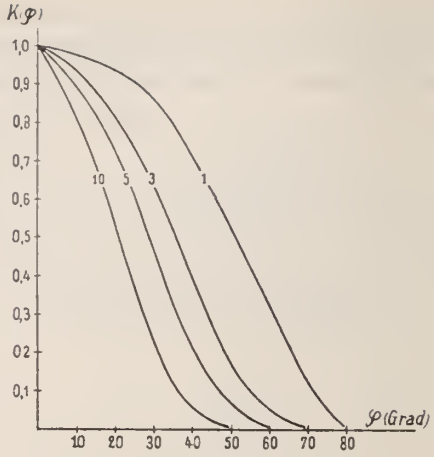


Fig. 8

tion nach dem Exponentialgesetz stattfinden. Nun liegt es nahe, diesen Ansatz zu vervollständigen durch die Annahme, daß die Strahlung beim Durchgang durch die Erdatmosphäre nicht nur absorbiert, sondern auch gestreut werde, d. h. daß ein Teil der in ein Volumelement einfließenden Energie in diesem jonisiert und für den weiteren Energiefluß verloren geht, daß aber ein anderer Teil das Volumelement in Form von Strahlung wieder verläßt, jedoch nicht nur gerichtet in Richtung der einfallenden Strahlen, sondern zerstreut nach allen Richtungen; der zerstreute Anteil wird seinerseits in andere Volumelemente eindringen und dort wiederum teils absorbiert, teils zerstreut werden usw. Leider bietet diese allgemeinste Exposition der Diskussion unüberwindliche Schwierigkeiten; teils liegen diese auf rein analytischem Gebiet — man kommt auf sehr komplizierte Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen, die sich, so viel ich sehe, nur numerisch lösen lassen — teils aber darin, daß wir über die Natur der primären Strahlen, insbesondere über allenfallsige Transformationen derselben bei der Streuung, gar nichts wissen und auch kaum einen Anhalt aus den Erfahrungen an bekannten γ Strahlungen

gewinnen können. Nehmen wir an, daß Streuung ohne Veränderung der Härte stattfindet, so lassen sich alle hier interessierenden Fragen jedoch recht einfach lösen, wenn wir die verschiedenen Richtungen sowohl in der absorbierten wie in der gestreuten Strahlung als gleichwertig betrachten, d. h. mit einem mittleren Absorptions- und Streuungskoeffizienten rechnen, die wir für die aufsteigende und für die absteigende Strahlung als gleich groß ansetzen. Ist die Intensität der absteigenden Strahlung i_1, die der aufsteigenden i_2 und sind der Absorptionskoeffizient und der Streuungskoeffizient für Luft von Atmosphärendruck λ_0 und r_0, so werden die Differentialgleichungen die folgenden:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{d\xi} &= \lambda_0 i_1 + \frac{r_0}{2} i_1 - \frac{r_0}{2} i_2 \\ \frac{di_2}{d\xi} &= -\lambda_0 i_2 - \frac{r_0}{2} i_2 + \frac{r_0}{2} i_1, \end{aligned} \qquad 30)$$

worin ξ eine neue Variable ist, die mit der Höhe x über dem Erdboden in folgender Weise zusammenhängt und gleich so gewählt ist, daß für $x = 0$ auch $\xi = 0$ ist:

$$\xi = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}). \qquad 31)$$

Die Grenzbedingungen sind, daß für $x = 0$ ($\xi = 0$) die aufsteigende Strahlung i_2 verschwindet, und daß für eine vorgegebene Höhe $x = x_0$ ($\xi = \xi_0$) die absteigende Strahlung i_1 einen vorgegebenen Wert i_0 hat.

$$\begin{aligned} (x = 0) \quad \xi &= 0 \qquad & i_2 &= 0 \\ (x = x_0) \quad \xi &= \xi_0 \qquad & i_1 &= i_0 \end{aligned} \qquad 32)$$

Nach den im vorhergehenden gesammelten Erfahrungen können wir — und damit gehen wir zugleich den dunklen Fragen über die Konstitution der höchsten Atmosphärenschichten aus dem Wege — mit vollständig hinreichender Annäherung $x_0 = 30$ km setzen ($\xi_0 = 0{,}78 \cdot 10^6$).

Die Integrale von 30), welche den Bedingungen 32) genügen, lassen sich nun verhältnismäßig einfach hinschreiben.

Im folgenden werden wir nur $i_1 + i_2$ und $\frac{i_1}{i_2}$ benutzen und finden dafür mit den für die weitere Diskussion bequemen Abkürzungen

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_0}{\lambda_0}}} \qquad m = \lambda_0 \sqrt{1 + \frac{r_0}{\lambda_0}} \tag{33}$$

die Ausdrücke

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= 2\, i_0 \frac{(1+\delta)\, e^{m\xi} - (1-\delta)\, e^{-m\xi}}{(1+\delta)^2\, e^{m\xi_0} - (1-\delta)^2\, e^{-m\xi_0}} \\ \frac{i_1}{i_2} &= \frac{1}{1-\delta^2} \frac{(1+\delta)^2\, e^{m\xi} - (1-\delta)^2\, e^{-m\xi}}{e^{m\xi_0} - e^{-m\xi_0}} \end{aligned} \tag{34}$$

Zunächst ist zur Beurteilung der Intensität von Wichtigkeit, wie die Schwächung der Strahlung in der Atmosphäre durch die Streuung beeinflußt wird; für verschiedene Werte von $\frac{r_0}{\lambda_0}$ gibt darüber mit $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-6}$[1]) die folgende Tabelle Aufschluß, welche die Strahlung am Erdboden im Verhältnis zu der in 30 km Höhe einfallenden Strahlung angibt; zur besseren Übersicht sind in Klammern dieselben Werte ausgedrückt in Prozenten derjenigen Strahlung, welche cet. par. jedoch ohne Streuung am Erdboden ankommen würden.

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1
$\frac{(i_1 + i_2)_{\xi=0}}{i_0}$	0,020 (100)	0,020 (100)	0,016 (80)	0,008 (40)	0,004 (20)

Von Interesse ist ferner das Intensitätsverhältnis der aufsteigenden und der absteigenden Strahlung, da man aus demselben die Chancen für eine experimentelle Bestimmung des Streuungskoeffizienten (durch Abschirmung der einen Kompo-

[1]) In Hinblick auf die benutzte Mittelwertsbildung würde in Strenge ein etwas größerer Wert von λ_0 zu verwenden sein; für die folgenden Überschlagsrechnungen genügt es aber, direkt den früher erhaltenen Wert zu verwenden.

nente) entnehmen kann. Für verschiedene Höhen des Beobachtungsortes ergibt die numerische Rechnung die folgenden Werte von $\frac{i_2}{i_1}$ = Intensität der aufsteigenden Strahlung: Intensität der absteigenden Strahlung. Die in Klammern beigefügten Zahlen geben die aufsteigende Stahlung i_2 in Prozenten der Gesamtstrahlung $(i_1 + i_2)$

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-1}	1
$H = 10$ km	0	0,026	0,171
	(0)	(2)	(15)
$H = 1$ km	0	0,016	0,135
	(0)	(1,5)	(12)

Endlich sei zur Ergänzung der früheren Betrachtungen noch der Einfluß der Streuung auf die Größe des (scheinbaren) Absorptionskoeffizienten untersucht, den man unter der Annahme von reiner Absorption ohne Streuung aus den Beobachtungen in zwei Höhen entnehmen würde. Es ist klar, daß das Vorhandensein von Streuung einen zu großen Absorptionskoeffizient vortäuschen würde; um über die Größe des so entstehenden Fehlers zu orientieren, gibt die folgende Tabelle das Verhältnis der Gesamtstrahlungen in den Höhen 2 km und 9 km (vgl. S. 17, 18) und zwar in Klammern wiederum diese Werte prozentual bezogen auf den Fall der reinen Absorption ohne Streuung[1]).

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	0	10^{-1}	1
$\frac{(i_1 + i_2)_2}{(i_1 + i_2)_9}$	0,163	0,143	0,072
	(100)	(88)	(44)

[1]) Nach Abschluß dieser Überlegungen finde ich eine Arbeit von Schwarzschild, Berl. Ber. 1914, S. 1183, in welcher ähnliche Fragen behandelt sind. Uns interessiert hier besonders, daß Schwarzschild auf eine Untersuchung von Schuster, Astrophys. Jour. 21, 1905 hinweist, in welcher gerade die von uns benutzte Näherung verwendet ist und daß diese Näherung nach Schwarzschild in der Tat eine recht gute ist.

§ 7. Bisher hatten wir uns nur mit dem funktionellen Verlauf der Jonisationskurve beschäftigt und daraus Folgerungen namentlich über die Größe des Absorptionskoeffizienten abzuleiten versucht. Wir wollen nun dazu übergehen, die zweite der in unsere Formeln eingehenden Konstanten, nämlich die Aktivität i_0 zu untersuchen. Eine genaue quantitative Bestimmung von i_0 ist — teils wegen der in den bisherigen Betrachtungen bereits hervorgetretenen Unbestimmtheiten der Theorie, teils wohl auch wegen der Unsicherheit der gemessenen Jonisationswerte selbst — nicht möglich. Dagegen lassen sich Angaben über die Größenordnung von i_0 immerhin machen und zu einer Reihe von interessanten Folgerungen verwerten. Eine erwünschte Ergänzung dieser aus den von uns bisher allein benutzten elektrischen Daten zu ziehenden Schlüssen werden wir ferner von ganz anderer Seite her gewinnen, nämlich aus der Theorie der Beleuchtung kosmischer Staubmassen.

Wir gehen aus von der Beziehung 19), die für $\xi = 0$ (wir könnten ebenso gut, und wie ausdrücklich bemerkt sei, ohne andere quantitative Ergebnisse zu erhalten, diese Beschränkung nicht machen) die Form hat:

$$q(0) = \frac{\lambda_0 i_0}{2\lambda'} \{\Phi(c) - \Phi(c + \lambda' a)\}$$
$$c = \frac{\lambda_0}{a}(1 - e^{-a H_1}), \qquad 35)$$

worin wir nun für λ_0 die Größenordnung $5 \cdot 10^{-6}$ bereits kennen. Um aus dem bekannten Wert von $q(0)$, der von der Größenordnung 1 anzusetzen ist, i_0 zu bestimmen, müßten wir nun die uns leider gänzlich unbekannte Größe λ' kennen, so daß wir uns nach einem Ausweg umsehen müssen, welcher die Kenntnis von λ' unnötig macht. Betrachten wir zunächst den einfacheren Fall, daß d sehr groß ist (genauer, daß $\lambda' d$ groß ist) und der z. B. realisiert ist für den Fall der Erfüllung des Weltraums mit Strahlenquellen, so wird $\Phi(c + \lambda' d) = 0$ und wir erhalten:

$$\frac{i_0 \lambda_0}{2\lambda'} = \frac{2q(0)}{\Phi(c)} \qquad 36)$$

und nun können wir daraus für i_0 in folgender Weise wenigstens einen unteren Grenzwert, also gerade die wohl am meisten interessierende Angabe, ableiten. Wir haben bereits bemerkt (S. 14), daß $\frac{i_0}{\lambda'}$ unabhängig ist von der räumlichen Dichte der strahlenden Substanz; dies gilt jedenfalls, wenn diese kontinuierlich im Raum verbreitet ist, oder wenn alle in Betracht kommenden Distanzen groß sind gegenüber den linearen Dimensionen etwaiger kompakter, isolierter Partikel derselben (quasi kontinuierliche Verteilung). Bezeichnen wir nun mit (i_0) und (λ') die Werte von i_0 und λ' für eine Dichte der strahlenden Substanz gleich der der Luft von Atmosphärendruck, so ist:

$$\frac{i_0 \lambda_0}{\lambda'} = \frac{(i_0)\lambda_0}{(\lambda')}. \qquad 37)$$

Nun ist für ein absorbierendes Medium nach allen bisherigen Erfahrungen der Absorptionskoeffizient bezogen auf die Dichte der Luft gleich dem der Luft selbst oder für Atomgewichte größer als etwa 100 größer als dieser, d. h. es ist $\frac{\lambda_0}{(\lambda')} < 1$. Daraus folgt in Verbindung mit Gl. 36) und 37) für i_0 unmittelbar der untere Grenzwert

$$(i_0) \geq \frac{2\,q(0)}{\Phi(c)}. \qquad 38)$$

Setzen wir nun $q(0) \sim 1$ und für $\Phi(c)$ nach Maßgabe der Höhe H_1 seinen Wert ein, so erhalten wir einen numerischen Wert für i_0; da von $H_1 = 30$ km an die Höhe bereits ohne Einfluß auf die Größenordnung von $\Phi(c)$ ist, (für $H_1 = 30$ km wird $\Phi(c) = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ für $H_1 = \infty$ wird $\Phi(c) = 3{,}6 \cdot 10^{-3}$) erhalten wir somit

$$(i_0) > 1000. \qquad 39)$$

Wir können damit, um eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, die Aktivität bekannter irdischer Stoffe vergleichen; so ist z. B. für die stark radioaktive Bodenluft die Aktivität nur etwa 100, für die Luft der freien Atmosphäre gar nur

etwa 10^{-1}, für die Gesteine der festen Erdrinde etwa 2; zur Erzielung der Aktivität 1000 müßten ferner in der Volumeinheit 10^{-12} g Radium verteilt sein. Zu allen diesen Zahlen ist, wie nochmals hervorgehoben sei, zu bemerken, daß 39) sich bezieht auf eine Massendichte der strahlenden Substanz gleich der Luft von Atmosphärendruck.

Eine zweite Möglichkeit ergibt sich, wenn wir nach Potenzen von $d\lambda'$ entwickeln. Dann wird die erste der Gl. 35)

$$q(0) = \frac{i_0 \lambda_0 d}{2} Ei(-c) \qquad 40)$$

und demgemäß

$$d i_0 \geq \frac{2 q(0)}{\lambda_0 Ei(-c)}, \qquad 41)$$

welche den Zusammenhang zwischen der Schichtdicke d und der Aktivität zeigt. Da hier i_0 die Aktivität für den tatsächlichen Zustand der strahlenden Substanz angibt, so ist $i_0 d$ die tatsächliche Aktivität einer Säule, die mit dem Querschnitt 1 aus der strahlenden Schicht ausgeschnitten ist. Rechnen wir zur Veranschaulichung um in g Radiumgehalt, so bekommen wir mit den bisher benutzten Werten dafür 10^{-7} bzw. extrapolatorisch für $H_1 = 10$ km den Wert $2{,}5 \cdot 10^{-8}$, der mit einem von Bergwitz nach Linkes Ansätzen berechneten Wert übereinstimmt[1]). Strenger würden wir in letzterem Fall allerdings nach den Gl. 19 a) verfahren, doch ist eine Verschiebung der Größenordnung dadurch nicht zu befürchten.

Die Angaben, die wir über die Aktivität der hypothetischen strahlenden Substanz machen können, sind damit, so viel ich sehe, erschöpft. Wir können sie jedoch in gewisser Weise ergänzen, wenn wir die optischen Eigenschaften (Extinktion und diffuse Zerstreuung des Lichts) mit heranziehen; dadurch kommen wir, wie sich zeigen wird, prinzipiell insofern wesentlich weiter, als wir Aussagen machen können über die Aktivität der kompakten strahlenden Substanz und nicht nur wie bisher über die Aktivität der (mit unbekannter Massendichte belegten) substanzerfüllten Volumelemente. Ehe wir darauf

[1]) Bergwitz, Met. Zeitschr. 33, S. 310, 1916.

noch kurz eingehen, wollen wir aber einige energetische Betrachtungen anfügen; da wir bisher nach Möglichkeit allzu Hypothetisches vermieden haben, seien diese jedoch mit aller Reserve mitgeteilt. Wir kennen nach dem zuletzt Gesagten aus $q(0)$ die Größenordnung von i_0 d. h. die Gesamtzahl von Jonen, welche die von der Volumeinheit ausgehende Strahlung in der Zeiteinheit produzieren kann. Ist nun die zur Jonisierung eines Luftmoleküls erforderliche Energiemenge E_γ, so ist die in der durchdringenden Strahlung aus der Volumeinheit pro Zeiteinheit ausfließende Energie E sicher $\geqq i_0 E_\gamma$; da wir den Wirkungsfaktor bei der Jonisation nicht kennen, können wir natürlich nicht mehr als in dieser Weise einen unteren Grenzwert für E angeben. Im Mittel ergibt sich nun für die Moleküle der in der Luft enthaltenen Gase E_γ von der Größenordnung 10^{-11} Erg., so daß wir also erhalten (in Erg.):

$$E \geqq i_0 \, 10^{-11}. \qquad 42)$$

Es liegt nun nahe, sich zu überlegen, zu welchen Folgerungen man kommt, wenn man die Hypothese einer in den obersten Luftschichten oder im Weltraum vorhandenen strahlenden Substanz überhaupt fallen läßt, und die Quelle der Energie in einer Transformation der kinetischen Energie (Sekundärstrahlung) einer korpuskularen Strahlung sieht, welche in die Atmosphäre eindringt; die neuesten Anschauungen über die Entstehung des Nordlichts z. B. führen jedenfalls unmittelbar auf diesen Gedanken. Zu einer Überschlagsrechnung können wir nun direkt an die einfache Beziehung 41) anknüpfen und erhalten schon von $H_1 = 30$ km ab praktisch unabhängig von H_1[1])

$$E > \frac{10^{-3}}{d}. \qquad 43)$$

[1]) Eine genauere, wegen der mancherlei unbekannten eingehenden Größen aber kaum weiter reichende Rechnung ließe sich durchführen auf Grund der Formeln 19) oder 19a), wenn man dort i_0 räumlich variabel und zwar proportional der Luftdichte setzt. Für isotherme Dichteverteilung $i_0 = i_0' \cdot e^{-\alpha x}$ ist der mathematische Teil der diesbezüglichen Rechnungen enthalten in der zitierten Arbeit von Schrödinger.

Die Gesamtenergie der in einer Säule von 1 qcm Querschnitt absorbierten Korpuskeln muß also wegen der neuerlichen Energietransformation kinetische Energie — durchdringende Strahlung jedenfalls a fortiori größer sein als 10^{-3} Erg. Dies Resultat können wir nun in Verbindung setzen mit dem Konvektionsstrom pro cm², den diese Korpuskeln der Erde in der Zeiteinheit zuführen. Für die kinetische Energie einer Korpuskel haben wir $T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$ und für den Strom, wenn N die Zahl der transportierten Korpuskeln ist, $J = N \cdot c \cdot c \cdot \beta$. Aus diesen beiden Beziehungen und aus Gl. 43) folgt der Strom in Ampère, wenn $\frac{e}{m_0}$ in elektromagnetischen Einheiten gemessen ist:

$$J > 3 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{e}{m_0} \frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad 44)$$

Ohne Rücksicht auf die durch die Absorptionsverhältnisse bedingte mögliche Eindringtiefe und die dadurch vorgeschriebene Minimalgeschwindigkeit der Korpuskeln[1]) und ebenso auf einen eventuellen Zusammenhang zwischen Impulsbreite und Korpuskelgeschwindigkeit zu nehmen, erhalten wir hieraus die folgenden Stromwerte (in Amp./cm²), die eine instruktive Übersicht über die Brauchbarkeit der eben entwickelten Theorie gibt.

β	0,5	0,9	0,95	$1-10^{-4}$	$1-10^{-6}$
Elektronen $\frac{e}{m_0} = 1{,}77 \cdot 10^7$	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	$3{,}5 \cdot 10^{-6}$	$2{,}5 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^{-9}$
α-Strahlen $\frac{e}{m_0} = 5 \cdot 10^3$	$4{,}8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$7{,}5 \cdot 10^{-10}$	$1{,}5 \cdot 10^{-10}$	

[1]) Für β-Strahlen vgl. Lenard, Heidelb. Akad. Nr. 17, 1910; für α-Strahlen Vegard, Ann. Phys. 50, S. 853, 1916 (hier weit. Lit.).

Anm. bei der Korr. Inzwischen ist ein schönes zusammenfassendes Referat über die Theorien des Nordlichts von Vegard publiziert worden in Jahrb. d. Rad. u. Elektronik 1918.

Zur quantitativen Beurteilung dieser Stromwerte wird man jedoch berücksichtigen müssen, daß in die Ausgangsgleichung 42), welche lediglich die reine Energiebilanz berücksichtigt, in Wirklichkeit noch die Nutzeffekte der beiden Umwandlungen kinetische Energie — durchdringende Strahlung und durchdringende Strahlung — Jonisation eingehen, welche die angegebenen Grenzwerte erheblich nach oben rücken; für Röntgenstrahlen z. B. würde nach den vorliegenden Daten[1]) das Produkt der beiden Nutzeffekte einen Faktor von der Größenordnung 10^4 bedingen. Zu diskutieren, inwieweit die vorgetragene Theorie mit der Wirklichkeit verträglich ist, würde hier zu weit vom Thema ab und in das Gebiet der Spekulation führen; über einige interessante Folgerungen in dieser Richtung werde ich a. a. O. berichten. Es sei nur noch bemerkt, daß v. Schweidler am Schluß seiner bereits zitierten Arbeit die soeben behandelte Möglichkeit einer Erklärung der durchdringenden Strahlung ebenfalls kurz erwähnt und auf gewisse Schwierigkeiten derselben aufmerksam gemacht hat[2]).

Wir wollen nun zum Schluß die mehrfach erwähnten Ergänzungen zu den Intensitätsfragen vornehmen, die sich aus der Heranziehung gewisser optischer Daten ergeben. Nehmen wir als eine der möglichen Formen der strahlenden Substanz die einer dünnen Staubwolke an, so erhalten wir aus den zulässigen Werten der Lichtextinktion und der Flächenhelligkeit bei Betrahlung durch die Sonne eine obere Grenze für die mögliche Massendichte einer derartigen staubförmig verteilten Substanz; zur Durchführung der Rechnungen werden wir, was wohl ohne Bedenken erlaubt ist, die einzelnen Partikel der Staubwolke als kugelförmig und von gleicher Größe annehmen; eine Verallgemeinerung für verschiedene beliebige Kugelgrößen läßt sich unschwer durchführen, ohne jedoch für unsere Zwecke Vorteile zu bringen. Ferner sollen die Staubpartikel absolut

[1]) Pohl, Physik d. Röntgenstrahlen, S. 6, 139.

[2]) Wie mir Herr Wigand nachträglich mitteilte, hat auch Kolhörster diesbezügliche Rechnungen angestellt und wurde nur durch den Krieg an der Publikation verhindert.

undurchsichtig und ihre Oberflächenbeschaffenheit durch die Albedo gegeben sein. In diesen letzten beiden Annahmen, welche optische Betrachtungen ohne weitere hypothetische Zusätze heranzuziehen gestatten, liegt gerade die Möglichkeit, unsere bisherigen Überlegungen zu ergänzen.

Sind in der Volumeinheit N Kugeln kompakter Substanz vom Radius ϱ vorhanden, so ist die Lichtabsorption in einer Schicht von der Dicke δ gegeben durch

$$J = J_0 \cdot e^{-N \cdot \varrho^2 \pi \cdot d} = J_0 \cdot \delta, \qquad 45)$$

wo δ ein Faktor ist, welcher jedenfalls sehr nahe gleich 1 anzusetzen sein wird. Bezeichnen wir für das Folgende $— ln\,\delta$ mit Σ, so geben die astronomischen und terrestrischen Extinktionsmessungen einen Anhalt für die Größe von Σ. Für die gesamte Atmosphäre und einen im Zenith stehenden Stern hat sich Σ von der Größenordnung 10^{-1} ergeben[1]); berücksichtigt man jedoch, daß die besten Resultate der indirekten astronomischen und der direkten terrestrischen Extinktionsmessungen sehr nahe dieselben Werte für Σ ergeben haben, so wird man natürlich für die Absorptionen der Staubwolke sehr viel kleinere Werte von Σ ansetzen als $\Sigma_0 = 10^{-1}$. Auf alle Fälle ist aber zu fordern, daß

$$N \varrho^2 \pi d < \Sigma_0. \qquad 46)$$

Ist nun andererseits das mit kompakter strahlender Substanz erfüllte Volumen pro Volumeinheit des Raumes V, so ist

$$\tfrac{4}{3} N \varrho^3 \pi = V. \qquad 47)$$

Aus Gl. 46), 47) folgt also durch Elimination von N:

$$\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} < \Sigma_0. \qquad 48)$$

Nun können wir aber andererseits für ϱ eine obere Grenze daraus bestimmen, daß wir für die Fallgeschwindigkeit der betrachteten Kugeln nur einen gewissen maximalen Wert zulassen. Aus den bekannten hydrodynamischen Beziehungen

[1]) Müller, Photometrie der Gestirne. Leipzig 1897.

zwischen Kugelgröße und stationärer Endgeschwindigkeit[1]) läßt sich eine obere Grenze für den Kugelradius ausrechnen, wenn für die Endgeschwindigkeit selbst eine obere Grenze vorgegeben wird. Setzen wir also vorläufig an, daß $\varrho < \varrho_0$ sein soll, so ergibt Gl. 48) die Bedingung $Vd < \frac{4}{3} \Sigma_0 \varrho_0$. Aus dieser können wir nun — und hierin sehe ich immerhin einen prinzipiellen Fortschritt — sofort einen unteren Grenzwert für die Aktivität A der kompakten strahlenden Substanz, unabhängig von der Dichte ihrer Verteilung, ableiten. Wir hatten nämlich früher in Gl. 41) einen Ausdruck gefunden für $i_0 d = A_0$ d. h. für die Aktivität einer Säule der strahlenden Schicht vom Querschnitt 1 und haben nun einen analogen Ausdruck gefunden, für die tatsächliche Raumerfüllung der kompakten strahlenden Substanz in dieser Säule. Die Kombination beider gibt unmittelbar die gesuchte Beziehung für die tatsächliche Aktivität der kompakten Substanz:

$$A > \tfrac{3}{4} \cdot \frac{A_0}{\Sigma_0 \varrho_0}. \qquad 49)$$

Die Größenordnung von A_0 kennen wir nun bereits zu 10^8; für Σ_0 ist nach den obigen Angaben ein Wert zu setzen, der sicher beträchtlich kleiner — vermutlich um 1—2 Zehnerpotenzen — ist als $10^{-1} \varrho_0$; endlich ergibt sich z. B. aus der Annahme, daß die stationäre Fallgeschwindigkeit des Staubes in 20 km Höhe von der Größenordnung 1 ist, als von der Größenordnung 10^{-3}, so daß sich für A der durchaus nicht unmöglich hohe Wert von 10^{12} ergibt. Dies würde natürlich nach Maßgabe einer Verkleinerung von Σ_0 und ϱ_0 noch zu vergrößern sein und würde so in die Größenordnung des Wertes für reinen Radiumstaub kommen. Unabhängig von diesen aus Mangel an exakten empirischen Unterlagen naturgemäß noch recht willkürlichen Zahlenrechnungen läßt sich vorerst aus der allgemeinen Beziehung 49) auf jeden Fall der Zusammenhang von A mit lauter physikalisch durchsichtigen Größen deutlich übersehen.

[1]) Sehr brauchbar ist hier eine von Kundsen, Ann. Phys. 36, S. 981, 1911 gegebene empirische Formel, die im folgenden benutzt wurde.

Während nun namentlich die Festlegung von ϱ_0 der Spekulation noch ein weites Feld offen läßt, Spekulationen, die hier zu weit ab vom eigentlichen Thema und in das Gebiet der Hydrodynamik der Atmosphäre führen würden, lassen sich die in der Größe Σ_0 liegenden Unsicherheiten in gewissem Umfang eliminieren oder doch kontrollieren, wenn man neben der Extinktion nun auch den gewissermaßen inversen Effekt in Betracht zieht, nämlich die diffuse Reflektion des Lichts an der Staubwolke bei Bestrahlung durch die Sonne. Ebenso wie die Extinktion für die räumliche Dichte der Staubwolke bei gegebener Teilchengröße eine obere Grenze geliefert hat, muß sich nämlich auch aus der Flächenhelligkeit ein solcher Grenzwert ergeben. Lehnen wir uns an die bereits vorliegende Theorie der Beleuchtung kosmischer Staubmassen an[1]), so erhalten wir für die Flächenhelligkeit ausgedrückt in Bruchteilen der Flächenhelligkeit J_M des Vollmondes die folgende Formel

$$H = J_M \cdot 12{,}3 \cdot \mu \cdot \frac{f(\alpha)}{\pi} \frac{\cos i}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} \frac{\cos i + \cos \varepsilon}{\cos i \cdot \cos \varepsilon}}\right). \quad 50)$$

Es bedeutet darin μ die Albedo der staubförmig verteilten Substanz, $f(\alpha)$ eine von der Form des elementaren Beleuchtungsgesetzes abhängende Funktion des Phasenwinkels, i und ε den Incidenz- bzw. Emissionswinkel des betrachteten Teils der Wolke und $\frac{V \cdot d}{\varrho}$ eben die früher z. B. durch Gleichung 48) eingeführte Größe. Da es sich nur um eine Bestimmung der Größenordnung handeln soll, können wir die Gl. 50) einfacher schreiben in der Form

$$H \sim J^M \left(1 - e^{-\frac{3}{4} \frac{V \cdot d}{\varrho} \cdot \frac{\cos i}{2}}\right), \quad 51)$$

wobei der Einfachheit halber $i = \varepsilon$ gesetzt wurde (die allgemeine Diskussion, auf die wir hier nicht eingehen wollen, verläuft ebenso einfach). Soll nun $H < \Sigma_0' \cdot J_M$ sein, so folgt unmittelbar die der Gl. 48) ganz analoge Beziehung:

[1]) In Betracht kommen die drei Arbeiten von H. v. Seeliger über die Photometrie kosmischer Staubmassen. Abh. Münch. Akad. 16, 1887; 18, 1893 und Münch. Ber. 31, S. 265, 1901.

$$\frac{3}{4}\,\frac{V\cdot d}{\varrho} < \Sigma_0'\,\frac{\cos i}{2}. \qquad 52)$$

Wie man leicht einsieht, ist für Höhen der strahlenden Schicht von der Größenordnung 10 km i recht nahe gleich 90°, so z. B. für $H = 20$ km $i = 85°$ ($\cos i \sim 10^{-1}$). Setzt man etwa $\Sigma_0' = 10^{-5}$ bis 10^{-7}, entsprechend der Flächenhelligkeit der Milchstraße, so wird die rechte Seite von der Größenordnung 10^{-6} bis 10^{-8}; damit aber käme man bereits in Gebiete der Aktivität, welche selbst die des reinen Radiums erheblich überschreiten. Eine genauere Diskussion der Größen ϱ_0, Σ_0' usw. wird ohne Zweifel möglich sein, doch mag es hier genügen, die allgemeinen Formeln und eine Überschlagsrechnung zur Illustration ihrer praktischen Anwendung gegeben zu haben.

§ 8. Abschließend können wir die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchungen in den folgenden Sätzen nunmehr kurz zusammenfassen.

a) Da das Beobachtungsmaterial wegen der Unsicherheit der Einzelwerte und der Unbestimmtheit der Reduktion von der gemessenen Gesamtjonisation auf die reine äußere Volumjonisation noch nicht als exakt quantitative Grundlage für theoretische Betrachtungen dienen kann, ist man gezwungen, aus denselben zunächst diejenigen Daten abzuleiten, welche schon jetzt als gesichert gelten können. Als solche werden für das folgende benutzt die Größenordnung der Jonisation am Erdboden, das Verhältnis zweier Jonisationen in zwei günstig gewählten Höhen und der charakteristische geometrische Verlauf der Jonisations-Höhenkurve.

b) Das Problem läßt sich formulieren in einer Integralbeziehung, welche die Jonisation als Funktion einer räumlichen Verteilung von Strahlungsquellen und der Absorption der durchdringenden Strahlung auf dem Weg von diesen Quellen zum Beobachtungsort beschreibt. Die Vieldeutigkeit der Lösungen zwingt, sich auf gewisse plausible Sonderfälle zu beschränken.

c) Für den Fall einer diskontinuierlichen Verteilung der Quellen in den oberen Schichten der Atmosphäre bzw. im Weltraum wird die Lösung in erster und zweiter Näherung gegeben.

Neben einigen allgemeinen Sätzen ergibt sich aus der Diskussion derselben zunächst als unterer Grenzwert des Absorptionskoeffizienten λ_0 der Wert $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ und weiterhin durch Spezialisierung der Voraussetzungen für λ_0 selbst die Größenordnung $5 \cdot 10^{-6}$. Unter den genannten allgemeinen Sätzen ist der zu erwähnen, daß Größe und Verlauf der Jonisation unabhängig sind von der Dichte einer hypothetischen in der Höhe ausgebreiteten strahlenden Substanz und nur abhängt von deren gesamter aktiver Masse.

d) Die vorhergehenden Betrachtungen werden erweitert unter Berücksichtigung der Erdkrümmung und der Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Incidenzwinkel. Der letztere Umstand gibt ein neues Mittel zur experimentellen Bestimmung des Absorptionskoeffizienten.

e) Eine dritte Erweiterung bezieht sich auf die Annahme einer Streuung der Strahlung neben der reinen Absorption; mangels aller numerischen Unterlagen läßt sich die Diskussion vorerst nur allgemein durchführen, ergibt aber immerhin brauchbare Fingerzeige und Arbeitshypothesen.

f) Für die Aktivität der Volumeinheit ergibt sich ausgedrückt in g Radium als unterer Grenzwert die Größenordnung 10^{-7}—10^{-8}. Nimmt man an, daß die Strahlungsquellen in fein verteilter staubförmiger Materie sitzen, so gibt die Berücksichtigung der optischen Absorption und diffusen Reflexion in Verbindung mit der stationären Fallgeschwindigkeit des Staubes ein Mittel an die Hand, um für die Aktivität der kompakten strahlenden Substanz untere Grenzen aufzustellen.

g) Ergänzend wird die Hypothese diskutiert, daß die durchdringende Strahlung entsteht durch Transformation der kinetischen Energie einer in die Erdatmosphäre eindringenden korpuskularen Strahlung.

Charlottenburg, Januar 1818.

Weierstrass' „Abelsche Transzendenten" und ihre Weiterführung.

Von **Robert König** in Tübingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 9. Februar 1918.

In einer Reihe von Arbeiten[1]) ist es mir gelungen, an Weierstraß' klassische Vorlesung über Abelsche Transzendenten (Ges. Werke, Bd. IV, Berlin 1902) anzuknüpfen und den ganzen ersten und zweiten Teil derselben von den Abelschen Transzendenten (algebraischen Funktionen und ihren Integralen) auf die Riemannschen Transzendenten (Funktionen mit gegebener Monodromiegruppe und ihre Integrale) auszudehnen. Auch die grundlegende Arbeit von M. Noether „Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen", Math. Ann. 37 (1890) erscheint hiedurch zum Teil erweitert. Ich versuche im folgenden, mit wenigen Strichen einen Überblick über den systematischen Aufbau der Theorie zu geben.

---

[1]) I. Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen, Leipzig 19. V. 1911; Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse, Bd. 63 (1911), S. 348—368.

II. Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale, Leipzig 26. I. 1914; Crelles Journal, Bd. 146 (1916), S. 161—184.

III. Grundzüge einer Theorie der Riemannschen Funktionenpaare, Tübingen 22. VII. 1915; Math. Annalen, Bd. 78 (1917), S. 63—93.

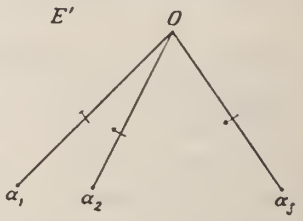
IV. Über die Perioden der Integrale multiplikativer Funktionen (Voranzeige), Tübingen 10. II. 1916; Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 68 (1916), S. 56.

V. Riemannsche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene, Berlin 11. XI. 1916; Crelles Journal, Bd. 148 (1918).

I. Abschnitt. Grundlagen.

I. Die Klasse.

Den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden Systeme von n Funktionen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — $n \geq 1$ —, welche auf n Exemplaren E_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der — wie nebenstehend schematisch angedeutet — zerschnittenen komplexen z-Ebene E' eindeutig und bis auf Pole regulär ausgebreitet sind und bei analytischer Fortsetzung über die von O nach den Punkten a gezogenen Schnitte lineare homogene Substitutionen $A = (a_{ik})$ mit dem Produkt 1 erfahren: $y^* = Ay$. Alle Funktionensysteme $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oder kürzer „Funktionen" y mit denselben A bilden nach Riemann eine Klasse (K). Neben den Funktionen betrachte ich auch ihre Integrale bzw. die zugehörigen „Differentiale" $dJ = ydz = (y_1 dz, y_2 dz, \ldots, y_n dz)$. Die Funktionensysteme $\breve{y} = (\breve{y}_1, \breve{y}_2, \ldots, \breve{y}_n)$, welche die zu den A komplementären Substitutionen $\breve{A} = (A^{-1})$ erfahren, bilden die komplementäre Klasse $(\breve{K})$; $d\breve{J} = \breve{y}dz$ seien die zugehörigen Differentiale.



VI. Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten und andere Theoreme, Berlin 6. II. 1917; Jahresber. d. Deutschen Math. Ver., Bd. 26 (1918).

VII. Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme, Berlin 27. II. 1917; Gött. Nachr. (1917), S. 240/6.

VIII. Die Elementartheoreme und die Vertauschungstheoreme 1. Ordnung bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 6. VI. 1917.

IX. Funktionen- und zahlentheoretische Analogieen, Berlin 27. VI. 1917; Archiv f. Math. u. Phys. (1918).

X. Neue Beiträge zur Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten, Berlin 4. IX. 1917. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.

XI. Die Vertauschungstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 26. IX. 1917.

XII. Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 24. XI. 1917. Math. Ann. 1918.

Die „Klasseneigenschaft" — z. B. der Funktionen von (K) — besteht darin, daß mit $y, y^{(1)}, y^{(2)}$ auch $y^{(1)} + y^{(2)}$, $R(z) \cdot y$, $\frac{dy}{dz}$ in der Klasse vorkommen, wenn $R(z)$ eine rationale Funktion ist. Ich setze (K) als „nicht zerfallend" voraus, d. h. der Matrizenkomplex A möge nicht in Partialsysteme zerfallen; sonst könnten wir mehrere Systeme von weniger als n Funktionen betrachten.

II. Der erweiterte Funktionsbegriff.

Ist y eine Funktion von (K), so gehören zu jeder Stelle $\mathfrak{p}$ von E' bzw. zu den n daselbst übereinander liegenden Punkten $\mathfrak{p}_i$ n Funktionselemente der Form $y_i = P_i(t)\left(z_i = p + t \text{ bzw. } \frac{1}{t}\right)$. Das gilt auch noch für die Randstellen von E' mit Ausnahme der Punkte a. Hier läßt sich nach Frobenius[1]) aus A eine Substitution L herstellen (und zwar noch auf verschiedene Arten), welche A in die (bzw. eine) Normalform

$$1) \qquad B = L^{-1} A L = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} e_1 &= e^{2i\pi\alpha_1}, \ \ldots \\ \alpha_1 &= \alpha_1' + i\alpha_1'', \ \ldots \\ 0 \leq \alpha_1' &< 1, \ \ldots \end{aligned}$$

überführt[2]). Ich wähle eine derselben und lege damit ein zu a gehöriges System von Funktionselementen der Form

$$\overset{a}{y}_i = L^{-1} y = t^{\alpha_i} P_i(t)$$

fest[3]). Es gehören alsdann zu jeder Stelle des abgeschlossenen Bereiches E' n eindeutig bestimmte Funktionselemente y_i bzw. $\overset{a}{y}_i (i = 1, 2, \ldots n)$. Ich operiere im folgenden — *und es ist*

[1]) Über den Rang einer Matrix, Sitz.-Ber. d. K. Pr. Akad. d. Wiss. 1911, II, S. 20—29.

[2]) Der Einfachheit halber nehme ich an, daß B diese Form hat, also keine mehrgliedrigen „Ketten" vorkommen.

[3]) $P(t)$ bedeutet mit Weierstraß immer eine Potenzreihe mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen; das gehört für die Stellen a noch mit zur Voraussetzung über y.

das ein neuer und für das Folgende grundlegender Schritt mathematischer Freiheit — mit der Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{a}{y_i})$ von (K) und der Differentiale $(dJ_i, \overset{a}{dJ_i}) = (y_i\,dz, \overset{a}{y_i}dz)$ von (K); daneben betrachte ich die Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i})$ von $(\breve{K})$ und der Differentiale $(d\breve{J}_i, \overset{\dot{a}}{d\breve{J}}) = (y_i\,dz, \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i}\,dz)$ von $(\breve{K})$, wobei

$$2) \qquad \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i} = \breve{L}^{-1}\breve{y} = t^{\breve{\alpha}_i} P_i(t),$$

$$3) \qquad \breve{B} = \breve{L}^{-1}\breve{A}\breve{L} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{e_1} & & & \\ & 1 & & \\ & & e_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{e_n} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{e_1} = e^{2i\pi\breve{\alpha}_1}, \ \ldots \\ \breve{\alpha}_1 = \breve{\alpha}_1' + i\breve{\alpha}_1'', \ \ldots \\ 0 \leqq \breve{\alpha}_1' < 1, \ \ldots \end{matrix}$$

ist. Auf diese „Funktionen“ und „Differentiale“ beziehen sich alle folgenden Aussagen.

Die „reduzierten Exponenten“ a_i von (K) und $\breve{a}_i$ von $(\breve{K})$ stehen in dem Zusammenhang:

$$4) \qquad \breve{a}_i = -a_i + \varepsilon_i, \text{ wo } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a_i' = 0 \\ 1 & \text{wenn } a_i' > 0. \end{cases}$$

III. Der Begriff des Multiplums.

Es handelt sich in erster Linie darum, die Begriffe Nullstelle und Pol auf obige Funktionen und Differentiale sinngemäß auszudehnen. Dazu dient folgende Definition. Ist $\mathfrak{a} \ldots$ eine von den Stellen $z = a$, $\mathfrak{b} \ldots$ eine davon verschiedene Stelle von E' und bedeuten λ_i, $\varkappa_i$ beliebige ganze Zahlen, dann heißt das Aggregat von Punkten und Exponenten

$$\Omega = \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{b}_1^{\varkappa_1} \ldots \\ \mathfrak{a}_2^{\lambda_2} \ldots \mathfrak{b}_2^{\varkappa_2} \ldots \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \ldots \mathfrak{b}_n^{\varkappa_n} \ldots \end{Bmatrix}$$

ein „Divisor“[1]). Sind alle λ, $\varkappa$ gleich Null, schreibe ich kurz: $\mathfrak{Q} = 1$, sind sie entgegengesetzt gleich: $\mathfrak{Q}^{-1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}}$. Nun stelle ich folgende Definition auf:

Die Funktion $(y_i, \overset{a}{y_i})$ von (K) heißt ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn für die Umgebung

$$\text{der Stelle } \mathfrak{a}\ (\overset{a}{z_t} = a + t)\text{: } \frac{\overset{a}{y_i}(\overset{a}{z_t})}{t^{\varkappa_i}} = t^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(t)$$

5) . . . . . .

$$\text{der Stelle } \mathfrak{b}\left(z_t = b + t \text{ bzw. } \frac{1}{t}\right)\text{: } y_i(\overset{b}{z_t}) = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t)$$

. . . . . .

ist und für eine in $\mathfrak{Q}$ nicht explicite vorkommende Stelle $\mathfrak{a}'$ . . . bzw. $\mathfrak{b}'$ . . . einfach

$$\frac{\overset{a'}{y_i}(\overset{a'}{z_t})}{t^{\varkappa'_i}} = \mathfrak{P}_i(t) \text{ bzw. } y_i(\overset{b'}{z_t}) = \mathfrak{P}_i(t)$$

ist. $\mathfrak{P}(t)$ ist hiebei das Zeichen für eine für $t = 0$ reguläre Potenzreihe.

Das Differential $(dJ_i, \overset{a}{dJ_i}) = (y_i\,dz, \overset{a}{y_i}\,dz)$ von (K) heißt Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn

$$\text{für } \mathfrak{a}\ (\overset{a}{z_t} = a + t)\text{: } \frac{1}{t^{\varkappa_i}}\,\frac{d\overset{a}{J_i}(\overset{a}{z_t})}{dt} = t^{\lambda_i - \varepsilon_i}\mathfrak{P}(t)$$

6) . . . . . .

$$\text{für } \mathfrak{b}\left(\overset{b}{z_t} = b + t \text{ bzw. } \frac{1}{t}\right)\text{: } \frac{dJ_i(\overset{b}{z_t})}{dt} = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t)$$

. . . . . .

und für eine in $\mathfrak{Q}$ nicht explicite vorkommende Stelle $\mathfrak{a}'$ . . . bzw. $\mathfrak{b}'$ . . . einfach

$$\frac{1}{t^{\alpha'_i}}\,\frac{d\overset{a'}{J_i}(\overset{a'}{z_t})}{dt} = t^{-\varepsilon'_i}\mathfrak{P}_i(t) \text{ bzw. } \frac{d\overset{b'}{J_i}(\overset{b'}{z_t})}{dt} = \mathfrak{P}_i(t) \text{ ist.}$$

---

[1]) In Verallgemeinerung des von Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902, eingeführten Begriffes.

Analog lauten die Definitionen für die Funktionen $(y, \overset{\cdot}{\breve{y}})$ und Differentiale $(d\breve{J}, d\overset{\cdot}{\breve{J}})$ von $(\breve{K})$.

Man sieht, diese Definitionen hängen im allgemeinen wesentlich von der Wahl von L ab.

Die Aussagen haben jetzt einen scharfen Sinn: eine Funktion bzw. ein Differential von (K) oder $(\breve{K})$ hat bei $\mathfrak{a}_1$ eine „Nullstelle h^{ter} Ordnung", einen „Pol h^{ter} Ordnung", oder „verhält sich daselbst regulär" usw., nämlich, wenn $\lambda_1 = +h$, $-h$ und $\mathfrak{P}_1(0) \neq 0$ ist oder wenn $\lambda_1 \geq 0$ ist usw.

IV. Die wichtigsten Divisoren.

Die wichtigsten, dem Klassenpaar (K), $(\breve{K})$ eigentümlichen Divisoren sind die folgenden: der „Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}$" und der „Differentialteiler $\mathfrak{W}$":

$$7) \qquad \mathfrak{Z} = \mathit{II} \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \mathfrak{a}_2^{\varepsilon_2}, \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{cases} \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{Z} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}_z^2}, \quad \mathfrak{N}_z = \begin{cases} \mathfrak{p}_{\infty 1} \\ \mathfrak{p}_{\infty 2} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{\infty n} \end{cases}$$

In $\mathfrak{Z}$ ist das Produkt über alle Stellen $\mathfrak{a}$ zu erstrecken; ε_i sind die in 4) eingeführten Zahlen; $\mathfrak{p}_\infty$ ist die unendlich ferne Stelle der Ebene. $\mathfrak{Z}$ kommt für eine beliebige Klasse (K) dieselbe Bedeutung zu wie dem bekannten „Verzweigungsdivisor" in einem algebraischen Funktionskörper oder der „Differente" in einem algebraischen Zahlkörper[1]).

V. Die wichtigsten, (K) eigentümlichen Zahlen.

Es sind dies

1. die Anzahl der l. u. überall endlichen Funktionen: τ,
2. „ „ „ „ „ „ Differentiale: σ,
3. das „Geschlecht" $p = \Sigma\Sigma a - n + 1$.

Ebenso für $(\breve{K})$ die entsprechenden Zahlen: $\breve{\tau}$, $\breve{\sigma}$, $\breve{p}$.

---

[1]) Vgl. hiezu „IX".

Die Anzahl τ bzw. σ der linear unabhängigen Funktionen $(y, \overset{a}{y})$ bzw. Differentiale $(dJ, \overset{a}{dJ})$ von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q} = 1$ sind, hängt ebenso wie die Zahl p nicht von der Wahl von L ab, sondern ist ausschließlich durch die Klasse selbst bestimmt.

In dem speziellen algebraischen Fall, — wie in jedem andern, wo $\tau = 1$ ist — fallen wegen der Relation:

$$\breve{\sigma} = \tau + p - 1 \quad (\sigma = \tau + \breve{p} - 1)$$

die beiden Zahlen $\breve{\sigma}$, p zusammen und *es übernimmt die Riemannsche Geschlechtszahl oder die Weierstraßsche Rangzahl*[1]) *gleichzeitig die Rolle von* $\breve{\sigma}$ *und* p, *während im allgemeinen diesen beiden Zahlen ganz verschiedene Rollen zukommen.* Es ist von hohem Interesse, das durch die ganze Theorie zu verfolgen.

VI. Spezialfälle.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist der, daß die Klasse (K) „transitiv" ist, d. h. daß die Funktionen $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ eines Systemes Zweige einer monogenen analytischen Funktion sind[2]). Er liegt insbesondere dann vor, wenn die gegebenen Substitutionen eine Vertauschungsgruppe bilden; wir erhalten alsdann eine Theorie der irreduziblen algebraischen Systeme und ihrer Differentiale, aus welcher durch Spezialisierung (d. h. durch geeignete Wahl von L) und durch Übergang von den n Blättern E_i zur geschlossenen Fläche die gewöhnliche Theorie der algebraischen Funktionen gewonnen werden kann[3]).

Aus dieser Einordnung entspringt dreierlei:

1. man erkennt, daß fast der ganze Inhalt der Lehre von den algebraischen Funktionen und Differentialen allein auf ihrer

[1]) S. Weierstraß, a. a. O., 4. und 5. Kap.

[2]) Auf ihn allein beziehen sich die formentheoretischen Untersuchungen über Scharen von E. Ritter, Math. Ann., Bd. 47 (1897), s. S. 197.

[3]) Vgl. hiefür insbesondere: „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen", Bericht von Brill und Noether, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver., Bd. III (1894), VII. Abschnitt. Den reduziblen Fall behandelt M. Noether in Acta Math., Bd. 8 (1886).

Klasseneigenschaft beruht und nur ganz weniges aus ihrer (gegen den allgemeinen Fall) neu hinzutretenden Körpereigenschaft fließt[1]); es bietet ein gewisses philosophisches Interesse, das eine von dem andern scharf zu scheiden.

2. dadurch, daß im algebraischen Fall $(K) = (\breve{K})$ ist und es nur eine überall endliche Funktion, die Konstante, gibt, rückt vieles zusammen (s. oben V), was wir auf dem Wege von der allgemeinen Theorie her ganz klar auseinander legen können, und es wird die Stellung der Funktionen und Differentiale eine sehr ungleichartige, während im allgemeinen Falle beide völlig gleichberechtigt sind.

3. und das ist der bedeutungsvollste Umstand — stehen jetzt nicht mehr die einzelnen Gebiete der Riemannschen Funktionentheorie isoliert (wenn auch analog) nebeneinander, sondern sie entwickeln sich aus dem allereinfachsten Gebiet, dem der rationalen Funktionen, organisch auseinander[2]) — ein Körper und ein denselben beherrschendes arithmetisches Gesetz.

II. Abschnitt.

Die Funktionen und Differentiale einer Variabeln.

Aus der Klasseneigenschaft folgen der Reihe nach die zwölf Sätzegruppen, welche den elementaren Teil der Theorie ausmachen.

I. Die arithmetische Sätzegruppe[3]).

Die *drei Basissätze (Satz der Klassenbasis, der Idealbasis, der Multipla-Basis)* besagen, daß 1. alle Funktionen der Klasse (K), 2. die Funktionen von (K), welche Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ im Endlichen sind (d. h. die Funktionen des Ideals $J(\mathfrak{Q})$), 3. die Funktionen von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, durch eine Basis dargestellt werden können und daß eine solche

[1]) Z. B. daß die Anzahl der Pole und Nullstellen gleich ist.
[2]) S. „VI“, § 1. [3]) S. „V“.

für 2. und 3. aus der für 1 durch endliche algebraische Prozesse gewonnen werden kann[1]).

Der *Diskriminantensatz* ist die Verallgemeinerung des bekannten Kroneckerschen Satzes über die Zerfällung der Diskriminante eines algebraischen Körpers in einen wesentlichen und außerwesentlichen Teiler.

Der *Komplementensatz* besagt: Bilden die Funktionen $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, . . . $\xi^{(n)}$ von (K) eine Basis für das Ideal $J(\mathfrak{Q})$, so bilden die Funktionen $\breve{\xi}^{(1)}$, . . . $\breve{\xi}^{(n)}$ von $(\breve{K})$ eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Z}}\right)$; hiebei ist

$$\breve{\Xi}_{ik} = (\overline{\Xi_{ik}^{-1}}), \quad \Xi_{ik} = (\xi_i^{(k)}), \quad \breve{\Xi}_{ik} = (\breve{\xi}_i^{(k)}), \quad i, k = 1, 2, \ldots n.$$

Er ist das Analogon zu dem Satz von Dedekind, Hilbert, Hensel-Landsberg in der Theorie der algebraischen Zahl- bzw. Funktionenkörper[2]).

Der *Geschlechtersatz*: $p + \breve{p} = w + 2$, wo w die Ordnung von $\mathfrak{W}$ ist, der im algebraischen Fall in die Gleichung $2p - 2 = w$ übergeht, verallgemeinert die Tatsache, daß die Anzahl der Nullstellen eines überall endlichen Abelschen Differentials gleich $2p - 2$ ist.

II. Die 3 Anzahltheoreme[3]).

Das *erste Anzahltheorem* gibt die fundamentale Anzahlbeziehung zwischen den Funktionen von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind und den Differentialen von $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}^{-1}$ sind

$$\breve{V}_{\mathfrak{Q}^{-1}} = U_{\mathfrak{L}} + p + q - 1$$

und kann als Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch aufgefaßt werden[4]).

---

[1]) Vgl. für den algebraischen Fall das oben zit. Werk von Hensel-Landsberg.

[2]) Vgl. hiezu „IX" sowie E. Landau, Gedächtnisrede auf Richard Dedekind, Gött. Nachr. (1917), S. 50—70.

[3]) S. „V" und „VI".

[4]) S. die Erweiterungen von M. Noether, Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Kurve mit nicht adjungierten Kurven. Math. Ann., Bd. 15 (1879).

Das zweite Anzahltheorem gibt eine Anzahlbeziehung zwischen den Funktionen von (K) und den Funktionen von $(\breve{K})$.

Das dritte Anzahltheorem eine solche zwischen den Differentialen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$ und kann als Verallgemeinerung des Reziprozitätssatzes von Brill und Nöther (Math. Ann., Bd. 7 (1874) aufgefaßt werden.

III. Das Invariantentheorem[1])

lehrt eine von Ω unabhängige, ausschließlich durch das Klassenpaar (K), $(\breve{K})$ bedingte Anzahlbeziehung kennen.

IV. Die Lückentheoreme[1]).

Es ist eine bekannte wichtige Entdeckung von Weierstraß, daß unter den an einer Stelle unendlich werdenden algebraischen Funktionen genau p Ordnungszahlen fehlen und dafür p Integrale 1. Gattung existieren, welche von diesen Ordnungen daselbst verschwinden. Im Gebiet der Riemannschen Transzendenten besteht ein viel allgemeineres Theorem einmal für die Funktionen und dann ein analoges auch für die Differentiale, für welches im algebraischen Gebiet noch kein Platz ist.

Es zeigt sich, daß die Quelle für diese Lückentheoreme tiefer und zugleich einfacher liegt als der Ausgangspunkt bei Weierstraß[2]); sie fließt aus dem 1. Anzahltheorem.

V. Die Residuensätze

lehren, daß für die Koeffizienten der Unendlichkeitsstellen einer Funktion bzw. eines Differentials von (K) σ bzw. $\breve{\tau}$ lineare homogene Relationen bestehen müssen. Für die Abelschen Differentiale gibt das letztere den Satz, daß die Residuensumme gleich Null ist.

VI. Die Vorbereitungssätze für die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale.

Es läßt sich (auf unendlich viele Arten) ein Divisor $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$ der Ordnung τ bzw. $\breve{\sigma}$ angeben derart, daß keine

[1]) S. „VI“. [2]) S. a. a. O. 9. Kap.

überall endliche Funktion von (K) bzw. kein überall endliches Differential von $(\breve{K})$ existiert, welches Multiplum von $\mathfrak{N}$ bzw. von $\mathfrak{M}$ ist[1]). Daraus entspringt das

Charakterisierungsschema:

	Klasse (K)		(Klasse $\breve{K}$)	
Funktionen:	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\mathfrak{M}:\breve{\sigma}}$	$\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\mathfrak{N}:\tau}$	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$	$\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\breve{\mathfrak{N}}:\tau}$
Differentiale:	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\breve{\mathfrak{N}}:\tau}$	$\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\mathfrak{N}:\tau}$	$\overbrace{\circ\circ\cdots\circ}^{\mathfrak{M}:\sigma}$

Die schrägen Kreuze besagen: es gibt (außer den ev. vorhandenen überall endlichen) keine Funktionen bzw. Differentiale, welche nur daselbst höchstens von der 1. Ordnung unendlich werden. Die Kreise besagen: es gibt keine überall endlichen Funktionen bzw. Differentiale, welche daselbst gleichzeitig mindestens von der 1. Ordnung verschwinden.

VII. Die Elementar-Funktionen und -Differentiale einer Variabeln von (K) und $(\breve{K})$.

Ihre Existenz, tatsächliche Aufstellung und algebraische Charakterisierung kann jetzt mit Hilfe des 1. Anzahltheorems, der Basissätze und VI erfolgen[2]). Es gehört z. B. (im allgemeinen) zu einer jeden Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ von den E_i', wo δ eine Zahl der Reihe 1, 2, ... n ist, eine unbegrenzte Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung von (K)

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z,\,\mathfrak{d}_\delta), \quad h = 1, 2, \ldots in\ inf,$$

wobei abgesehen von $\mathfrak{d}_\delta$ $(\mathfrak{E}_i^{(h)}, \overset{a}{\mathfrak{E}}_i^{(h)})$ Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$ ist, während es sich bei $\mathfrak{d}_\delta$ verhält wie:

$$z_t^d = d + t\colon\ \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_\delta^{(h)}}(z_t^d,\,\mathfrak{d}_\delta) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t);$$

[1]) S. „VI". [2]) S. „VIII".

ebenso eine unbegrenzte Reihe von Elementardifferentialen h^{ter} Ordnung von (K)

$$\frac{d\mathfrak{F}_i^{(h)}(z_t, \mathfrak{d}_\delta)}{\mathfrak{N}.\mathfrak{M}}, \quad h = 1, 2, \ldots,$$

wobei abgesehen von $\mathfrak{d}_\delta\left(\frac{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}{dt}, \frac{d\overset{a}{\mathfrak{F}}_i^{(h)}}{dt}\right)$ Multiplum von $\breve{\mathfrak{N}}^{-1}\cdot\breve{\mathfrak{M}}$ ist, während es sich bei $\mathfrak{d}_\delta$ verhält wie:

$$z_t^d = d + t\colon \frac{d\mathfrak{F}_\delta^{(h)}(z_t^d, \mathfrak{d}_\delta)}{dt} = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t).$$

Analog für die Klasse $(\breve{K})$.

Eine besondere Rolle spielen hiebei aber die Stellen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\breve{\mathfrak{M}}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $(\mathfrak{a}_j)$, $(\mathfrak{p}_{\infty j})$, $j = 1, 2, \ldots n$.

VIII. Die Partialbruchdarstellung[1])

einer beliebigen Funktion bzw. eines beliebigen Differentials mit Hilfe der obigen besteht ganz wie im algebraischen Fall.

IX. Die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale mittels Polen und Hauptteilen[2]),

X. Die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale mittels Polen und Nullstellen[3])

wird durch zwei Hauptsätze gegeben. Ein Teil des letzteren besagt: gibt man für eine Funktion von (K) $S \geq \breve{\sigma}$ Pole, dann kann man noch $S - p$ Nullstellen willkürlich vorschreiben; gibt man für ein Differential von $(\breve{K})$ $S \geq \tau$ Pole, dann kann man noch $S + p - 2$ Nullstellen willkürlich vorschreiben.

XI. Das verallgemeinerte Abelsche Theorem für Funktionen und Differentiale[4]).

Jede weitere Nullstelle für eine Funktion von (K), wofern eine solche noch vorhanden ist, zieht eine lineare, homogene

[1]) S. „XII“ und Weierstraß, a. a. O., 3. Kap.
[2]) S. „VI“. [3]) S. „X“. [4]) S. „X“.

Bedingungsgleichung nach sich. Im algebraischen Fall gibt es noch p Nullstellen, die also p Relationen genügen. Es ist das das *Abelsche Theorem in arithmetischer Fassung.* Ebenso muß jede weitere Nullstelle für ein Differential von $(\breve{K})$, wofern eine solche existiert, einer Gleichung genügen. Es ist das für die Differentiale ein völlig gleichberechtigtes Gegenstück zum Abelschen Theorem bei den Funktionen. — Jedes der beiden Theoreme kann auf dreifache Weise ausgesprochen werden: mittels Funktionen, Differentialen, Integralen; die beiden ersten sind transponierte Gleichungssysteme[1]).

XII. Die Umkehrprobleme.

Aus den Bedingungsgleichungen für die Nullstellen der Funktionen und der Differentiale entspringen zwei neue Umkehrprobleme, deren Lösung mir aber noch nicht gelungen ist.

III. Abschnitt.

Die Funktionen und Differentiale von zwei Variabeln.

Ein tieferes Eindringen in die Klasse wird erst ermöglicht durch die Aufstellung von Funktionen und Differentialen, welche außer von dem Argument noch von einem variabeln Parameter abhängen. *Wir stellen uns geradezu als Zielpunkt dieses höheren Abschnittes, alle Zusammenhänge zwischen den einzelnen Funktionen und Differentialen der Klasse zu erforschen.* Das geschieht der Reihe nach in den folgenden 6 Sätzegruppen.

I. Die Elementar-Funktionen und -Differentiale von zwei Variabeln.

Weierstraß beginnt in seiner Vorlesung gleich mit der Aufstellung der „Grundfunktion" $H(xy, x'y')$[2]). Analog hiezu stelle ich die von dem Argument z und Parameter x abhängende Elementarfunktion 1. Ordnung von (K)

[1]) S. „X". [2]) S. a. a. O. 2. Kap.

$$E^{(1)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(z,x) = \frac{\xi^{(1)}_i(z)\,\bar{\xi}^{(1)}_k(x) + \cdots + \xi^{(n)}_i(z)\,\bar{\xi}^{(n)}_k(x)}{z-x} + \cdots$$

auf[1]), von der ich nur den Hauptbestandteil hingesetzt habe. $\xi^{(1)}(z) \ldots \xi^{(n)}(z)$ sind dabei eine Basis für das Ideal $J(1)$ in (K), das komplementäre System $\bar{\xi}^{(1)}(x), \ldots \bar{\xi}^{(n)}(x)$ eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}}\right)$ in $(\bar{K})$. Bei festem x und k ist $E^{(1)}_{ik}(z,x)$ (d. h. die betr. Spalte) eine Funktion von (K); bei festem z und i ist $E^{(1)}_{ik}(z,x)$ (d. h. die betr. Zeile) eine Funktion von $(\bar{K})$. In ersterer Eigenschaft verhält es sich für $z = x$ und $i = k$ wie $\frac{1}{z-x}$ und ist im übrigen Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$; so erfolgt die Konstruktion, deren Unität nachgewiesen wird[2]).

Analog ist die Definition der Elementarfunktion $E^{(h)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}ik}(z,x)$ h^{ter} Ordnung von (K), welche sich für $z = x$ und $i = k$ verhält wie $\frac{1}{(z-x)^h}$. Der Ableitungssatz I_h lehrt, daß $E^{(h+1)}$ aus $E^{(1)}$ durch h malige Differentiation nach dem Parameter x entsteht[3]).

$\bar{E}^{(1)}_{\bar{\mathfrak{M}},\bar{\mathfrak{N}}ki}(x,z)$ und $\bar{E}^{(h)}_{\bar{\mathfrak{M}},\bar{\mathfrak{N}}ki}(x,z)$ haben für die Klasse $(\bar{K})$ die analoge Bedeutung.

Entsprechend baue ich ein Elementardifferential 1. Ordnung von (K) auf

$$\frac{d\,F^{(1)}_{\mathfrak{N},\bar{\mathfrak{M}}ik}(z_t, x_\tau)}{dz}\,\frac{dz}{dt}\,\frac{dx}{d\tau}$$

und der Ableitungssatz II_h lehrt wiederum, daß das Ele-

---

[1]) S. „VIII“ und „XII“.

[2]) Das Vorstehende soll nur dazu dienen, dem Leser anzudeuten, worum es sich handelt; es wird damit aber keine erschöpfende Darstellung gegeben.

[3]) S. „XII“.

mentardifferential $(h+1^{\text{te}})^{\text{ter}}$ Ordnung $\dfrac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{F_{ik}^{(h+1)}}(z,x)}{dz}$ durch h malige Differentiation nach dem Parameter x aus $\dfrac{dF^{(1)}}{dz}$ hervorgeht[1]).

$$\frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(1)}}(x,z)}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h)}}(x,z)}{dx}$$

haben für die Klasse $(\breve{K})$ die analoge Bedeutung.

II. Die Entwicklungstheoreme[2]).

Man beherrscht $E_{ik}^{(h)}(z,x)$ vollständig, wenn man die drei Fragen beantworten kann:

A) Wie lautet die Potenzentwicklung nach z und x gleichzeitig?

B) nach dem Parameter x allein?

C) nach dem Argument z allein?

Die Antwort auf die Frage B) für $h=0$ — genauer die Entwicklung von $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z,x_\tau)\dfrac{dx_\tau}{d\tau}$ nach τ in der Umgebung jeder Stelle von den E_i' — wird durch das fundamentale Entwicklungstheorem I_1 gegeben, welches aussagt, daß als Entwicklungs-Koeffizienten genau alle in VII. aufgestellten Elementarfunktionen entspringen. Durch dieses wie Entwicklungstheorem I_{h+1} werden *alle Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen von zwei und von einer Variabeln* geliefert.

Für $\dfrac{dF_{ik}^{(h)}(z,x)}{dz}$ bzw. $\dfrac{d\breve{F}_{ki}^{(h)}(x,z)}{dx}$ liegen dieselben Fragen vor, von denen B) ebenfalls durch das fundamentale Entwicklungstheorem II_1 (II_{h+1}) in derselben überraschend schönen und vollständigen Weise beantwortet und damit der *Zusammenhang zwischen den Elementardifferentialen von zwei und von einer Variabeln gegeben wird.*

---

[1]) S. „XII". [2]) S. „VIII" und „XII".

III. Die Vertauschungstheoreme[1]).

Der *Zusammenhang zwischen den Funktionen* $E_{ik}^{(h+1)}(z, x)$ *und den Differentialen* $\frac{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}{dx}\frac{dx}{d\tau}$ wird durch eine 1. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. I_{h+1}) geliefert:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} + (-1)^h \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x_\tau, z_t)}{dx}\frac{dx_\tau}{d\tau} + \cdots = 0$$

insbesondere für $h = 0$:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} - \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(1)}}(x_\tau, z_t)}{d\tau} = 0.$$

Der *Zusammenhang zwischen den Funktionen* $E^{(h+1)}$ *und* $\breve{E}^{(h+1)}$ durch eine 2. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. II_{h+1}) der Form

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x) + (-1)^h \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) + \cdots = 0^2),$$

wo die durch . . . angedeuteten Glieder ebenso wie die beiden ersten Glieder bei gleichzeitiger Vertauschung von z und x, i und k, sowie aller Größen mit ihren komplementären ungeändert bleiben (bis auf den Faktor $(-1)^h$).

Der *Zusammenhang zwischen den Differentialen* $dF^{(h+1)}$ *und* $d\breve{F}^{(h+1)}$ durch eine 3. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. III_{h+1}) der Form:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{F_{ik}^{(h+1)}}(z, x)}{dz} + (-1)^h \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x, z)}{dx} + \cdots = 0^2),$$

wobei . . . usw. Insbesondere für $h = 1$ liefert Vert. III_2 bzw. sein Korollar III_2^* im algebraischen Fall den *Vertauschungs-*

---

[1]) S. „XI“ und „XII“.

[2]) Die durch . . . angedeuteten Glieder sind jeweils Produkte aus einer Elementarfunktion von (K) und $(\breve{K})$ bzw. einem Elementardifferential von (K) und $(\breve{K})$.

satz von Weierstraß[1]) und M. Noether[2]). Allgemein stellt III_2 das funktionentheoretische Gegenstück zu den *berühmten* (formalen) *Vertauschungsidentitäten von Abel, Jacobi u. a.* bei den linearen Differentialgleichungen dar[3]).

IV. Die Reduktionstheoreme[4]).

In den drei Arten von Vertauschungstheorem denke ich mir die vorkommenden Funktionen und Differentiale in der Umgebung jeder Stelle von den E_i' entwickelt und zwar einmal nach dem Argument z (bezw. t), das andere mal nach dem Parameter x (bzw. τ). Ich suche den Koeffizienten der Potenz t^r bzw. τ^s, was mit Hilfe der Entwicklungstheoreme gelingt; dieser gleich Null gesetzt, liefert *sechs Arten von Reduktionstheoremen*, Red. I_{h+1} (t^r), Red. I_{h+1} (τ^s) — Red. III_{h+1} (τ_s), wodurch alle *Zusammenhänge zwischen den Elementar-Funktionen und -Differentialen von einer Variabeln* gegeben werden. Von der größten Wichtigkeit für die Einsicht in den Aufbau der Klasse sind Red. II_2 (τ^s) und Red. III_2 (t^r). Das letztere besagt insbesondere, daß alle Elementardifferentiale beliebiger Ordnung von $(\breve{K})$ ausgedrückt werden können 1. durch Elementardifferentiale 1. Ordnung, 2. eine endliche Anzahl ganz bestimmter unter ihnen und 3. die Ableitung einer Funktion. 2. besteht in dem Spezialfall, daß keine rein imaginären Exponenten α vorkommen aus den σ überall endlichen Differentialen und den σ zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Elementardifferentialen 2. Ordnung. Dieser Spezialfall liegt insbesondere vor, wenn $(K) = (\breve{K})$ eine algebraische Klasse ist und dann geht Red. III_2 (t^r) über in den Reduktionssatz von Weierstraß[5]).

V. Die Reziprozitätstheoreme[6]).

Indem ich in den 3 Arten von Vertauschungstheoremen jetzt den Koeffizienten von $t^r \tau^s$ aufsuche und gleich Null setze,

[1]) A. a. O., 11. Kap., S. 254. [2]) Math. Ann. 37 (1890), S. 459.
[3]) S. L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 2. Bd., I. Teil, Leipzig 1897, S. 411.
[4]) S. „XII". [5]) A. a. O.. 12. Kap., S. 263. [6]) S. „X" und „XII".

erhalte ich 3 Reihen von Reziprozitätstheorem $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe: Rez. I_{h+1}, Rez. II_{h+1}, Rez. III_{h+1}. Diese geben alle *Zusammenhänge zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Elementar-Funktionen und -Differentiale* an beliebigen Stellen von E_i'. Rez. I_1 besagt insbesonders: Der r^{te} Entwicklungskoeffizient der zur Stelle $\mathfrak{b}_\beta$ gehörigen Elementarfunktion $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{b}_\delta$ ist entgegengesetzt gleich dem s^{ten} Entwicklungskoeffizienten des zur Stelle $\mathfrak{b}_\delta$ gehörigen Elementardifferentials $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{b}_\beta$.

VI. Der allgemeine Reduktionssatz für Funktionen und Differentiale[1]).

Ich nehme schließlich eine beliebige Funktion bzw. ein beliebiges Differential, mache die Partialbruchzerlegung desselben — was nach Weierstraß mit Hilfe von $E_{ik}^{(1)}(z,x)$ mit einem Schlage geschehen kann — und wende auf alle auftretenden Elementardifferentiale gleichzeitig das Red. III_2 (t^r) an. Dann erhalte ich den allgemeinen Reduktionssatz für die Differentiale dahingehend, daß sich jedes Differential durch gewisse, genau angebbare einfachste Typen und die Ableitung einer Funktion darstellen läßt. Die Integralform des Satzes lehrt zweierlei: 1. was durch die Integrale Neues zu den Funktionen der Klasse hinzutritt; 2. wann sich ein Integral auf eine Funktion der Klasse reduziert. Als letzter Ausfluß erscheint im algebraischen Fall der Satz, daß sich jedes Abelsche Integral 2. Gattung durch $2p$ Fundamentalintegrale darstellen läßt.

Schlußbemerkung.

Seither ist es mir auch gelungen, den ganzen 2. Abschnitt der Weierstraßschen Vorlesung auf die Riemannschen Transzendenten auszudehnen[2]).

---

[1]) S. „XII" und Weierstraß, a. a. O, S. 264.

[2]) S. Die Integrale der Riemannschen Transzendenten. Berlin, 19. III. 1918, Math. Ann.

Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche [1]).

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 2. März 1918.

Im Anschluß an eine in diesen Berichten von mir veröffentlichte Reihe von Arbeiten, die sich mit der Theorie der unendlichen Kettenbrüche beschäftigen, möchte ich im folgenden einige mir nützlich erscheinende Ergänzungen mitteilen. Dieselben beziehen sich zum Teil auf eine zweckmäßigere Anordnung und Gestaltung gewisser allgemeiner Konvergenzkriterien, zum anderen Teil auf die Konvergenz sogenannter eingliedrig limitär-periodischer Kettenbrüche bzw. einer noch etwas allgemeineren Kategorie, die ich als „nahezu" eingliedrig periodische bezeichnen möchte. Darunter verstehe ich hier Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$, deren Teilzähler a_ν durchweg innerhalb einer gewissen Umgebung

[1]) [1] Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. 1898, S. 295.
[2] Über ein Konvergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. 1899, S. 261.
[3] Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. 1900, S. 463.
[4] Über einige Konvergenz-Kriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1905, S. 359.
[5] Über Konvergenz und funktionen-theoretischen Charakter gewisser limitär-periodischer Kettenbrüche. 1910, S. 3.
[6] Über die Konvergenz periodischer und gewisser nicht-periodischer Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. 1917, S. 221.
Die betreffenden Arbeiten werden im Texte, soweit erforderlich, mit [1]—[6] zitiert.

irgend einer bestimmten Zahl a liegen. Einen Satz über die Konvergenz analog gearteter Kettenbrüche von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ hat zuerst Herr Perron in seinem Lehrbuche[1]) (S. 280) angegeben, und Herr von Pidoll (welcher den Satz, schon vor der Veröffentlichung, aus den Korrekturbogen kennen gelernt hatte) hat denselben (mit unwesentlichen Änderungen der Formulierung) in seiner Dissertation[2]) (S. 36) aufs neue bewiesen. Der von mir hier mitgeteilte entsprechende Satz dürfte, wie ich glaube, nach Fassung und Beweis den Vorzug ganz besonderer Einfachheit haben[3]) und liefert als unmittelbare Folgerung eine Behandlung des „limitär-periodischen" Falles, die kürzer und einfacher ist, als die früher von mir angegebene[4]).

---

§ 1.

§ 1. Über zweckmässige Fassung und Anordnung gewisser Konvergenzkriterien für unendliche Kettenbrüche.

1. Während die Konvergenz bzw. Divergenz eines unendlichen Kettenbruches (einschließlich des besonderen Konvergenz- bzw. Divergenzcharakters) keine Änderung erleidet, wenn man ihn in einen äquivalenten überführt, so zeigen gewisse Konvergenzkriterien ein entgegengesetztes Verhalten, indem sie bei irgend einem bestimmten Kettenbruche eine Entscheidung liefern können, während sie bei unendlich vielen mit jenem äquivalenten vollständig versagen. Dies gilt insbesondere von

---

[1]) „Die Lehre von den Kettenbrüchen." Leipzig 1913.

[2]) „Beiträge zur Lehre von der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche." München 1912.

[3]) Der Vollständigkeit halber sei noch bemerkt, daß Fassung und Beweisführung des Satzes in Bezug auf die hier nicht berührte Frage nach der Gleichmäßigkeit der Konvergenz für den Fall, daß die oben mit a_ν und a bezeichneten Größen Funktionen einer komplexen Variablen sind, nach bekannten Methoden leicht ergänzt werden können.

[4]) s. [5], S. 36.

einem häufig angewandten, für einen speziellen Fall zuerst von Seidel und Stern aufgestellten, von mir auf Kettenbrüche mit beliebigen komplexen Gliedern übertragenen Kriterium[1]), nach welchem der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ unbedingt konvergiert, wenn:

$$(A) \qquad |b_\nu| - |a_\nu| \geq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Transformiert man aber den betreffenden Kettenbruch in den ihm äquivalenten: $\left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1}, \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty$, so tritt an die Stelle der obigen Differenz für $\nu > 2$ die folgende:

$$|c_\nu| \cdot (|b_\nu| - |c_{\nu-1} a_\nu|),$$

welche infolge der Willkürlichkeit von $c_{\nu-1}, c_\nu$, auch wenn die Beziehung (A) besteht, jede beliebige reelle Zahl vorstellen kann. Nun habe ich zwar späterhin gezeigt[2]), daß man durch passende Anwendung einer Äquivalenz-Transformation jene Konvergenz-Bedingung in die folgende überführen kann:

$$(B) \qquad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (p_\nu > 1),$$

welche für alle äquivalenten Kettenbrüche gleiche Wirksamkeit besitzt[3]). Aber diese bis zu einem gewissen Grade zufällige chronologische Folge der beiden Kriterien (A) und (B) erscheint doch keineswegs als die wirklich logische, da ja das Kriterium (A), wie unmittelbar ersichtlich, einen speziellen Fall (nämlich: $p_\nu = |b_\nu|$) von (B) darstellt. Aus diesem Grunde hielt ich es neuerdings für wünschenswert, an die Spitze der ganzen Darstellung das Kriterium (B) zu stellen, dem ich nun-

[1]) s. [1], S. 311.

[2]) s. [3], S. 367.

[3]) Indem ja der Ausdruck $\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}$ ungeändert bleibt, wenn

a_ν durch $c_{\nu-1} c_\nu a_\nu$

$b_{\nu-1}$ „ $c_{\nu-1} b_{\nu-1}$

b_ν „ $c_\nu b_\nu$

ersetzt wird.

mehr (mit gewissen, im wesentlichen schon früher von mir hinzugefügten vervollständigenden Zusätzen) die folgende Form gebe:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (bei beliebigen komplexen a_ν, b_ν einschließlich $a_\nu = 0$) ist *unbedingt konvergent*, wenn eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen ϑ_ν existiert, derart daß: $\vartheta_1 < 1$ und für $\nu \geqq 2$:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} 0 < \vartheta_\nu \leqq 1 \\ 0 \leqq \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| \leqq \vartheta_{\nu-1}(1 - \vartheta_\nu)^1). \end{cases}$$

Dabei ist, falls $a_1 \neq 0$[2]) stets:

$$\text{(1)} \qquad \left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{1}{1 - \vartheta_1} \cdot \left| \frac{a_1}{b_1} \right|,$$

außer wenn durchweg:

$$\text{(I')} \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = -\vartheta_{\nu-1}(1 - \vartheta_\nu) \neq 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

und zugleich:

$$\text{(I'')} \qquad \sum_2^\infty{}_\nu \frac{(1 - \vartheta_2)(1 - \vartheta_3) \ldots (1 - \vartheta_\nu)}{\vartheta_2 \vartheta_3 \ldots \vartheta_\nu} = +\infty,$$

in welchem Falle die Beziehung besteht:

$$\text{(1')} \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1}{1 - \vartheta_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch noch im Falle $\vartheta_1 = 1$ erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (I') und (II'') gleichzeitig bestehen: der Kettenbruch ist alsdann *außerwesentlich divergent*[3]).

---

[1]) Der Vergleich mit der Bezeichnungsweise in (B) gibt: $\vartheta_\nu = \frac{1}{p_\nu}$.

[2]) Ist $a_1 = 0$, so konvergiert der Kettenbruch gegen Null, abgesehen von dem Einzelfalle, auf den sich die folgende Fußnote bezieht.

[3]) Bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$.

Der Beweis, der sich zunächst dadurch etwas vereinfachen läßt, daß man den fraglichen Kettenbruch durch den ihm äquivalenten: $\left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty$ $\left(\text{wo } a'_1 = a_1 \text{ und für } \nu \geq 2\text{: } a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)$ ersetzt, kann im wesentlichen so geführt werden, wie ihn auf meine Anregung Herr von Pidoll auf S. 9—12 seiner Dissertation gegeben hat, und bedarf zur vollständigen Abrundung nur noch zweier ohne besondere Schwierigkeit durchzuführender Zusätze, deren einer den Nachweis zu liefern hat, daß die besondere Beziehung (1′) bzw. die Divergenz, die sichtlich eintreten, wenn die Bedingungen (I′) und (I″) bestehen, auch wirklich nur in diesem Falle eintreten können; während der andere auf die Erörterung der hier ausdrücklich zugelassenen Möglichkeit[1]) sich bezieht, daß unter den a_ν die Null vorkommt.

2. Aus dem vorstehenden Hauptkriterium ergeben sich durch Spezialisierung der ϑ_ν zunächst jene besonderen Kriterienformen, die ich bereits an früherer Stelle[2]) in analoger Weise abgeleitet habe. Da hierbei für die ϑ_ν durchweg solche Zahlenfolgen ausgewählt werden, welche von den a_ν, b_ν gänzlich unabhängig sind, so besitzen diese Kriterien gleich dem Hauptkriterium für alle unter sich äquivalenten Kettenbrüche den gleichen Grad von Wirksamkeit. Dies ändert sich naturgemäß, wenn für die ϑ_ν Ausdrücke verwendet werden, in denen die a_ν oder b_ν vorkommen. Hier zeigt sich nun der Vorzug der jetzt gewählten Anordnung, insofern man auf diesem Wege einen besseren Einblick in die zu wirklich brauchbaren Ergebnissen führenden Möglichkeiten gewinnt. Als eine zweckmäßige Wahl erweist sich zunächst die Annahme:

$$\vartheta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{|b_\nu|}, \tag{2}$$

wo ϱ_ν nach (I) der Bedingung zu genügen hat:

$$0 < \varrho_\nu \leq |b_\nu| \qquad \text{für } \nu \geq 2, \tag{3}$$

[1]) Im Hinblick auf diese Möglichkeit wurde bei der Fassung der Voraussetzung (I) auch die Annahme $\vartheta_\nu = 1$ zugelassen.

[2]) s. [3], S. 369—375.

während im allgemeinen $0 < \varrho_1 < |b_1|$ zu setzen ist und die Annahme: $\varrho_1 = |b_1|$ die bei der Fassung des Hauptkriteriums auf den Fall $\vartheta_1 = 1$ bezüglichen Einschränkungen erfordert.

Durch die Substitution (2) nimmt die zweite der Bedingungen (I) die Form an:

$$0 \leqq \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} \right| \leqq \frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \qquad (\nu \geqq 2),$$

anders geschrieben:

$$|b_\nu| \geqq \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \qquad (\nu \geqq 2), \tag{4}$$

so daß also, wenn nur diese Beziehung und außerdem die in (3) enthaltene und auch auf ϱ_1 bezügliche Teilbedingung besteht:

$$\varrho_\nu > 0 \qquad (\nu \geqq 1), \tag{4a}$$

die in Ungl. (3) enthaltene Beschränkung $\varrho_\nu \leqq |b_\nu|$ für $\nu \geqq 2$ auf Grund der Beziehung (4) schon von selbst erfüllt ist und nur noch die Bedingung:

$$b_1 \geqq \varrho_1 \tag{4b}$$

(mit den erforderlichen Einschränkungen für den Fall $|b_1| = \varrho_1$) einer ausdrücklichen Erwähnung bedarf.

Sind nun die Bedingungen (4), (4a, b) erfüllt und zwar $|b_1| > \varrho_1$, so konvergiert der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und es ergibt sich aus der Beziehung (1) (mit Berücksichtigung von: $\frac{1}{1-\vartheta_1} = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1}$), daß:

$$\left| \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \right| < \frac{|a_\nu|}{|b_\nu| - \varrho_1}, \tag{5}$$

abgesehen von jenem Ausnahmefalle, welcher bei gleichzeitigem Bestehen der beiden Beziehungen (I'), (I'') eintritt. Dabei würde die Beziehung (I') hier zunächst folgendermaßen lauten:

$$\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = -\frac{\varrho_{\nu-1}}{|b_{\nu-1}|} \cdot \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{|b_\nu|} \neq 0 \qquad (\nu \geqq 2),$$

und diese Beziehung besagt offenbar mit Rücksicht auf die Voraussetzung (4) dasselbe, wie die beiden folgenden zusammengenommen:

$$(6) \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}b_\nu} < 0, \quad |b_\nu| = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu \qquad (\nu \geq 2).$$

Infolge dessen nimmt die Bedingung (I''), wegen: $\frac{1-\vartheta_\nu}{\vartheta_\nu}$ $= \frac{|b_\nu| - \varrho_\nu}{\varrho_\nu} = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}\varrho_\nu}$, nach Hinzufügung des im übrigen einflußlosen Faktors $\frac{1}{\varrho_1}$ die Form an:

$$(7) \qquad \sum_2^\infty{}^\nu \frac{|a_2 a_3 \ldots a_\nu|}{(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty.$$

Sind sodann die Bedingungen (6) und (7) erfüllt, so findet man nach Gl. (1'):

$$(8) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - \varrho_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1}.$$

Die unbedingte Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ bleibt wiederum auch noch im Falle $|b_1| = \varrho_1$ (entsprechend der Annahme $\vartheta_1 = 1$) erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (6) und (7) bestehen. Alsdann wird auf Grund der Beziehung (8) zunächst:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = \frac{|b_2|}{|b_2| - \varrho_2} \cdot \frac{a_2}{b_2}$$

und, wenn man die beiden Bedingungen (6) für $\nu = 2$ wieder in die eine unmittelbar vorangehende zusammenzieht:

$$\frac{a_2}{b_1 b_2} = -\frac{|b_2| - \varrho_2}{|b_2|}$$

schließlich:

$$(9) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty = -b_1,$$

also der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ außerwesentlich divergent (sc. wenn $|a_1| > 0$, dagegen von der Form $\frac{0}{0}$, wenn $a_1 = 0$).

Durch Zusammenfassung der in den Beziehungen (4)—(9) enthaltenen Ergebnisse gewinnt man also das folgende Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist *unbedingt konvergent*, wenn eine Folge positiver Zahlen ϱ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) existiert, derart daß:

$$(C) \qquad \begin{cases} |b_1| > \varrho_1 \\ |b_\nu| \geq \dfrac{a_\nu|}{\varrho_{\nu+1}} + \varrho_\nu \qquad \text{für } \nu \geq 2. \end{cases}$$

Dabei ist, falls $a_1 > 0$, stets:

$$(c) \qquad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1},$$

außer wenn für $\nu \geq 2$ durchweg:

$$(C') \qquad \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0, \quad |b_\nu = \frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} + \varrho_\nu$$

und zugleich:

$$(C'') \qquad \sum_2^\infty{}_\nu \frac{|a_2 a_3 \ldots a_\nu}{(\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{\nu-1})^2} \cdot \frac{1}{\varrho_\nu} = +\infty,$$

in welchem Falle an die Stelle der Ungleichung (c) die Gleichungen treten:

$$(c') \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1}{|b_1| - \varrho_1} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \varrho_1}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch noch für $|b_1| = \varrho_1$ erhalten, außer wenn die besonderen Bedingungen (C') und (C'') gleichzeitig bestehen: der Kettenbruch ist dann *außerwesentlich divergent* (bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$)[1].

---

[1]) Setzt man $\frac{|a_\nu|}{\varrho_{\nu-1}} = \sigma_\nu \geq 0$, so kann man dem vorliegenden Kriterium auch die folgende Form geben:

Existieren zwei Folgen von Zahlen $\varrho_\nu > 0$, $\sigma_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), derart daß:

3. Das vorstehende Kriterium nimmt besonders einfache Formen an (von denen die erste das zu Anfang erwähnte Kriterium (A), die zweite eine von mir auch schon angegebene Umformung des letzteren[1]), die dritte neu ist), wenn für ϱ_ν je eine der folgenden drei Annahmen gemacht wird:

$$\varrho_\nu = 1, \quad \varrho_\nu = |a_{\nu+1}|, \quad \varrho_\nu = \sqrt{|a_{\nu+1}|} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei im zweiten und dritten Falle infolge der Voraussetzung $\varrho_\nu > 0$ $(\nu \geq 1)$ durchweg $|a_\nu| > 0$ für $\nu \geq 2$ anzunehmen ist. Mit dieser Zusatzbedingung ergibt sich sodann:

Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist *unbedingt konvergent*, wenn eins der folgenden drei Bedingungspaare erfüllt ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(D)} & |b_1| > 1, & |b_\nu| \geq |a_\nu| + 1 \\ \text{(E)} & |b_1| > |a_2|, & |b_\nu| \geq |a_{\nu+1}| + 1 \\ \text{(F)} & |b_1| > \sqrt{|a_2|}, & |b_\nu| \geq \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|} \end{array}\right\} \text{für } \nu \geq 2,$$

und zwar genügt sein Wert, falls $|a_1| > 0$, je einer der folgenden drei Ungleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} |b_1| \geq \varrho_1, \quad |b_\nu| \geq \varrho_\nu + \sigma_\nu \\ |a_\nu| = \varrho_{\nu-1}\,\sigma_\nu \end{array}\right\} \text{für } \nu \geq 2,$$

so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (abgesehen von dem im Texte erwähnten Divergenzfall) unbedingt konvergent.

Die Richtigkeit dieses Kriteriums läßt sich überdies auch ganz unmittelbar durch das Hauptkriterium von Nr. 1 verifizieren. Man findet nämlich auf Grund der oben getroffenen Festsetzungen für $\nu \geq 2$:

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\,b_\nu}\right| \leq \frac{\varrho_{\nu-1}\,\sigma_\nu}{(\varrho_{\nu-1}+\sigma_{\nu-1})\,(\varrho_\nu+\sigma_\nu)}$$

$$= \frac{\varrho_{\nu-1}}{\varrho_{\nu-1}+\sigma_{\nu-1}}\left(1 - \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu+\sigma_\nu}\right) = \vartheta_{\nu-1}(1-\vartheta_\nu),$$

wo jetzt für $\nu \geq 1$: $0 \leq \vartheta_\nu = \frac{\varrho_\nu}{\varrho_\nu+\sigma_\nu} \leq 1$. Vgl. auch v. Pidoll, Dissertation, S. 13.

[1]) s. [4], S. 366.

(d) $$\left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - 1}$$

(e) $$\left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - |a_2|}$$

(f) $$\left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \frac{|a_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}},$$

außer wenn für $\nu \geqq 2$ durchweg:

(D′) $\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0$, $|b_\nu| = |a_\nu| + 1$ und zugleich:
$$\sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu| = +\infty$$

(E′) $\dfrac{a_\nu}{b_{\nu+1} b_\nu} < 0$, $|b_\nu| = |a_{\nu+1}| + 1$ und zugleich:
$$\sum_2^\infty{}^\nu |a_2 a_3 \ldots a_\nu|^{-1} = +\infty$$

(F′) $\dfrac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} < 0$, $|b_\nu| = \sqrt{|a_\nu|} + \sqrt{|a_{\nu+1}|}$ und zugleich:
$$\sum_2^\infty{}^\nu \frac{1}{\sqrt{|a_\nu|}} = +\infty,$$

in welchen Fällen an die Stelle der Ungleichungen (d), (e), (f) die folgenden Gleichungen treten:

(d′) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = -\frac{|b_1| - 1}{|b_1|} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \text{ also: } \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - 1}$$

(e′) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - |a_2|} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{„} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - |a_2|}$$

(f′) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{|b_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}} \cdot \frac{a_1}{b_1}, \quad \text{„} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = \frac{|a_1|}{|b_1| - \sqrt{|a_2|}}.$$

Die *unbedingte Konvergenz* des Kettenbruches bleibt auch erhalten, falls in den auf $|b_1|$ bezüglichen Bedingungen (D), (E), (F) das *Gleichheitszeichen* steht, außer wenn die besonderen Beziehungen (D′), (E′), (F′) bestehen: der Kettenbruch ist alsdann *außerwesentlich divergent* (bzw. von der Form $\frac{0}{0}$, falls $a_1 = 0$).

Zusatz. Besteht die auf $|b_\nu|$ bezügliche Bedingung in (D), (E), (F) auch noch für $\nu = 1$, so reduzieren sich die Ungleichungen (d), (e), (f) auf die einfacheren:

$$(d'')\ \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1, \quad (e'')\ \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < |a_1|, \quad (f'')\ \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| < \sqrt{|a_1|},$$

und gehen in die entsprechenden Gleichungen über, wenn die Spezialbedingungen (D'), (E'), (F') — und zwar die in der zweiten Kolonne stehenden auch noch für $\nu = 1$ — erfüllt sind.

4. Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um ein Versehen zu berichtigen, welches sich in einer im vorigen Jahrgange dieser Berichte von mir veröffentlichten Mitteilung findet. Ich habe daselbst[1]) bemerkt, daß das in § 2 jener Mitteilung von mir bewiesene, von Herrn van Vleck als Theorem 3 bezeichnete Konvergenzkriterium in dem Perronschen Lehrbuche nicht erwähnt werde. Das beruht aber, worauf mich Herr Perron aufmerksam gemacht hat, in sofern auf einem Irrtum, als in seinem Buche ein allgemeineres Kriterium angeführt wird (S. 268, Theorem 34), in welchem das in Frage stehende als spezieller Fall enthalten ist[2]). Und zwar geht jenes allgemeinere Kriterium aus dem gewöhnlich als van Vleckssches oder van Vleck-Jensensches bezeichneten durch eine einfache Äquivalenz-Transformation hervor, so daß unter Voraussetzung dieses letzteren Kriteriums der ganze von mir a. a. O. gegebene Beweis entbehrlich wird. Die fragliche Äquivalenz-Transformation gestaltet sich im übrigen besonders einfach, wenn man sich auf den Beweis des von mir behandelten Sonderfalles beschränken will. Zunächst läßt sich das als Grundlage dienende van Vlecksche Kriterium in folgender Weise aussprechen:

---

[1]) s. [6], S. 222, Fußn. 2.

[2]) Der betreffende Satz findet sich übrigens auch am Schlusse der in der obigen Fußnote zitierten Jensenschen Arbeit mit dem Unterschiede, daß dort anstatt der lediglich notwendigen Existenz eines von Null verschiedenen $b_{2\nu+1}$ diejenige zweier konsekutiver $b_\nu \neq 0$, $b_{\nu+1} \neq 0$ vorausgesetzt wird.

Sind die für die Konvergenz des Kettenbruches $\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^\infty$ notwendigen Bedingungen nämlich:

$$(1) \qquad \begin{cases} |b_{2\nu+1}| > 0 \text{ für mindestens } \textit{ein } \nu, \\ \sum_1^\infty{}^\nu |b_\nu| = +\infty \end{cases}$$

erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch, wenn die von Null verschiedenen a_ν gleichbezeichnet sind und für die β_ν eine Beziehung von der Form besteht:

(2) $|\beta_\nu| \leq \gamma |a_\nu|$, wo γ eine beliebige positive Zahl.

Angenommen nun, es trete jetzt an die Stelle der letzten Ungleichung die Bedingung, daß die Zahlen $(-1)^\nu \cdot \beta_\nu$ (soweit sie von Null verschieden) gleichbezeichnet sein sollen. Dabei kann man, ohne die Allgemeinheit des Resultates zu beschränken, auf Grund einer bei Gelegenheit des oben erwähnten Beweises gemachten Bemerkung (a. a. O. S. 247) annehmen, daß diese $(-1)^\nu \cdot \beta_\nu$ dasselbe Vorzeichen haben, wie die a_ν. Man findet nun durch Äquivalenz-Transformation:

$$\left[\frac{1}{a_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^n = \frac{1}{c_0} \cdot \left[\frac{1}{a'_\nu + \beta'_\nu i}\right]_1^n,$$

wenn gesetzt wird:

$$c_{\nu-1} c_\nu = 1, \quad a'_\nu + \beta'_\nu i = c_\nu (a_\nu + \beta_\nu i) \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Der ersten dieser Bedingung wird aber genügt, wenn man setzt:

$$c_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(1 + (-1)^{\nu-1} i),$$

worauf sich ergibt:

$$a'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(a_\nu + (-1)^\nu \beta_\nu), \quad \beta'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(\beta_\nu + (-1)^{\nu+1} a_\nu)$$

und, wegen der gleichen Vorzeichen von a_ν und $(-1)^\nu \beta_\nu$:

$$|a'_\nu| = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,(|a_\nu| + |\beta_\nu|), \quad \beta'_\nu = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,||a_\nu| - |\beta_\nu||,$$

also:

$$|\beta'_\nu| \leq |a'_\nu|$$

d. h. die Teilnenner des transformierten Bruches genügen der Bedingung (2). Da überdies:

$$|a'_\nu + \beta'_\nu i| = |a_\nu + \beta_\nu i| = |b_\nu|,$$

so erfüllt der transformierte Bruch auch die Bedingungen (1), ist somit für $n \to \infty$ konvergent, und das gleiche gilt also schließlich für den ursprünglich gegebenen.

Da übrigens bei diesem Beweise die Bedingung (2) schon für $\gamma = 1$ erfüllt ist, so erkennt man unmittelbar, daß dabei die Tragweite des zu Grunde liegenden Kriteriums bei weitem nicht ausgenützt wird und daß daher das gewonnene Resultat einer merklichen Erweiterung fähig sein muß: diese Erweiterung besteht dann eben in dem oben erwähnten Jensen-Perronschen Satze.

§ 2. Über „nahezu" eingliedrig periodische und eingliedrig limitär-periodische Kettenbrüche.

1. Bedeutet a eine beliebige Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, für welche $|a| \geq \frac{1}{4}$, so hat die quadratische Gleichung:

$$y^2 - y - a = 0 \tag{1}$$

zwei Wurzeln verschiedenen absoluten Betrages. Wird sodann die absolut genommen kleinere dieser Wurzeln mit z' bezeichnet, so konvergiert bekanntlich der eingliedrig periodische Kettenbruch $\frac{a|}{1} + \frac{a|}{|1} + \cdots$ gegen den Wert $-z'$[1]).

Dieses Resultat läßt sich nach einer besonderen, von der üblichen abweichenden Methode herleiten[2]), welche für den hier zu behandelnden allgemeineren Fall als Vorbild dienen kann[3]). Bezeichnet man mit z die andere, also die absolut genommen größere Wurzel der quadratischen Gleichung (1), so daß also:

$$z + z' = 1, \quad zz' = -a, \quad |z'| < |z|, \tag{2}$$

so hat man zunächst identisch:

---

[1]) Über die auch noch im Falle $a = -\frac{1}{4}$ eintretende Konvergenz s. die Fußnoten auf Seite 78, 79.

[2]) Vgl. M. v. Pidoll, Dissert. S. 41.

[3]) Eine andere, gleichfalls auf der Substitution (2) beruhende Behandlung dieses Vorbildes s. [5], S. 36.

$$\frac{a}{|1}+\frac{a}{|1}+\cdots+\frac{a}{|1}+\cdots\equiv-\frac{zz'}{|z+z'}-\frac{zz'}{|z+z'}-\cdots-\frac{zz'}{|z+z'}-\cdots$$

und, wenn noch gesetzt wird:

$$\frac{z'}{z}=q, \quad \text{also: } |q|<1, \tag{3}$$

so ergibt sich mit Hilfe einer einfachen Äquivalenz-Transformation:

$$\frac{a}{|1}+\frac{a}{|1}+\cdots+\frac{a}{|1}+\cdots=-z\left(\frac{q}{|1+q}-\frac{q}{|1+q}-\cdots-\frac{q}{|1+q}-\cdots\right). \tag{4}$$

Nun ist aber nach einer bekannten Eulerschen Formel, betreffend die Umformung einer Summe in einen äquivalenten Kettenbruch:

$$1+\sum_1^n{}^{\nu} q_1 q_2 \cdots q_\nu = \frac{1}{|1}-\frac{q_1}{|1+q_1}-\frac{q_2}{|1+q_2}-\cdots-\frac{q_n}{|1+q_n}$$

und daher durch Übergang zum reciproken Werte:

$$1-\frac{q_1}{|1-q_1}-\frac{q_2}{|1+q_2}-\cdots-\frac{q_n}{|1+q_n}=\frac{1}{1+s_n},$$

wenn: $$s_n\equiv\sum_1^n{}^{\nu} q_1 q_2 \cdots q_\nu \neq -1,$$

also schließlich:

$$\frac{q_1}{|1+q_1}-\frac{q_2}{|1+q_2}-\cdots-\frac{q_n}{1+q_n}=\frac{s_n}{1+s_n}. \tag{5}$$

Daraus folgt aber, daß der vorliegende Kettenbruch für $n\to\infty$ in einen konvergenten übergeht, wenn s_n für $n\to\infty$ gegen einen von -1 verschiedenen Wert s konvergiert und daß in diesem Falle:

$$\left[\frac{q_1}{1+q_1}, \; -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^\infty=\frac{s}{1+s} \quad (\text{wo: } s\equiv\sum_1^\infty{}^{\nu} q_1 q_2 \ldots q_\nu \neq -1), \tag{6}$$

während im Falle: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=-1$ außerwesentliche Divergenz des Kettenbruches eintritt[1]).

[1]) Der Kettenbruch ist auch konvergent, wenn die Reihe „nach Unendlich“ (im komplexen Sinne) divergiert, d. h. wenn: $\lim\limits_{n\to\infty}|s_n|=+\infty$,

Die Anwendung dieses Ergebnisses auf Gl. (4), wobei jetzt, wegen $|q|<1$, $s \equiv \sum_1^\infty{}^\nu q^\nu = \frac{q}{1-q}$ wird, liefert sofort die gewünschte Beziehung:

$$\frac{a}{|1} + \frac{a}{|1} + \cdots + \frac{a}{|1} + \cdots = -zq, \text{ d. h. } = -z'^{1}).$$

2. Ein beliebiger Kettenbruch von der Form $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n$, wo $a_\nu \neq 0$, läßt sich zunächst rein formal stets auf die Formel (5) bringen (abgesehen von dem ersten Teilzähler d. h. schließlich einem dem Kettenbruche hinzuzufügenden Faktor). Setzt man nämlich für $\nu \geq 1$:

$$(7) \qquad z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}, \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu,$$

so findet man zunächst:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{z'_1}{z_1 + z'_1}, \quad -\frac{z_\nu z'_{\nu+1}}{z_{\nu+1} + z'_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}$$

und hieraus durch Äquivalenz-Transformation:

$$(8) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^n = \frac{a_1}{z'_1} \cdot \left[\frac{q_1}{1+q_1}, \quad -\frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right]_1^{n-1}.$$

Damit diese Beziehung einen Sinn hat, ist nur erforderlich, daß für $\nu = 1, 2, \ldots n$ die z_ν durch die Bedingungen (7) als bestimmte, insbesondere auch von Null verschiedene Zahlen definiert sind (was dann ohne weiteres auch für die z'_ν und q_ν gilt). Und man findet dann schließlich auf Grund der Beziehungen (5) und (6):

---

insbesondere also, wenn die Reihe „eigentlich" divergiert. Man findet in diesem Falle aus Gl. (5):

$$\left[\frac{q_1}{1+q_1}, \quad \frac{q_{\nu+1}}{1+q_{\nu+1}}\right] = 1.$$

[1]) Ist $q = 1$, d. h. $z = z' = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{4}$, so wird: $\sum_1^\infty{}^\nu q^\nu = +\infty$ und der Kettenbruch konvergiert also gegen den Wert $-\frac{1}{4}$. Der Umstand, daß hier die Konvergenz des Kettenbruches vermöge der Divergenz von $\sum q^\nu$ zu Stande kommt, stempelt diesen Fall zum Sonderfall.

$$(9) \qquad \left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{z_1'} \cdot \frac{s}{1+s} \qquad (s \neq -1),$$

d. h. der betreffende unendliche Kettenbruch ist konvergent, wenn die fragliche Bestimmbarkeit der z_ν sich auf jedes noch so große ν erstreckt und die Reihe $\sum_1^\infty \nu\, q_1 q_2 \ldots q_\nu$ gegen einen von -1 verschiedenen Wert s konvergiert, während im Falle $s = -1$ der Kettenbruch wieder als außerwesentlich divergent erkannt wird.

3. Im Anschlusse an dieses Ergebnis beweisen wir jetzt den folgenden Satz über die Konvergenz eines „nahezu" eingliedrig-periodischen Kettenbruches:

Ist a eine von Null verschiedene[1]) Zahl mit Ausschluß der reellen negativen, für welche $|a| \geqq \frac{1}{4}$, haben z, z', q die in Gl. (2) und (3) angegebene Bedeutung und setzt man:

$$(10) \qquad \sqrt{q} = \vartheta \quad (\text{also: } 0 < \vartheta < 1);$$

genügt sodann die unbegrenzte Folge der Zahlen a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ der Bedingung:

$$(A) \qquad \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right| \leq (1-\vartheta)^2 \quad (\text{also: } |a_\nu| > 0 \text{ für } \nu \geqq 2),$$

so *konvergiert* der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ mit Ausnahme eines besonderen Falles, in welchem *außerwesentliche Divergenz* eintritt (bzw. die Form $\frac{0}{0}$ zum Vorschein kommt, falls $a_1 = 0$ sein sollte).

Der Kettenbruch *konvergiert* ausnahmslos und zwar *unbedingt*, wenn die a_ν der engeren Bedingung genügen:

---

[1]) Die Ausschließung der Annahme $a = 0$ erscheint durch die Formulierung der Voraussetzungen (A) und (B) von vornherein geboten. Im übrigen bemerke man, daß nach einem bekannten Konvergenzkriterium (s. [4], S. 371, (II)) der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ ja ohnehin unbedingt konvergiert, falls durchweg $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$, so daß also für diese Umgebung der Stelle $a = 0$ von vornherein ein einfacherer und wirksamerer Satz besteht, als der in Frage stehende für $a \neq 0$.

$$\text{(B)} \qquad \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right| \leq (1-\sigma)(1-\vartheta)^2 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo σ die (allemal vorhandene)[1]) zwischen 0 und 1 gelegene Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$\text{(11)} \qquad \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2}\sigma^2 + \sigma - 1 = 0$$

bedeutet.

Beweis. Um die beiden Bedingungsformen (A) und (B) so weit als möglich gleichzeitig zu behandeln, wollen wir zunächst von der (beide Formen umfassenden) Voraussetzung ausgehen:

$$\text{(A, B)} \qquad \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right| \leq \varrho(1-\vartheta)^2, \quad \text{wo: } 0 < \varrho \leq 1.$$

Wird sodann nach der Vorschrift von Gl. (7) gesetzt:

$$z_\nu + z'_\nu = 1, \quad z_\nu z'_{\nu+1} = -a_{\nu+1}, \quad \frac{z'_\nu}{z_\nu} = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so folgt zunächst, wenn man in der ersten dieser Gleichungen ν durch $\nu+1$ ersetzt und sodann den Wert $z'_{\nu+1} = 1 - z_{\nu+1}$ in die zweite einführt:

$$z_\nu(1 - z_{\nu+1}) = -a_{\nu+1},$$

und man gewinnt daher die Rekursionsformel:

$$\text{(12)} \qquad z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}(z_\nu + a_{\nu+1}),$$

---

[1]) Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1+\vartheta^2}{1-\vartheta^2} = r,$$

so geht die quadratische Gleichung (11) nach Multiplikation mit r in die folgende über: $\sigma^2 + r\sigma - r = 0$,

besitzt also die beiden Wurzeln:

$$\tfrac{1}{2}(-r \pm |\sqrt{r^2+4r}|),$$

deren eine wegen:

$$r < |\sqrt{r^2+4r}| < r+2$$

wesentlich positiv und zugleich < 1 ist.

vermöge deren nach willkürlicher Annahme von z_1 die gesamte Folge der z_ν für $\nu \geq 2$ eindeutig bestimmt ist, sofern es nur gelingt, jenen Anfangswert z_1 so auszuwählen, daß niemals ein $z_\nu = 0$ zum Vorschein kommen kann. Um dieses Ziel zu erreichen, bilden wir aus Gl. (12):

$$z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}(z_\nu(z-1) - a_{\nu+1}),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von: $z - 1 = -z'$ und: $zz' + a = 0$ (so daß es also freisteht, innerhalb der äußeren Klammer den Summanden $zz' + a$ hinzuzufügen):

$$z - z_{\nu+1} = \frac{1}{z_\nu}(z'(z - z_\nu) + (a - a_{\nu+1})).$$

Hieraus durch Division mit z:

$$1 - \frac{z_{\nu+1}}{z} = \frac{z}{z_\nu}\left(\frac{z'}{z}\left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right) + \frac{a}{z^2}\left(1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right)\right)$$

und, wegen: $\frac{z'}{z} = q$, $\frac{a}{z^2} = -\frac{zz'}{z^2} = -q$:

$$1 - \frac{z_{\nu+1}}{z} = q \cdot \frac{z}{z_\nu}\left(\left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right) - \left(1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right)\right),$$

also schließlich:

$$(13) \quad \left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| \leq \vartheta^2 \cdot \left|\frac{z}{z_\nu}\right| \cdot \left(\left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| + \left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right|\right).$$

Bezüglich des Anfangswertes z_1 treffen wir nun die Festsetzung:

$$(14) \quad 1 - \frac{z_1}{z} = \varrho\vartheta(1-\vartheta) \quad \text{d. h. } z_1 = (1 - \varrho\vartheta(1-\vartheta))z$$

und zeigen, daß dann für jedes $\nu \geq 2$ die Beziehung gilt:

$$(15) \qquad \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| < \varrho\vartheta(1-\vartheta).$$

Denn, angenommen, es sei für irgend ein $\nu \geq 1$:

$$(15a) \qquad \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right| \leq \varrho\vartheta(1-\vartheta),$$

so folgt zunächst:

$$\left|\frac{z_\nu}{z}\right| = \left|1 - \left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right)\right|$$
$$\geq 1 - \varrho\vartheta(1-\vartheta)$$
$$> 1 - (1 - \vartheta = \vartheta \text{ (mit Ausschluß der Gleichheit selbst für } \varrho = 1)$$

und daher:

$$\left|\frac{z}{z_\nu}\right| < \frac{1}{\vartheta} \qquad (\nu \geq 1). \tag{16}$$

Mit Berücksichtigung der Annahme (15a) und der Voraussetzung (A, B) ergibt sich also aus Ungl. (13):

$$\left|1 - \frac{z_{\nu+1}}{z}\right| < \vartheta^2 \cdot \frac{1}{\vartheta}(\varrho\vartheta(1-\vartheta) + \varrho(1-\vartheta)^2) = \varrho\vartheta(1-\vartheta) \tag{15b}$$

und, da aus der Festsetzung (14) folgt, daß:

$$\left|1 - \frac{z_1}{z}\right| = \varrho\vartheta(1-\vartheta),$$

mithin die Annahme (15a) für $\nu = 1$ erfüllt ist, so gilt in der Tat die behauptete Ungleichung (15) für jedes $\nu \geq 2$.

Daraus folgt zunächst, daß alle z_ν von Null verschieden ausfallen.

Des weiteren läßt sich zeigen, daß die q_ν einen gewissen echten Bruch niemals übersteigen. Man hat nämlich auf Grund der Definitionsgleichungen (3) und (2):

$$|q - q_\nu| = \left|\frac{z'}{z} - \frac{z'_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{1-z}{z} - \frac{1-z_\nu}{z_\nu}\right| = \left|\frac{1}{z_\nu} - \frac{1}{z}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{z}\right| \cdot \left|\frac{z}{z_\nu}\right| \cdot \left|1 - \frac{z_\nu}{z}\right|$$

und sodann:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z+z'}{z}\right| = |1+q| \leq 1 + |q|,$$

also mit Benützung von Ungl. (15), (16) für $\nu \geq 1$:

$$\begin{cases} |q - q_\nu| < (1+|q|)\cdot\varrho(1-\vartheta) \\ \qquad\quad < (1+\vartheta^2)\ (1-\vartheta) \quad \text{(selbst für den Fall } \varrho = 1). \end{cases} \tag{17}$$

Ferner ist:

$$|q_\nu| = |q - (q - q_\nu)| \leq |q| + |q - q_\nu|$$

und daher schließlich:

$$(18) \quad |q_\nu| < \vartheta^2 + (1 + \vartheta^2)(1 - \vartheta) = 1 - \vartheta(1 - \vartheta)^2 < 1.$$

Daraus ergibt sich aber, daß die Reihe $\sum q_1 q_2 \ldots q_\nu$ konvergent ist und zwar auch im Falle $\varrho = 1$, d. h. wenn lediglich die Voraussetzung (A) besteht.

Wird dann wieder gesetzt:

$$\sum_1^\infty{}^\nu q_1 q_2 \ldots q_\nu = s,$$

so ist also nach dem in Nr. 2 gesagten der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ konvergent, ausgenommen den einzigen Fall $s = -1$, in welchem er außerwesentlich divergiert (bzw. die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, falls $a_1 = 0$ ist).

Es bleibt noch zu zeigen, daß das Eintreten dieses Divergenzfalles — übrigens auch für jeden der Kettenbrüche: $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_{n+1}^\infty$ für $n \geq 1$ — ausgeschlossen erscheint, falls die engere Bedingung (B) erfüllt ist, daß also unter dieser Voraussetzung stets $|1 + s|$ von Null verschieden ausfällt.

Man hat nun:

$$|1 + s| = \left| \frac{1}{1 - q} + \left(s - \frac{q}{1 - q} \right) \right| \geq \frac{1}{1 + |q|} - \left| s - \frac{q}{1 - q} \right|$$

und daher:

$$(19) \quad |1 + s| > 0, \text{ wenn: } \left| s - \frac{q}{1 - q} \right| < \frac{1}{1 + |q|}.$$

Um das letztere nachzuweisen, hat man zunächst:

$$(20) \quad \left| s - \frac{q}{1 - q} \right| = \left| \sum_1^\infty{}^\varkappa (q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa) \right| \leq \sum_1^\infty{}^\varkappa |q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa|$$

und sodann:

$$q_1 q_2 \ldots q_\varkappa - q^\varkappa = (q - (q - q_1)) \ldots (q - (q - q_\varkappa)) - q^\varkappa,$$

also (da das Glied $q^\varkappa$ bei Ausführung der Multiplikation sich weghebt:

$$(21)\quad |q_1 q_2 \dots q_\varkappa - q^\varkappa| \leqq (|q| + |q - q_1|) \dots (|q| + |q - q_\varkappa|) - |q|^\varkappa.$$

Aus der ersten der Ungleichungen (17) findet man, wegen $|q| = \vartheta^2 < \vartheta$:

$$|q - q_\nu| < \varrho\,(1 + \vartheta)\,(1 - \vartheta) = \varrho\,(1 - |q|) \quad (\nu \geqq 1)$$

und daher im Anschlusse an die Voraussetzung (B) für $\varrho = 1 - \sigma$ (wo: $0 < \sigma < 1$):

$$|q| + |q - q_\nu| < |q| + (1 - \sigma)\,(1 - |q|) = 1 - \sigma\,(1 - |q|).$$

Hiernach ergibt sich aus Ungl. (21):

$$|q_1 q_2 \dots q_\varkappa - q^\varkappa| < (1 - \sigma\,(1 - |q|))^\varkappa - |q|^\varkappa$$
$$< \varkappa\,(1 - \sigma\,(1 - |q|)^{\varkappa - 1} \cdot (1 - \sigma)\,(1 - |q|),$$

so daß die Ungleichung (20) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(22)\quad \left| s - \frac{q}{1 - q} \right| < (1 - \sigma)\,(1 - |q|) \sum_1^\infty{}^\varkappa\, \varkappa\,(1 - \sigma\,(1 - |q|))^{\varkappa - 1}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_1^\infty{}^\varkappa\, \varkappa\,(1 - \sigma\,(1 - |q|))^{\varkappa - 1} = \left(\frac{1}{\sigma\,(1 - |q|)} \right)^2$$

und daher:

$$\left| s - \frac{q}{1 - q} \right| < \frac{1 - \sigma}{\sigma^2\,(1 - |q|)} = \frac{1 - \sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{1 + \vartheta^2}{1 - \vartheta^2} \cdot \frac{1}{1 + |q|}$$
$$< \frac{1}{1 + |q|},$$

wenn:

$$\frac{1 - \sigma}{\sigma^2} \cdot \frac{1 + \vartheta^2}{1 - \vartheta^2} = 1, \text{ d. h. } \frac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2} \cdot \sigma^2 + \sigma - 1 = 0,$$

übereinstimmend mit Voraussetzung (11).

Somit ist auf Grund von Ungl. (19) der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ sicher konvergent, wenn die Voraussetzung (B) erfüllt ist. Und

da deren Wirksamkeit bei Weglassung beliebig vieler Anfangsglieder keine Einbuße erleidet, so konvergiert er unbedingt.

4. Ist $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a \neq 0$, so wird $\left|1 - \frac{a_{\nu+1}}{a}\right|$ für hinlänglich große ν beliebig klein, etwa für $\nu \geqq m$ klein genug, daß die Bedingung (B) des vorigen Satzes für $\nu \geqq m$ erfüllt ist, also der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_m^\infty$ unbedingt konvergiert und demgemäß $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ höchstens außerwesentlich divergiert, falls durchweg $a_\nu \neq 0$. Da dieses Ergebnis auch im Falle $a = 0$ bestehen bleibt (vgl. S. 80, Fußn. 1), so ergibt sich für jeden solchen „limitär-periodischen" Kettenbruch der Satz:

Ist $|a_\nu| > 0$ (für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$), $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, wo a jede beliebige Zahl sein kann, mit Ausschluß der reellen negativen, die numerisch $\geqq \frac{1}{4}$, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ höchstens außerwesentlich divergent und zum mindesten nach Weglassung einer passenden Anzahl von Anfangsgliedern unbedingt konvergent.

Da ferner für einen Kettenbruch von der allgemeineren Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ im Falle $|b_\nu| > 0$ die Äquivalenzbeziehung besteht:

$$(23)\quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a'_\nu}{1}\right]_1^\infty, \quad \text{wo: } a'_1 = \frac{a_1}{b_1} \text{ und für } \nu \geqq 2\text{: } a'_\nu = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu},$$

so folgt, daß ein solcher Kettenbruch schon den Charakter eines limitär-periodischen Kettenbruches besitzt, falls:

$$(24)\quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = a',$$

wo a' nur den zuvor der Zahl a auferlegten Beschränkungen zu genügen hat, damit der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab unbedingt konvergiert.

Hierzu wäre offenbar hinreichend, daß der betreffende Kettenbruch in dem üblichen Sinne limitär-periodisch, daß also etwa:

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = b \neq 0, \tag{25}$$

$\left(\text{wo } \frac{a}{b^2} \text{ nicht gleichzeitig reell negativ und numerisch } \geq \frac{1}{4}\right)$.

Andererseits verlangt aber die Bedingung (24) offenbar erheblich weniger. Bezeichnet man z. B. mit (ω_ν), (ε_ν) zwei Folgen positiver Zahlen, die den Bedingungen genügen:

$$\lim_{\nu\to\infty} w_\nu = +\infty, \quad \lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\omega_\nu}{\omega_{\nu-1}} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_{\nu-1}} = 1,$$

mit (a_ν), (b_ν) wieder die durch die Bedingungen (25) charakterisierten Zahlenfolgen, so haben auf Grund der Äquivalenzbeziehung (23) auch die beiden Kettenbrüche: $\left[\frac{\omega_\nu^2 a_\nu}{\omega_\nu b_\nu}\right]_1^\infty$, $\left[\frac{\varepsilon_\nu^2 a_\nu}{\varepsilon_\nu b_\nu}\right]_1^\infty$ limitär-periodischen Charakter, obschon die Teilzähler und -nenner des ersten den Grenzwert ∞ besitzen, diejenigen des zweiten (insbesondere also dessen Teilnenner entgegen der zweiten Bedingung (25)) gegen 0 konvergieren.

Hat man ferner zwar: $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, dagegen: $\lim_{\mu\to\infty} b_{2\mu-1} = b' \neq 0$, $\lim_{\mu\to\infty} b_{2\mu} = b'' \neq 0$, so folgt: $\lim_{\nu\to\infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = \frac{a}{b' b''}$, so daß also auch in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ den Charakter eines limitär-periodischen besitzt, obschon die $b_{2\mu-1}$, $b_{2\mu}$ verschiedenen Grenzwerten zustreben.

5. Der Wert $a = -\frac{1}{4}$ gehörte bei dem Satze über die Konvergenz des limitär-periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ (wo: $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$) schon zu den ausdrücklich ausgeschlossenen. Aber gleichwie die Annahme $a = -\frac{1}{4}$ für den schlechthin periodischen Kettenbruch $\frac{a|}{|1} + \frac{a|}{|1} + \cdots$ einen besonderen Fall

von Konvergenz liefert (vgl. S. 79 Fußn. 2), so kann auch der limitär-periodische Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ zum mindesten von einer gewissen Stelle ab noch (unbedingt) konvergieren, auch wenn: $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$. Es liegt zunächst die Vermutung nahe, daß dies insbesondere der Fall sein dürfte, wenn von einer gewissen Stelle ab durchweg: $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$. Und die Richtigkeit dieser Vermutung wird in der Tat durch Anwendung eines bekannten (in Fußn. 1, S. 80 erwähnten) Konvergenz-Kriteriums bestätigt. Danach ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ bei $|a_\nu| \leq \frac{1}{4}$ (für $\nu \geq 2$) stets unbedingt konvergent[1]).

Einigermaßen überraschend erscheint es dagegen, daß bei $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ auch dann noch Konvergenz stattfinden kann, wenn für jedes einzelne ν: $|a_\nu| > \frac{1}{4}$. Dies folgt aber aus einem anderen, der gleichen Quelle, wie das eben angeführte, entstammenden Konvergenz-Kriterium[2]), auf Grund dessen der Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{-\frac{\nu^2}{4\nu^2-1}}{1}\right]_1^\infty$$

(der auch durch den äquivalenten $\left[-\frac{\nu^2}{2\nu+1}\right]_1^\infty$ ersetzt werden kann) noch unbedingt konvergiert, obschon ja jeder Teilzähler numerisch oberhalb $\frac{1}{4}$ liegt und $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = -\frac{1}{4}$ ist.

Es hat keine Schwierigkeit, sich direkt davon zu überzeugen, daß hier der in den Fußnoten S. 78, 79 erwähnte Sonderfall vorliegt, bei dem die Konvergenz auf der („eigentlichen") Divergenz der dort mit $\sum q_1 q_2 \ldots q_\nu$ bezeichneten Reihe beruht. Wegen $a = -\frac{1}{4}$ hat nämlich die quadratische Gleichung (1) die Doppelwurzel $\frac{1}{2}$, so daß also (s. Gl. (3)):

[1]) Außerwesentliche Divergenz würde nur eintreten, wenn: $a_2 = -\frac{1}{2}$ und für $\nu \geq 3$ durchweg: $a_\nu = -\frac{1}{4}$.

[2]) s. [4], S. 372, III.

$$z = z' = \tfrac{1}{2}, \qquad q = 1$$

und sodann (s. Gl. (7)):

$$z_\nu + z'_\nu = 1, \; z_\nu z'_{\nu+1} = \frac{(\nu+1)^2}{4(\nu+1)^2 - 1} = \frac{\nu+1}{2\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{2\nu+3} \quad (\nu \geq 1).$$

Wird jetzt z_1 so fixiert, daß:

$$z_1 = \left(\frac{\nu+1}{2\nu+1}\right)_{\nu=1} \text{ d. h. } z_1 = \tfrac{2}{3},$$

so folgt allgemein für $\nu \geq 1$:

$$z_\nu = \frac{\nu+1}{2\nu+1}, \quad z'_{\nu+1} = \frac{\nu+1}{2\nu+3}, \quad \text{also: } q_\nu = \frac{z'_\nu}{z_\nu} = \frac{\nu}{\nu+1},$$

und daher auf Grund der Beziehungen (8) und (5):

$$\left[\begin{matrix} -\frac{\nu^2}{4\nu^2-1} \\ 1 \end{matrix}\right]_1^n = -\frac{s_n}{1+s_n}, \text{ wo: } s_n \equiv \sum_1^n{}^\nu q_1 q_2 \dots q_\nu = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{\nu+1},$$

mithin schließlich:

$$\left[\begin{matrix} -\frac{\nu^2}{4\nu^2-1} \\ 1 \end{matrix}\right]_1^\infty = -1.$$

Nachtrag zu dem Aufsatze:

Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte etc.

(Jahrgang 1916, S. 209.)

Bekanntlich beruht die wesentliche Bedeutung der zu einer Reihe $\sum a_\nu$ gehörigen Hölderschen bzw. Cesàroschen Grenzwerte auf deren Zusammenhang mit der Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$, also, mit Beibehaltung der a. a. O. eingeführten Bezeichnungen, auf Beziehungen von der Form:

$$(1\,a) \lim_{x \to 1} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) \text{ bzw. } (1\,b) \lim_{x \to 1} \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n \to \infty} S_n^{(\varkappa)}.$$

Nun ist durch den Nachweis der Äquivalenz jener beiden Grenzwertformen nicht nur der ziemlich umständliche Höldersche Beweis[1]) der Relation (1 a) völlig entbehrlich geworden, da deren Gültigkeit nunmehr ohne weiteres aus der verhältnismäßig leicht zu beweisenden Relation (1 b)[2]) folgt, sondern es haben die $S_n^{(\varkappa)}$ vermöge ihres einfacheren Bildungsgesetzes die $\mathfrak{M}_k(s_n)$ nahezu vollständig verdrängt. Bei dieser Sachlage scheint es vielleicht nicht ganz überflüssig, darauf hinzuweisen, daß vermöge des zwar den $\mathfrak{M}_\varkappa(s_n)$, nicht aber den $S_n^{(\varkappa)}$ zukommenden rein iterativen (und zugleich distributiven) Charakters, nachdem nun einmal die Äquivalenz der beiden Grenzwertformen erwiesen ist, gewisse Zusammenhänge sich ganz unmittelbar übersehen lassen, deren Feststellung bei ausschließlicher Verwendung der $S_n^{(\varkappa)}$ eine verhältnismäßig umständliche Rechnung oder die Verwendung sonstiger besonderer Hilfsmittel erfordert. Zur näheren Begründung dieser Bemerkung diene folgendes. Aus der Identität:

$$(n+1)\,s_n = \sum_0^n{}^{\nu}\,(n+1-\nu)\,a_\nu + \sum_0^n{}^{\nu}\,\nu\,a_\nu$$

$$= \sum_0^n{}^{\nu}\,s_\nu + \sum_0^n{}^{\nu}\,\nu\,a_\nu$$

folgt durch Division mit $(n+1)$:

$$(2_0) \qquad s_n = \mathfrak{M}_1(s_n) + \mathfrak{M}_1(n\,a_n)$$

und hieraus durch $\varkappa$-malige Mittelwertbildung:

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_\varkappa(s_n) = \mathfrak{M}_{n+1}(s_n) + \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n\,a_n)$$

für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$, übrigens für $\varkappa = 0$ mit Gl. (2_0) zusammenfallend, wenn man, wie bisher, $\mathfrak{M}_0(s_n)$ die Bedeutung von s_n beilegt. Besteht nun für irgend ein $\varkappa \geqq 0$ eine Beziehung von der

[1]) Math. Ann. 20 (1882), S. 535.

[2]) Wenn man noch die bekannte Transformation zu Hilfe nimmt:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\,a_\nu\,x^\nu = (1-x)^{\varkappa+1}\cdot\sum_0^\infty{}^{\nu}\,s_\nu^{(\varkappa)}\,x^\nu,$$

im wesentlichen zuerst bewiesen von Appell: Paris C. R. 87 (1878), p. 690. Vgl. auch dieser Berichte Bd. 31 (1901), p. 522.

Form $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n) = s$, so ergibt sich aus Gl. (2) unmittelbar der folgende Satz:

(A) Weiß man, daß $\sum a_\nu$ zum mindesten von der Ordnung $\varkappa + 1$ reduzibel ist, so bildet die Beziehung:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n a_n) = 0 \tag{3}$$

die *notwendige* und *hinreichende* Bedingung dafür, daß $\sum a_\nu$ schon von der Ordnung $\varkappa$ reduzibel ist. Dies gilt auch für $\varkappa = 0$, sofern man unter *Reduzibilität von der Ordnung* 0 die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ versteht.

Auf Grund dieses Satzes kann man aus der Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n) = s$ die Konvergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erschließen, wenn:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(n a_n) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{\varkappa}(n a_n) = \cdots = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{1}(n a_n) = 0.$$

Da aber andererseits schon aus: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_1(n a_n) = 0$ für jedes $\lambda > 1$ folgt: $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\lambda(n a_n) = 0$, so findet man:

(B) Weiß man, daß die Reihe $\sum a_\nu$ von irgend einer (beliebig hohen) Ordnung *reduzibel* ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre *Konvergenz* in der Beziehung:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{1}(n a_n) = 0. \tag{4}$$

Auf Grund des Cauchyschen Grenzwertsatzes ist aber diese letztere Beziehung sicher erfüllt, wenn: $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$, und somit folgt weiter:

(C) Für die *Konvergenz* einer bereits als *reduzibel* erkannten Reihe $\sum a_\nu$ ist *hinreichend*, daß:

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0. \tag{5}$$

Anders ausgesprochen:

Eine *divergente* Reihe $\sum a_\nu$ mit verschwindendem $\lim_{n\to\infty} n a_n$ kann niemals *reduzibel* sein.

In dieser letzten Form wurde der Satz zuerst von Herrn G. H. Hardy[1]) ausgesprochen. Die Kürze des von ihm gegebenen Beweises ist jedoch in sofern nur eine scheinbare, als derselbe nicht unerhebliche funktionentheoretische Ergebnisse zu Hilfe nimmt (nämlich die Relation (1 b) und einen bekannten Tauberschen Satz über die Konvergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $x = 1$), während hier zunächst der Satz (B) ganz unmittelbar aus der rein formalen Identität (2) hervorgeht und für die Herleitung von (C) dann nur noch der Cauchysche Grenzwertsatz erforderlich ist.

Auch die Sätze (A) und (B) finden sich bei Hardy[2]) mit dem Unterschiede, daß es sich dort immer um Reduzibilität im Cesàroschen Sinne handelt und daß demgemäß bei dem Analogon zu Satz (B) an die Stelle des Hölderschen Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_1(na_n)$ der entsprechende zur Reihe $\sum \nu a_\nu$ gehörige Cesàrosche Grenzwert tritt. Der Beweis gestaltet sich infolgedessen merklich umständlicher, während man andererseits mit Hilfe der Äquivalenz der betreffenden Grenzwerte aus dem hier gegebenen Satze (B) dessen Hardysche Form unmittelbar herleiten könnte. Herr Hardy benützt übrigens diese letztgenannten Sätze zum Beweise einer interessanten Verallgemeinerung des Satzes (C), welche aussagt, daß die Bedingung (5) durch die folgende, wesentlich weiteren Spielraum gewährende:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |na_n| < +\infty \tag{5 a}$$

ersetzt werden kann. Und für diesen Beweis sind dann, wie ausdrücklich zugegeben werden soll, die Hölderschen Mittelbildungen wohl kaum verwendbar.

---

[1]) Proc. London Math. Soc. (2), 8 (1910), p. 302.

[2]) A. a. O. p. 304.

Die Bedeutung des Drucksinns für die Wahrnehmung von Bewegung und Lage der Glieder.

Von M. von Frey.

Vorgelegt von O. Frank in der Sitzung am 2. März 1918.

Bringt man einen eingefärbten Stempel auf dem Daumenballen zum Abdruck und bewegt sodann den Daumen, so erfährt die Zeichnung wechselnde Verzerrungen. Das gleiche gilt für jeden anderen Teil der Körperoberfläche, in besonderem Maße für die Gegend über Gelenken von großem Bewegungsumfang und Freiheitsgrade. Sucht man die Zeichnung auf der Haut zur Deckung zu bringen mit einem zweiten Abdruck desselben Stempels auf Gelatinefolie oder Film, so gelingt dies im allgemeinen nicht, wenn nicht jede Bewegung vermieden oder dafür gesorgt ist, daß das Glied genau in die ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Die Haut wird also durch die Bewegungen beständig deformiert, was zu Erregungen des Drucksinns führen muß, sobald der Spannungszustand der Haut genügend verändert wird. Der hiezu nötige Bewegungsumfang des Gelenks wäre als die Wahrnehmungsschwelle für Bewegungen zu bezeichnen, vorausgesetzt, daß der Drucksinn allein oder doch in erster Linie für die Wahrnehmung aufkommt. Die Frage, ob dies der Fall ist, läßt sich am einfachsten durch Abstumpfung des Drucksinns entscheiden, womit ein Ansteigen der Wahrnehmungsschwelle verbunden sein müßte.

Wird die Bewegung nicht durch die Muskeln der Versuchsperson (Vp), sondern durch äußere Kräfte hervorgebracht

(passive oder geführte Bewegungen), so gibt der Versuch nicht ohne weiteres eine klare Antwort. Man findet nämlich hiebei in der Regel, daß die wirksamste Maßnahme zur Erhöhung der Wahrnehmungsschwelle darin besteht, die Haut am Angriffsort der Führung, nicht über dem Gelenk, in ihrer Empfindlichkeit herabzusetzen. Es bedarf besonderer Vorkehrungen, wenn die Beteiligung der letzteren deutlich hervortreten soll.

Zur Erregung der Haut am Angriffsort der Führung gibt es drei Veranlassungen. Die Führung muß einmal den Trägheitswiderstand des Gliedes überwinden durch Stoß oder Druck gegen die Haut, dessen Größe der Winkelbeschleunigung proportional ist. Sie übt zweitens eine schiebende Wirkung auf die Haut aus, die für einen gegebenen Bewegungsumfang um so größer ist, je mehr die Achsen der Führung und des Gelenks auseinander fallen. Endlich kann durch die Führung der Druck verändert werden, den das ruhende Glied von seiten seiner Unterlage erfährt.

Aus der erstgenannten Wirkung ergibt sich, daß ein bestimmter Wert für die Wahrnehmungsschwelle geführter Bewegungen oder kurz für die Führungsschwelle nicht angegeben werden kann, so lange die Winkelbeschleunigung unbekannt ist. Ist dieselbe genügend groß, so können Bewegungen von verschwindend kleinem Umfang oder auch nur die Antriebe hiezu erkannt werden. Daher der gewaltige Unterschied in der Größenordnung der bisher veröffentlichten Führungsschwellen, die von Goldscheider[1]) für das Ellbogengelenk zu $0{,}5^0$, von Störring[2]) zu $0{,}005^0$ gefunden worden sind. Aus der von Goldscheider angegebenen mittleren Geschwindigkeit (1^0/sek) und der Größe des Winkelausschlages ($0{,}5^0$) berechnet sich die (gleichförmig angenommene) Winkelbeschleunigung zu $4^0/\text{sek}^2$, während man für Störrings Versuche den Wert $121^0/\text{sek}^2$ erhält. In den Versuchen des letzteren ruhte der

[1]) A. Goldscheider, Gesammelte Abh., 2. Bd., Berlin 1898, S. 182.
[2]) G. Störring, Arch. f. d. ges. Psychol., Bd. 25, S. 178 (1912).

Unterarm auf einem wagrechten Brett, das um eine lotrechte, unter dem Ellbogengelenk angebrachte Achse gegen einen Anschlag gedreht wurde. An der Stelle, wo der Antithenar dem Brette aufliegt, d. h. in etwa 29 cm Abstand von der Achse, ist die Bogenlänge für $1/200^0 = 1/40$ mm oder 25 μ. Bei Bewegungen so kleinen Umfangs wird es wohl überhaupt nicht zu einer Änderung der Gelenkstellung kommen, sondern nur zu einer leichten Zerrung der auf dem Brette ruhenden Haut, die aber genügt, um den Bewegungsantrieb und seine Richtung zu erkennen. Die Vermutung wird gestützt durch die Angabe Störrings, daß die Vpp „den Eindruck der Bewegung nur in der Hand" hatten.

Sehr wertvolle Hilfe für die Erkennung von Bewegungsantrieben leistet ferner die zerrende und schiebende Wirkung, welche die Führung auf die Haut ausübt, wenn ihre Drehungsachse nicht zusammenfällt mit der des Gelenkes. Das Gestell eines Regenschirms mag als Beispiel dienen dafür, daß zwei durch ein Zwischenstück (Rippe oder Spante des Schirms) verbundene Stäbe (Stock und Spreize) sich um ihre parallelen Achsen nur drehen können unter gleichzeitigem Gleiten aneinander. Eine gleichartige Wirkung findet auch statt, wenn, wie in den Versuchen Goldscheiders, eine geradlinig fortschreitende Führung das Glied um seine Achse zu drehen sucht. Wie empfindlich die Haut gegen derartige Einwirkungen ist, haben Versuche von Bourdon gelehrt[1]).

Daß endlich auch der Wechsel im Gegendruck der Unterlage der Wahrnehmung dienen kann, braucht keine nähere Begründung. In all diesen Fällen bedarf es nicht einmal einer wirklichen Bewegung des Gliedes; es genügt zum Erfolge schon eine rein örtliche Inanspruchnahme der Haut.

Versteht man unter Bewegungswahrnehmungen im Gebiete der Glieder solche, die durch Drehungen in den Gelenken veranlaßt sind, so können zu Schwellenbestimmungen nur Verfahrungsweisen dienen, welche die er-

[1]) B. Bourdon, Année psychol., vol. 13, p. 139 (1907).

wähnten Fehlerquellen ausschließen oder doch möglichst unschädlich machen. Abzulehnen waren daher Hebungen der Glieder, seien sie hervorgebracht durch geradlinige (Goldscheider) oder drehende (Pillsbury[1]) Bewegung der Unterstützung; zu vermeiden war ferner die Lagerung des ganzen Gliedes auf einer drehbaren Unterstützungsfläche (Störring, Erismann[2]), weil damit notwendig die Erregung der distalen, mit dem feinsten Drucksinn ausgestatteten Hautgebiete verbunden ist. Endlich können Versuche an Fingergelenken (Goldscheider, Bourdon) deshalb nicht als vorteilhaft gelten, weil, abgesehen von der großen Empfindlichkeit der Haut, die Flächen am Angriffsort der Führung und die in der Gegend des bewegten Gelenkes sich experimentell nicht genügend auseinander halten lassen.

So bin ich schließlich zu einer Versuchsanordnung für das Ellbogengelenk gelangt[3]), an der folgende Besonderheiten hervorgehoben seien. Innerhalb eines kräftigen Rahmens aus Eisenguß von ⊏-Form, der aufrecht stehend an der Tischkante festgeschraubt ist, dreht sich in Spitzen um eine lotrechte Achse ein gußeiserner Bügel oder Halbring von 15 cm lichter Weite. An dem Rahmen ist mittelst eines seitlich hinausragenden Trägers die Befestigungseinrichtung für den Oberarm in Gestalt zweier breiter, rinnenförmiger, filzgefütterter Schienen angebracht, an dem drehbaren Bügel in entsprechender Weise die für den Unterarm. Der letztere wird nur an zwei verhältnismäßig kleinflächigen Stellen in der Gegend der distalen Enden der Vorderarmknochen gefaßt. Das Ellbogengelenk wird von dem Bügel auf der Streckseite umgriffen, aber nirgends berührt, während zwei an der Innenseite des Bügels in der Richtung der Drehungsachse vorspringende Stifte die Einstellung der Gelenkachse in diese Richtung erleichtern. Die Befestigungseinrichtung für den Unterarm läuft aus in eine lange Leiste, deren freies Ende von einem Schnurlauf in der

[1]) W. B. Pillsbury, Americ. Journ. of Psychol., vol. 12, p. 346 (1900).
[2]) Th. Erismann, Arch. f. d. ges. Psychol., Bd. 24, S. 180 (1912).
[3]) v. Frey und O. B. Meyer, Zschr. f. Biol., Bd. 68, S. 301 (1918).

einen oder anderen Richtung mitgenommen wird, während ein Zeiger die durchmessenen Strecken angibt. 2 cm entsprechen einer Drehung von 1°. Ein Elektromotor mit Schnecke und Stufenscheibe liefert die gewünschten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Die Versuche (bisher an 4 Personen) ergaben, daß der zu Beginn der Bewegung erfolgende Anstoß leicht untermerklich gemacht werden kann, wenn auf Beschleunigungen von 5 Winkelminuten/sek² herab gegangen wird. Viel schwieriger ist es, die oben als Zerrung der Haut beschriebene Wirkung zu verhindern, weil die mit der Stellung des Gelenks wechselnde Lage der Achse am Lebenden nur unsicher zu ermitteln und mit der Achse des Apparates in Einklang zu bringen ist. Man muß auch bei größter Sorgfalt in der Ausführung der Versuche damit rechnen, daß Erregungen der Haut am Angriffsort der Führung zur Wahrnehmung beitragen, was in den angestellten Prüfungen in der Weise zum Ausdruck kam, daß Herabsetzung der Empfindlichkeit der Haut an dieser Stelle durch Faradisation oder durch anästhesierende Einspritzungen in der Regel zu einer Erhöhung des Schwellenwertes führten.

War demnach die beschriebene Versuchsanordnung noch nicht imstande, das Auftreten einer unerwünschten Nebenwirkung vollständig zu unterdrücken, so gestattete sie doch den sicheren Nachweis, daß die das bewegte Gelenk überdeckende Haut von maßgebender Bedeutung für die Wahrnehmung ist. Es ergibt sich dies aus folgenden Erfahrungen.

1. Wird mit Hilfe von lähmenden Einspritzungen der Drucksinn in der Gegend des bewegten Gelenkes abgestumpft, nachdem dies schon vorher am Angriffsort der Führung geschehen ist, so erfährt die Wahrnehmungsschwelle eine weitere und sehr erhebliche Erhöhung. Die hieher gehörigen Versuche wurden so durchgeführt, daß nicht die Schwellen, sondern bei gleich bleibender Reizstärke (Bewegungsumfang 1°) der Prozentsatz der richtigen Urteile ermittelt wurde.

Vp	Prozentsatz der richtigen Urteile: vor der Einspritzung	Einspritzung am Orte der Führung	Einspritzung über dem Gelenk	Zahl der Prüfungen
M.	55	48,3	42,5	20, 30, 40
v. F.	90	68,7	36,9	20, 40, 80
M.	45	43,7	21,0	40, 40, 100

Die Einspritzung am Ort der Führung ist nur zum Teil von deutlicher Wirkung, stets dagegen die Einspritzung über dem Gelenk.

2. Finden Bewegungen schwellennahen Umfanges statt bei starker Streck- oder Beugestellung, so ist im ersten Falle die Wahrnehmung der Streckung, im zweiten die der Beugung begünstigt.

Prozentsatz der richtigen Urteile bei Streckstellung
Gelenkwinkel 169—174°
Bewegungsumfang 1°

Vp	Beugung	Streckung	Zahl der Prüfungen
v. F.	60,0	70,0	60
M.	30,4	53,6	56
v. F.	48,2	85,0	56

Prozentsatz der richtigen Urteile bei Beugestellung
Gelenkwinkel 43—49°
Bewegungsumfang 3/4°

Vp	Beugung	Streckung	Zahl der Prüfungen
M.	56,0	28,0	50
v. F.	75,9	27,6	56
M.	58,6	32,1	57

Aus den Selbstbeobachtungen der Vpp ergibt sich, daß in Streckstellung die leichtere Wahrnehmung der Streckung bedingt ist durch die Spannungszunahme der Haut in der Ellenbeuge, in Beugestellung die leichtere Wahrnehmung der Beugung durch die zunehmende Innigkeit der Berührung der Hautflächen in der Ellenbeuge. Die Haut auf der Streckseite des Ellbogengelenks ist entsprechend ihrer geringeren Empfindlichkeit weniger ausschlaggebend.

Die hier mitgeteilten von den Ausgangsstellungen abhängigen Verschiedenheiten in den Schwellenwerten stehen in Beziehung zu den Beobachtungen von J. Loeb[1]) und Störring[2]) betreffend die Schätzung selbsttätig zurückgelegter Strecken, wobei ebenfalls die Ausgangsstellung von großem Einfluß ist.

3. Begünstigt man durch künstliche Mittel (Pflasterstreifen) die Spannungszunahme der Haut für eine der beiden Bewegungsrichtungen, so ist die Wahrnehmung dieser Richtung erleichtert.

Prozentsatz der richtigen Urteile

Gelenkwinkel 105—108°

Pflasterstreifen 4,5 × 10 cm auf der Streckseite des Gelenks

Bewegungsumfang 3/4°

Vp	Beugung	Streckung	Zahl der Prüfungen
v. F.	56,9	14,8	56
M.	50,0	30,3	56
M.	35,0	15,0	20

Die drei Versuchsweisen lehren übereinstimmend, daß die Wahrnehmungsschwelle abhängt von der Empfindlichkeit der Haut über dem Gelenk und dem Grade ihrer Beanspruchung. Die Erkenntnis wird weiter gesichert durch die Selbstbeobachtung der Vpp, die von deutlichen, das Urteil bestimmenden Erregungen in diesen Hautflächen zu berichten wissen. Für sich allein würden solche Aussagen nicht beweisend sein.

Zur Aufnahme der Reize kann nur der Drucksinn der Haut in Frage kommen. Dies ist schon durch die Art der Reize (Deformation der Haut) gegeben. Daß Spannungsänderungen so geringen Grades, wie sie z. B. bei einer Drehung von $^3/_4{}^0$ im Ellbogengelenk entstehen, zu einem merklichen Erfolg schon genügen, liegt in der Ausbreitung der Deformation über größere Hautflächen und der damit verbundenen zentralen gegenseitigen Verstärkung der peripheren Einzel-

[1]) J. Loeb, Pflügers Arch., Bd. 41, S. 119 (1887).

[2]) G. Störring, a. a. O., S. 183—185.

erregungen[1]). Endlich spricht zu gunsten des Drucksinns die Sicherheit, mit der bei wahrgenommener Bewegung auch ihre Richtung erkannt wird. Falsche Urteile kommen selbst bei schwellennahen Reizen nur höchst selten (im Mittel aus allen Versuchen in 1,4 % der Prüfungen) vor, was auf eine hochentwickelte Ortsunterscheidung hinweist.

Die fragliche Leistung erweist sich somit als eine besondere Betätigungsform des Drucksinns; sie ist eine aus Druckempfindungen mit Hilfe der Erfahrung abgeleitete Wahrnehmung. Bewegungsempfindungen besonderer Qualität oder Modalität liegen ihr nicht zugrunde, weshalb diese Bezeichnung besser beschränkt bleibt auf jene psychischen Elemente, auf die sie mit Recht angewendet wird, auf die durch die Bogengänge des Ohres vermittelten Empfindungen.

Das Ergebnis der mitgeteilten Versuche lautet dahin, daß die Wahrnehmung von geführten Gliederbewegungen kleinen Umfangs durch den Drucksinn der Haut über dem bewegten Gelenke geschieht, wenn die Mitbeteiligung der Hautflächen am Angriffsorte der Führung durch geeignete Vorkehrungen ausgeschaltet oder doch stark zurückgedrängt wird. Die Abstumpfung der Empfindlichkeit an den bezeichneten Hautstellen führt zu großer Unsicherheit der Wahrnehmung bzw. zur Schwellenerhöhung. Die Mitwirkung weiterer Sinneseinrichtungen bei der Wahrnehmung kann daher nur für Bewegungen großen Umfangs in Frage kommen. In dieser Beziehung sei auf die dumpf schmerzhaften Empfindungen hingewiesen, die bei Herstellung äußerster Grenzlagen in den Gelenken auftreten und vermutlich durch die Spannung der Gelenkbänder veranlaßt sind.

Die gegenwärtig herrschende Lehre, welche die Wahrnehmung geführter Bewegungen durch die Nerven der Gelenke geschehen läßt, stützt sich hauptsächlich auf die Untersuchungen Goldscheiders. Derselbe glaubte die Erregung des

[1]) v. Frey und R. Pauli, Zschr. f. Biol., Bd. 59, S. 497 (1912).

Drucksinns am Angriffsort der Führung ausschließen zu können durch Lagerung der geführten Gliederabschnitte auf Gummikissen oder durch Herabsetzung ihrer Empfindlichkeit mittelst Kompression; er bezog sodann die Erhöhung der Führungsschwelle während der Faradisation des Fingergelenks auf die Vertaubung der Gelenknerven. Daß letzteres geschieht, ist nicht bewiesen, während die Vertaubung der Hautnerven leicht zu zeigen ist und ausreicht, die Schwellenerhöhung zu erklären. Die Annahme, daß durch Lagerung auf Gummikissen die Erregung des Drucksinns verhütet werden könne, ist, wie mir vergleichende Versuche mit verschiedenen Führungsarten ergeben haben, nicht zutreffend und ebensowenig läßt sich der gewünschte Erfolg durch vertaubende Kompression erreichen, weil die an die gedrückte Fläche proximal angrenzenden Hautstellen für die Wahrnehmung aufkommen.

Weit lehrreicher für die Frage der Beteiligung der Gelenknerven erschien mir der Versuch, dieselben auszuschalten bei unveränderter Empfindlichkeit der bedeckenden Haut. Dieser Zustand kann an resezierten Gelenken gegeben sein, namentlich dann, wenn die Prüfung so frühzeitig nach der Operation geschieht, daß eine Wiederherstellung der Nervenversorgung noch nicht in Frage kommt.

Durch das dankenswerte Entgegenkommen meines Kollegen Enderlen ist es mir möglich gewesen, einen solchen Fall zwei Monate nach der Operation mit dem oben beschriebenen Verfahren eingehend zu prüfen, wobei sich herausstellte, daß die Führungsschwelle unter gleichen Versuchsbedingungen völlig den normalen Werten entsprach, d. h. für das resezierte Ellbogengelenk 3/4° betrug[1]).

Die Beobachtung steht nicht allein, denn schon vor vielen Jahren haben Déjérine[2]) am luxierten, v. Strümpell[3]) am resezierten Gelenke auf die genaue Wahrnehmung geführter Bewegungen aufmerksam gemacht.

---

[1]) v. Frey, Zschr. f. Biol., Bd. 68, S. 339 (1918).

[2]) Nach B. Bourdon, Année psychol., vol. 18, p. 37 (1912).

[3]) A. v. Strümpell, D. Med. Wochenschr. 1904, Nr. 39 und 40.

Was von der sog. Gelenksensibilität zu halten ist, lehren die von Lennander und Öhrwall[1]) an eröffneten menschlichen Gelenken erhobenen Befunde, nach welchen die Gelenkknorpel sowie der darunter liegende Knochen völlig unempfindlich sind gegen jede Art mechanischer Reize. Die seit langem bekannte und von den genannten Forschern neuerdings bestätigte hohe Schmerzempfindlichkeit der Knochenhaut, der Gelenkkapsel und Gelenkbänder kommt für die hier erörterten Wahrnehmungen nicht in Betracht.

Eine andere in der neurologischen Literatur zur Zeit vertretene Ansicht geht dahin, daß Berührungsempfindungen durch die Haut, Druckempfindungen dagegen durch die tieferen Gewebe vermittelt werden (v. Strümpell[2]), Head[3]). Tritt man dieser Ansicht bei, so kann die Wahrnehmung geführter Bewegungen auf den tiefen Drucksinn bezogen werden. Dies ist der von Bourdon 1912 eingenommene Standpunkt, während er 1907 für die Haut eingetreten ist. Man darf vermuten, daß die Änderung seiner Auffassung durch die inzwischen erfolgten Veröffentlichungen Heads veranlaßt ist, denn eine experimentelle Begründung derselben hat er nicht versucht. Ich habe wiederholt Gelegenheit gehabt, auf das Unzureichende der angeblichen Beweise für das Bestehen der sogenannten tiefen Druckempfindung als einer besonderen Qualität hinzuweisen[4]), so daß ich auf eine neuerliche Erörterung glaube verzichten zu dürfen.

Obwohl die bisher mitgeteilten Versuche sich auf geführte Bewegungen beschränken, besitzen sie doch auch Bedeutung für die Wahrnehmung selbsttätiger Bewegungen (reflektorischer wie willkürlicher). Die psychologischen Grundlagen sind hier insofern einfacher, als mit dem Wegfall der bewegenden äußeren Kraft auch die Erregungen ausscheiden, die an

[1]) H. Öhrwall, Skand. Arch. f. Physiol., Bd. 32, S. 217 (1914).

[2]) A. v. Strümpell, a. a. O.

[3]) H. Head und W. H. R. Rivers, Brain, vol. 31, p. 355 (1908).

[4]) v. Frey, Ergebn. d. Physiol., Bd. 13, S. 105 (1913), Zschr. f. Biol., Bd. 63, S. 353 (1914) und Bd. 66, S. 432 (1916).

ihrem Angriffsorte gesetzt zu werden pflegen. Die Änderung der Gliederstellung wird dann ausschließlich wahrgenommen werden durch den Drucksinn der Hautflächen über den bewegten Gelenken. Anderseits sind die Wahrnehmungen aber dadurch wieder inhaltsreicher, daß die Spannungsempfindungen des Bewegungsapparates (Muskeln, Sehnen, Faszien) in sie eingehen[1]) und bei willkürlicher Betätigung die Innervationsempfindung oder, wie Ach sie genauer und wohl auch richtiger bezeichnet, die intentionalen Spannungsempfindungen[2]). Es ist in der Literatur wiederholt hervorgehoben worden, daß diese Empfindungen nichts aussagen können über die Gelenkstellung und über den Umfang ihrer Änderung, weil der Spannungszustand der Muskeln bei gegebener Gelenkstellung in höchstem Maße verschieden ist je nach der Stärke der Innervation und den zu überwindenden Widerständen. Ebensowenig stehen die Spannungsänderungen in den Muskeln und Sehnen in einer eindeutigen Beziehung zu den Stellungsänderungen im Gelenk. Die notwendige Kenntnis von dem zureichenden oder unzureichenden Erfolg der Muskeltätigkeit ist demnach nur durch den Drucksinn des bewegten Körperteils mit oder ohne Unterstützung durch den Gesichtsinn zu gewinnen.

Auf Grund dieser Überlegungen muß erwartet werden, daß Abstumpfung des Drucksinns eines Gliedes oder Gliedabschnittes den willkürlichen Gebrauch desselben erschwert, eine Vermutung, die sich mir bei Gelegenheit darauf gerichteter Versuche bestätigt hat. Die Abstumpfung wurde am Ellbogengelenk durch lähmende Einspritzungen in die Haut erreicht und führte neben Täuschungen über Stellung und Bewegung des Unterarms zu auffallender Unsicherheit und Ungeschick-

[1]) v. Frey, Zeitschr. f. Biol., Bd. 63, S. 129 (1914).

[2]) N. Ach, Über die Willenstätigkeit und das Denken. Göttingen 1905, S. 146. Ach nennt sie „intentionale Bewegungsempfindungen" und beschreibt sie als eine besondere Form von Spannungsempfindungen. Da der Ausdruck Bewegungsempfindungen bzw. Wahrnehmungen in der Physiologie bereits in dem von mir gebrauchten Sinne festgelegt ist, ziehe ich die Bezeichnung intentionale Spannungsempfindungen vor.

lichkeit im Gebrauche desselben. Weitere Versuche wurden am 1. Gelenk des Zeigefingers zweier Versuchspersonen ausgeführt. Die Hand wurde in eine Hohlform aus Gips gelagert, die von dem Zeigefinger nur das 2. und 3. Glied und die distale Hälfte des ersten frei ließ. Der Vp, der die Hand und der Apparat verdeckt blieb, war die Aufgabe gestellt, auf jeden 4. Schlag eines Sekundenpendels mit den beiden distalen Fingergliedern eine kurze und möglichst kleine Beugebewegung mit sofortiger Rückkehr in die Ausgangslage auszuführen und unmittelbar hinterher anzugeben, ob sie die Bewegung als groß, klein oder unmerklich empfunden habe. Die Bewegungen wurden optisch registriert. Reihen von je 10 solchen Bewegungen geschahen abwechselnd bei normaler und abgestumpfter Empfindlichkeit der Haut über dem Gelenk, welch letzterer Zustand durch Bestäuben mit Äther bis zu deutlicher Eisbildung herbeigeführt wurde. Die Folge war, daß die bis dahin recht gleichmäßigen und richtig eingeschätzen Ausschläge nun in ihrer Größe sehr stark wechselten und daß die ausgeführten Bewegungen unterschätzt wurden derart, daß vielfach große Ausschlage als unmerklich hingestellt wurden. Auf die gleichzeitig sich einstellende Schwierigkeit in die gewählte Ausgangsstellung zurückzukehren, komme ich sofort zu sprechen. Ich erinnere endlich an die eingehenden Versuche Goldscheiders zur Herbeiführung ataktischer Bewegungen im 1. Fingergelenk[1]), wozu er sich des faradischen Stroms bediente. Er bezieht, entsprechend seiner Auffassung die beobachteten Bewegungsstörungen auf die Abstumpfung der Gelenksensibilität, doch ist, wie vorstehend gezeigt wurde, nicht diese, sondern die Vertaubung der Hautnerven das Entscheidende.

Es ist eine durch zahlreiche physiologische (Exner[2], Trendelenburg[3]) und klinische Erfahrungen (v. Strümpell[4]) gesicherte Tatsache, daß die Unterbrechung sämtlicher zentri-

[1]) A. Goldscheider, a. a. O., S. 55 ff.
[2]) S. Exner, Pflügers Arch., Bd. 48, S. 592 (1891).
[3]) W. Trendelenburg, Arch. f. Physiol. 1906, S. 1.
[4]) A. v. Strümpell, D. Zschr. f. Nervenheilk., Bd. 23, S. 1 (1902).

petalen Bahnen eines Körperteils die Bewegungsfähigkeit desselben in hohem Maße schädigt. Die hier mitgeteilten Beobachtungen erweitern dieselbe in der Richtung, daß die Abstumpfung des Drucksinns für sich allein schon genügt, um deutliche Bewegungsstörungen hervorzurufen. In kennzeichnendem Gegensatz hiezu steht das Verhalten der Vp mit reseziertem Ellbogengelenk, bei der alle überhaupt möglichen Bewegungen glatt und sicher, wenn auch nicht mit der vollen Kraft eines gesunden Arms ausgeführt werden konnten.

Neben seiner Bedeutung für die Wahrnehmung der Gliederbewegung fällt aber dem Drucksinn auch eine sehr wichtige Rolle zu für die Wahrnehmung der Gliederlage. In den eben erwähnten Versuchen äußerte sich dies in der Weise, daß infolge der Kältewirkung die Einhaltung einer bestimmten Ausgangsstellung bzw. die Rückkehr in dieselbe sehr erschwert war. Die Reihen mit abgestumpfter Empfindlichkeit der Haut sind sofort kenntlich durch das unstäte Wandern des Spiegelbildes auf dem Spalt, oft in so hohem Maße, daß die Aufschreibung verloren ging.

In der Literatur wird im allgemeinen anerkannt, daß der Drucksinn zur Wahrnehmung der Gliederlage beiträgt, jedoch nur neben und in Anlehnung an den Gesichtsinn. Es wird gesagt, daß „Teile, deren Stellung wir nie oder nur selten durch den Gesichtsinn wahrnehmen, auch keine bestimmten Lage- und Stellungsempfindungen“ ergeben[1]). Es wird dann auf Zehen, Zunge, Gaumensegel, Kehlkopf und andere Beispiele verwiesen. Wie mir scheint, wird hier ein Anspruch erhoben, der nicht gerechtfertigt ist. Denn es kommt nicht darauf an, daß die Vorstellung, die man sich von der Lage dieser Organe macht, perspektivisch richtig ist, sondern daß sie einen richtigen Gebrauch derselben ermöglicht. Letzteres ist, geeignete Aufgaben vorausgesetzt, im allgemeinen zweifellos der Fall, so daß man mit dem Erfolge der Wahrnehmung zufrieden sein kann. Ich erinnere beispielsweise nur daran, daß es ohne Zuhilfenahme der Augen, ja mit ihrer Unter-

[1]) W. Nagel, Handb. d. Physiol., Braunschweig 1905, 3. Bd., S. 743.

stützung (durch Spiegel) kaum besser gelingt, ein in den Mund geratenes Haar mit der Zunge aufzuspüren und soweit gegen die Lippen vorzudrängen, daß es mit den Fingern erfaßt und entfernt werden kann.

Zugegeben muß indessen werden, daß in der Ruhe das Bewußtsein von der Lage der Glieder, bei Ausschluß der Augen, nicht besonders deutlich zu sein pflegt. Werden Bewegungen längere Zeit verhindert (Festhalten eines Gliedes in einer Gipsform), so können sogar ganz falsche Lagevorstellungen entstehen. Die Veranlassung zu solchen Unklarheiten und Täuschungen ist gegeben durch die im Gebiete des Drucksinns stark ausgeprägte Erscheinung der Adaptation oder Anpassung, die es mit sich bringt, daß dauernde Reize, wie sie z. B. ein ruhendes Glied von seiten der Kleidung oder der Unterstützungsfläche erfährt, sehr bald an Wirksamkeit einbüßen und schließlich unmerklich werden[1]). Die Vorstellungen von der Gliederlage würden daher noch weit weniger genau und vollständig sein, wenn nicht durch die fast beständigen, meist kaum beachteten Lage- und Stellungsänderungen der Wirkung der Anpassung entgegen gearbeitet würde.

Sherrington[2]) hat die rezeptorischen Einrichtungen des Organismus unterschieden in exterozeptive, durch äußere Reize in Erregung versetzte, und in propriozeptive, die auf Veränderungen innerhalb des Organismus ansprechen. Diese Scheidung ist für die Kennzeichnung bestimmter Nerven und Reflexarten berechtigt und brauchbar, läßt sich aber für eine Anzahl von Sinneseinrichtungen nicht durchführen. Was insbesondere den Drucksinn betrifft, so zeigen die hier mitgeteilten Versuche und Beobachtungen, daß ihm neben seiner exterozeptiven Funktion, die auf die Erkennung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Außendinge gerichtet ist, eine mindestens ebenso wichtige propriozeptive zugeschrieben werden muß, nämlich die Wahrnehmung von Lage und Bewegung der Körperteile.

[1]) v. Frey und A. Goldman, Zschr. f. Biol., Bd. 65, S. 183 (1914).
[2]) C. S. Sherrington, Integrative action etc. London 1906, p. 130.

Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme.

(2. Abhandlung.)

Von **Otto Frank.**

Vorgelegt in der Sitzung am 2. März 1918.

Die nachfolgende Mitteilung bildet eine Fortsetzung und Ergänzung der in diesen Sitzungsberichten unter dem gleichen Titel veröffentlichten Abhandlung (Sitzungsber. d. mathemat.-physikal. Klasse 1915, S. 289).

Sie soll die rechnerische Analyse des Schwingungsproblems für die Behandlung der graphischen Registrierung nutzbar machen. Im Verlauf der Untersuchung wurde ich wiederholt auf das allgemeine Schwingungsproblem und die Grundsätze der graphischen Registrierung zurückgeführt, weil ich bestrebt war, die Fragen in möglichster Allgemeinheit zu behandeln. Ich gehe deshalb von der allgemeinen Theorie aus. Dabei nehme ich aber ständig Rücksicht auf die praktischen Verhältnisse, insbesondere auf die Erfordernisse der experimentellen Untersuchung. Ich habe deshalb als Konstanten diejenigen gewählt, die experimentell leicht zu bestimmen sind, nämlich die Elastizitätskoeffizienten (c) bzw. die ihnen nahestehende Empfindlichkeit der Registriersysteme (γ) und die Schwingungszahlen (n), während ich die Massen oder Trägheitskoeffizienten in den Hintergrund treten lasse. Die letzteren sind kaum unmittelbar bestimmbar. Sie neben den anderen Konstanten in die Gleichungen einzuführen, würde die Übersicht verwirren, wie dies tatsächlich in der Literatur geschehen ist.

Im übrigen habe ich die Einführung reiner Zahlen bevorzugt: Zur Charakterisierung der Dämpfung die Zahl D, der Koppelung die Zahl K und der Veränderung des Ausschlags durch die dynamischen Beziehungen den Quotienten Q.

Allgemeines Schwingungsproblem.

Die Bewegungsgleichungen für Systeme von m Freiheitsgraden lassen sich (vgl. Rayl. S. 104/3) in folgender Form anschreiben:

$$\begin{aligned} e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + \cdots &= P_1 \\ e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 + \cdots &= P_2 \\ e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 + \cdots &= P_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Hierin sind x_1, x_2, . . . die Verrückungen, die als allgemeine Koordinaten verschiedener Art und verschiedener Dimension auftreten. P_1, P_2 . . . sind die auf das System einwirkenden Kräfte. e_{rs} bedeutet den Operator

$$e_{rs} = m_{rs}D^2 + b_{rs}D + c_{rs},$$

worin das Symbol D für d/dt, D^2 für d^2/dt^2 steht.

e_{rs} ist stets gleich e_{sr} (Rayl, S. 104). Die Koeffizienten m, b, c kann man als Trägheits-, Reibungs- und Elastizitätskoeffizienten bezeichnen. Unter ihnen heben sich analytisch diejenigen mit ungleichen Indices heraus: die $m_{12}m_{13}\ldots$, $b_{12}\ldots$, c_{12} usw. Sie kehren in allen einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems wieder. Werden sie $= 0$, so wird die Verbindung der Gleichungen untereinander gelöst. Sie verbinden also die Gleichungen miteinander. Physikalisch genommen bemessen sie die elastischen Reibungs- und Trägheitskräfte, welche die Einzelsysteme miteinander verkoppeln. Ich unterscheide nach der physikalischen Bedeutung deshalb zwischen elastischer, Reibungs-, und Trägheitskoppelung. Die Einteilung von Wien nach Kraft-, Reibungs- und Beschleunigungskoppelung erscheint mir inhomogen. Zur Not könnte man von den drei Klassen der Verrückungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskoppelung

sprechen. In der vorliegenden Abhandlung beschäftige ich mich fast durchweg nur mit elastischer Koppelung, nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden gebe ich auch die Gleichungen für Trägheitskoppelung bzw. gemischte elastische und Trägheitskoppelung an. Von der Behandlung der Reibungskoppelung sehe ich, weil sie bei mechanischen Spstemen keine Rolle spielt, vollständig ab. Die Koeffizienten der elastischen und der Trägheitskoppelung bringe ich in geeignete dimensionslose Form (vgl. unten).

Das Gesamtsystem setzt sich aus Einzelsystemen zusammen, die ich folgendermaßen definiere. Ein Einzelsystem umfaßt physikalisch einen bestimmten Massenpunkt mit den bis zu den benachbarten Massenpunkten reichenden elastischen, Trägheits-, und Reibungsverbindungen. Seine Bewegung ist durch die Bestimmung festgelegt, daß alle übrigen Massenpunkte unverrückt in der Lage $x = 0$ bleiben. Für nicht einwandfrei und nicht allgemein durchführbar halte ich die Angabe, daß man die Bewegung des Einzelsystems durch 0 Setzung der Koppelungskoeffizienten erhält. Man kann ein Einzelsystem nicht loskoppeln, ohne daß sich die elastischen Beziehungen der benachbarten Massen, ausgedrückt durch die Koeffizienten c_{11}, c_{22}, verändern. Auch die scheinbar einfachen Elastizitätskoeffizienten c_{11}, c_{22} sind zusammengesetzt aus elementaren Elastizitätskoeffizienten, die in die Koppelung eingehen, worauf ich unten zurückkomme. Richtig ist selbstverständlich, daß, wenn die Koppelung $= 0$ ist, sich die Bewegung in die selbstständige Bewegung der Einzelsysteme auflöst. (Anm. Die früher gegebene Definition der Einzelsysteme, die scheinbar nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden Bedeutung hat, gebe ich auf.)

Die Frequenzen der Einzelsysteme berechne ich mit n_1, n_2, . . . etc., die Frequenzen des Gesamtsystems mit n_a, n_b . . . Die niedrigste Frequenz oder die Hauptschwingungszahl mit n_h.

Die Weiterbehandlung der Gleichungen ist verschieden, je nachdem es sich um Eigenschwingungen oder erzwungene Schwingungen handelt. Ferner ist die Behandlung verschieden für Systeme ohne und mit Reibung bzw. Dämpfung.

Eigenschwingungen ohne Reibung.

Die Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ sind $= 0$ zu setzen. Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \cdots &= 0 \\ c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \cdots &= 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen m Gleichungen alle Koordinaten außer einer, so kann man das Resultat in der Form schreiben

$$\nabla x = 0,$$

worin ∇ die Determinante bezeichnet

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}$$

Setzt man die Determinante $= 0$, so erhält man eine Gleichung vom Grade $2m$ in D, deren Wurzeln λ die Schwingungszahlen bestimmen. Die Wurzeln sind hier bei der reibungslosen Bewegung rein imaginär, die Schwingungszahlen sind aus ihnen durch die Beziehung $\lambda = i n$ zu erhalten.

Die Determinante schreibe ich unter Einfügung der Trägheits- und Elastizitätskoeffizienten (Trägheitskoppelung $= 0$) und der Vorzeichen in folgender Weise um. Dabei wird statt $m_{11} : m_1 \ldots$ und statt $c_{11} : c_1 \ldots$ gesetzt.

$$\begin{vmatrix} m_1 \lambda^2 + c_1 & - c_{12} & - c_{13} \\ - c_{21} & m_2 \lambda^2 + c_2 & - c_{23} \\ - c_{31} & - c_{32} & m_3 \lambda^2 + c_3 \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Dividiert man die Kolonnen durch $m_1 m_2 m_3$, bzw. die Determinante durch das Produkt $m_1 m_2 m_3$, so erhält man, wenn die Ausdrücke

$$\frac{c_{21}}{m_1} = \frac{c_{21} c_1}{m_1 c_1} = \frac{c_{21} n_1^2}{c_1}$$

gesetzt werden, die folgende Form:

$$\begin{array}{lll} \lambda^2 + n_1^2 & -\frac{c_{12} n_2^2}{c_2} & -\frac{c_{13} n_3^2}{c_3} \\ -\frac{c_{21} n_1^2}{c_1} & \lambda^2 + n_2^2 & -\frac{c_{23} n_3^2}{c_3} \\ -\frac{c_{31} n_1^2}{c_1} & -\frac{c_{32} n_2^2}{c_2} & \lambda^2 + n_3^2. \end{array}$$

Aus der Determinante läßt sich erkennen, daß die von mir in der früheren Abhandlung für ein System von zwei Freiheitsgraden vorgeschlagene Einführung der Koppelungszahlen allgemein für beliebige Systeme möglich ist.

Als Koppelungszahl K_{rs} bestimme ich das Produkt $\frac{c_{rs}{}^2}{c_r \cdot c_s}$.

Man sieht nun, daß bei der Ausrechnung der Determinante im allgemeinen nur Potenzen der $\sqrt{K}$ bzw. deren Produkte auftreten können, weil die Einzelindices in den Produkten der Koeffizienten c_{rs} als Kolonnen- und Zeilenindices doppelt auftreten müssen. Die Produkte der Koppelungskoeffizienten können also durch die Produkte der Koppelungszahlen ersetzt werden. Ich halte die Einführung der $(m-1)$ Koppelungszahlen statt $2\,(m-1)$ Koeffizienten für sinngemäß, weil ein zwei Systeme verbindendes Moment für beide gleichwertig ist.

Für Registriersysteme spielt eine besondere Form der Koppelung, die ich als Kettenkoppelung bezeichne, die ausschlaggebende Rolle. Bei ihr sind die Massenpunkte in Reihen angeordnet. Eine Verknüpfung besteht nur zwischen benachbarten Massenpunkten der Reihe. Alle Koppelungszahlen K_{13}, K_{24} usw. sind $= 0$. In der obigen Determinante fallen die eingegrenzten Glieder weg. Es bleiben nur die Diagonale und die der Diagonale benachbarten, die Koppelungskoeffizienten enthaltenden, Glieder. In der Gleichung fallen die Wurzeln der Koppelungszahlen weg, weil sonst die Einzelindices in den Gliedern der Gleichung nicht doppelt vorkommen würden. So könnte bei der Determinante dritten Grades das Produkt $\frac{c_{21} n_1^2}{c_1} \times \frac{c_{32} n_2^2}{c_2}$ nur durch $\frac{c_{13} n_3^2}{c_3}$ vervollständigt werden und würde

dann zu $\frac{n_1^2 n_2^2 n_3^2}{K_{12} K_{23} K_{13}}$, was nicht möglich ist, weil bei der Kettenkoppelung der Koeffizient $c_{13} = 0$ ist. Einige praktische Regeln für die Bildung der Produkte werde ich unten geben. Im Gegensatz zu dieser Koppelungsart spreche ich von Netzkoppelung, wenn die Koppelungszahlen K_{13} . . . etc. endlich sind.

Die Koppelungszahlen lassen sich ebenso allgemein für die Behandlung der gedämpften Eigenschwingungen und der erzwungenen Schwingungen benutzen.

Die Koppelungszahlen liegen nur zwischen 0 und 1, d. h. sind echte Brüche. Wenn eine Koppelungszahl = 1 wird, treten besondere Verhältnisse auf, die ich unten (S. 145) behandle. Die Koppelungszahlen können bestimmte Zahlen sein, z. B. in dem Beispiel Rayl., S. 290 = $^3/_4$ oder sie können Funktionen von einer oder mehreren Konstanten sein.

Für die Trägheitskoppelung können ähnliche Zahlen eingeführt werden, wie ich in dem Kapitel über die Systeme von zwei Freiheitsgraden zeigen werde.

Eine Berechnung der Wurzeln der Gleichung ist in bequemer geschlossener Form nur für Systeme bis zu zwei Freiheitsgraden möglich. Von drei Freiheitsgraden ab müssen Vereinfachungs- und Annäherungsmethoden benutzt werden.

Eigenschwingungen mit Reibung.

Der Operator e_{rs} wird vollständig, d. h. zu $m_{rs} D^2 + b_{rs} D + c_{rs}$ und die Determinante enthält jetzt ungerade Potenzen von D bzw. λ. Die Gleichung läßt sich nicht mehr vom m^{ten} Grad in λ_2 behandeln, sondern sie wird vom $2\,m^{\text{ten}}$ Grad. Die Wurzeln sind nicht mehr rein imaginär, sondern komplex. Von den Gliedern der Determinante ändern sich nur die Diagonalglieder. Sie werden allgemein zu $m_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1$.

Wenn durch m_1 dividiert wird, so resultiert

$$\lambda^2 + 2 h_1 \lambda + n_1^2 \qquad \left(\text{worin } h_1 = \frac{b_1}{2 m_1}\right).$$

Bei Systemen von einem Freiheitsgrad hatte ich früher die Dämpfungszahl $D = \frac{h}{n}$ eingeführt. Sie hat sich dort sehr zweckmäßig erwiesen. Auch für gekoppelte Systeme, besonders für die wichtigen Systeme von zwei Freiheitsgraden erweist sich die Einführung als sehr nützlich. Das Diagonalglied wird dann zu $\lambda^2 + 2 D_1 n_1 \lambda + n_1^2$.

Die Lösung der Gleichung für die gedämpften Schwingungen ist wesentlich schwieriger als für ungedämpfte Schwingungen und erfordert schon bei Systemen von zwei Freiheitsgraden eine nicht ganz einfache Behandlung (s. unten).

In einem Fall läßt sich die Gleichung allgemein auf denselben Grad wie bei den ungedämpften Schwingungen zurückführen. Zu diesem Zweck entfernt man das zweite Glied in λ^{2m-1}, wie dies gewöhnlich bei Gleichungen höheren Grades geschieht, durch die Transformation:

$$\lambda = z - \frac{2 \Sigma h_i}{2m}$$

in eine Gleichung in z.

Das Diagonalglied wird dann zu

$$z^2 + \left(2 h_i - \frac{2 \Sigma h}{m}\right) z + \frac{\Sigma h}{m}\left(\frac{\Sigma h}{m} - 2 h_i\right) + n_i^2.$$

Das Glied in λ^{2m-1} wird

$$= z^{2m-2} z \left(2 \Sigma h - \frac{2m \Sigma h}{m}\right) = 0 \text{ w. z. b. w.}$$

Ist nun $h_1 = h_2 = h_3 \ldots$ usw., so resultiert als Diagonalglied $z^2 - h_i^2 + n_i^2$, d. h. der Grad der Gleichung wird $= m$ in z^2. Das Diagonalglied kann dann auch folgendermaßen geschrieben werden: $z^2 + n_i^2 (1 - D_i^2)$.

Die erzwungenen Schwingungen.

Die Analyse der erzwungenen Schwingungen stützt sich auf das oben angegebene System von simultanen Differentialgleichungen. Ich folge bei den allgemeinen Entwicklungen

zunächst wieder der Darstellung von Rayleigh, S. 145. Um die Verrückungen in jedem Zeitmoment zu bestimmen, löst man die Gleichungen nach x_1, x_2 usw. auf. Hierzu benutzt Rayleigh die Unterdeterminanten $\frac{d\nabla}{de_1}$ etc. von ∇ als Operatoren an P_1 etc.

Die Lösung wird

$$\nabla x_1 = \frac{d\nabla}{de_1} P_1 + \frac{d\nabla}{de_{21}} P_2 + \cdots$$

$$\nabla x_2 = \frac{d\nabla}{de_{12}} P_1 + \frac{d\nabla}{de_2} P_2 + \cdots$$

. . . . . .

Die Determinante und die Unterdeterminante sind hier zunächst aus den Operatoren $e_{rs} = m_{rs} D^2 + b_{rs} D + c_{rs}$ zusammengesetzt.

Bekanntlich kann man sich ohne Verlust von Allgemeingültigkeit auf periodische bzw. harmonische Kräfte beschränken. Sie seien in der Form $P_1 = E_1 e^{i\nu t}$ gegeben. Nach Ausführung der Differentiation usw. sieht man, daß die gewünschte partikuläre Lösung in folgender Form angeschrieben werden kann:

$$x_1 \nabla(i\nu) = \left\{ \frac{d\nabla(i\nu)}{de_1} E_1 + \frac{d\nabla(i\nu)}{de_{21}} E_2 + \cdots \right\} e^{i\nu t} = A_1 e^{i\nu t}.$$

Hierin bedeutet ∇ jetzt dieselbe Determinante wie vorher, nur daß statt des Differentialoperators D: $(i\nu)$ gesetzt ist. Die Elemente der Determinante sind jetzt:

$$e_1 = c_1 - m_1 \nu^2 + i b_1 \nu, \quad \ldots e_{12} = c_{12} - m_{12} \nu^2 + i b_{12} \nu \text{ etc.}$$

Ebenso bedeuten die Ausdrücke $\frac{d\nabla(i\nu)}{de_1}$ usw. die entsprechenden Unterdeterminanten.

Zur Wegschaffung der imaginären Teile von A_1 und $\nabla(i\nu)$ werden sie in die reellen und imaginären Teile A_{1r} und A_{1i} bzw. $\nabla_r(i\nu)$ und $\nabla_i(i\nu)$ zerlegt. Dann schreibt sich die Lösung in folgender Form an:

$$x_1 = \frac{\sqrt{A_{1r}^2 + A_{1i}^2} \cos(rt + \vartheta_1 + \gamma)}{\{[\nabla_r(ir)^2 + r^2 [\nabla_i(ir)]^2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Phasenverschiebung ϑ_1 bemißt sich nach $\tan \vartheta_1 = \frac{A_{1i}}{A_{1r}}$; hierbei ist zu bemerken, daß ϑ_1 verschieden ist für die verschiedenen Freiheitsgrade.

Die Phasenverschiebung γ bemißt sich nach $\tan \gamma = \frac{\nabla_i(ir)}{\nabla_r(ir)}$. Im Gegensatz zu ϑ_1 ist γ gleich für alle Freiheitsgrade.

Bei einem System, das keine Reibung besitzt, reduzieren sich die Elemente der Determinante auf die Form $c_1 - m_1 \nu^2$ $\nabla(i\nu)$ wird reell, und die Lösung lautet:

$$x_1 = \frac{A_1 \cos \nu t}{\nabla(i\nu)}.$$

Ist die Periode der Kräfte dieselbe wie diejenige einer der Schwingungen des Gesamtsystems, oder $\nu = n_a$ bzw. n_b etc., so wird $\nabla(i\nu) = 0$ und die Amplitude wird unendlich. Denn, um die Eigenschwingungszahl zu ermitteln, muß die Determinante ∇, in welcher n_a für ν eintritt, $= 0$ gesetzt werden (vgl. oben).

Ist in diesem Fall, d. h. wenn $\nu = n_a$ bzw. n_b etc. ist, die Reibung klein aber endlich, so verschwindet $\nabla_r(i\nu)$, denn es enthält neben den Ausdrücken für die reibungslosen Bewegungen, die $= 0$ werden, die Reibungskoeffizienten nur in zweiter oder höherer Ordnung, während sie in $\nabla_i(i\nu)$ in der ersten Ordnung vorkommen. Daher wird $\tan \gamma = -\infty$ und

$$x = \frac{\sqrt{A_{1r}^2 + A_{1i}^2} \sin(\nu t + \vartheta)}{\nu \nabla_i(i\nu)}$$

d. h. die Amplitude wird sehr groß, aber was für die Registrierung von Wichtigkeit, ist umgekehrt proportional von ν.

Für die Verwertung dieser Theorie der erzwungenen Schwingungen für die Registrierinstrumente lassen sich die Beziehungen zweckmäßig in folgender Weise umschreiben. Man dividiert die einzelnen Gleichungen (s. S. 108) durch c_1, c_2 etc. und schreibt

$$e_1 = 1 - \frac{\nu^2}{n_1^2} + 2i \frac{\nu}{n_1} D_1 = 1 - R^2 + 2i R D_1.$$

Es treten jetzt nur mehr die Komponenten der Koppelungszahlen, die Dämpfungszahl und die Verhältnisse R der Schwingungszahl der erregenden Schwingungen zu den Eigenschwingungen auf. Die Determinante, die aus diesen Elementen zusammengesetzt ist, bezeichne ich kurz mit $\nabla(R)$.

Eine starke Vereinfachung der analytischen Beziehungen tritt ein, wenn man sich auf die für die Registrierung wichtigen Probleme beschränkt. Wenn wie hierbei stets alle Kräfte außer $P_1 = 0$ sind, so wird die Verrückung $x_n = \frac{d\nabla}{de_{1n}} \frac{P_1}{c_1}$. Beschränkt man sich auf Kettenkoppelung und ist die Reibungskoppelung $= 0$, so wird der Ausdruck noch wesentlich einfacher. Die Unterdeterminante schrumpft auf das Produkt der Elemente zusammen, die unter der Hauptdiagonale liegen. Sie wird $= c_{12} c_{23} \ldots c_{m-1\,m}$. Dieses Produkt ist reell. Damit wird $\vartheta = 0$. Der Ausdruck für die Verrückung lautet:

$$x_n = \frac{c_{12} c_{23} \ldots c^*_{m-1\,m} E_1}{c_1 c_2 \ldots c_m \{[\nabla_r(R)]^2 + \nu^2 [\nabla_i(R)]^2\}^{\frac{1}{2}}}; \quad \tan \gamma = \frac{\nabla_i(R)}{\nabla_r(R)}.$$

Die letztere Beziehung wird bei der allgemeinen Theorie zur Ermittlung des Quotienten Q verwertet (s. S. 120).

* Die Größen c_{12} usw. können noch die Trägheitskoppelung enthalten, d. h. $c_{12} - m_{12}$ usw. bedeuten, ohne daß sich an der Form etwas ändert.

Allgemeine Theorie der graphischen Registrierung.

Die Theorie der Registrierinstrumente hat die Aufgabe, die für die Leistungen der Systeme wichtigen Größen allgemein anzugeben, die Mittel zur Verbesserung der Instrumente zu liefern, die Methoden zur Bestimmung der wichtigen Konstanten zu begründen und die Prinzipien für eine Korrektur der registrierten Kurven festzulegen.

Die für die Beurteilung der Registriersysteme wesentlichen Größen sind 1. die Empfindlichkeit des Systems, 2. die Schwingungszahlen, insbesondere die Hauptschwingungszahl des un-

gedämpften Gesamtsystems, 3. das logarithmische Dekrement ermittelt aus den Dämpfungszahlen des Systems. Aus 1 und 2 leitet sich 4. die Güte G ab. Die Diskussion der Quotienten Q und der Phasenverschiebung erweist 5. die Bedeutung der Konstanten n, und D für die Kritik der Registriersysteme. In einem 6. Abschnitt diskutiere ich die Methoden für eine Korrektur der registrierten Kurven. Zur Bestimmung dieser wesentlichen Größen ist die Kenntnis der Schwingungszahlen der Einzelsysteme der Dämpfungszahlen der Einzelsysteme, der Koppelungszahlen des Systems, und teilweise auch der Elastizitätskoeffizienten notwendig.

1. Die Empfindlichkeit.

Die Empfindlichkeit des Systems ist der Ausschlag (die Verrückung) des Endpunktes des Systems unter statischen Bedingungen, dividiert durch die äußere Kraft, welche die Verrückungen hervorgerufen hat. Die Empfindlichkeit γ_e des Endpunktes des Systems wird gewöhnlich durch Hebelvergrößerung v (unter Umständen mit einem masselosen Lichthebel) auf die Empfindlichkeit γ_r des registrierten Punktes erhöht. Für die Empfindlichkeit γ_e läßt sich ein wichtiger allgemeiner Ausdruck entwickeln. Ich schreibe hierzu für ein System mit Kettenkoppelung die folgenden leichtverständlichen Beziehungen an

$$\begin{aligned} c_1 x_1 - c_{12} x_2 &= P_1 \\ -c_{21} x_1 + c_2 x_2 - c_{23} x_3 &= 0 \\ -c_{32} x_2 + c_3 x_3 - c_{34} x_4 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

Und

$$D = c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \begin{vmatrix} 1 & -c_{12}/c_1 & 0 \\ -c_{21}/c_2 & 1 & -c_{23}/c_2 \\ 0 & -c_{32}/c_3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} = c_1 c_2 \ldots c_m \\ (1 - K_{12} \ldots \\ - K_{m-1\,m} + K_{12} K_{34} \\ + K_{12} K_{45} + \cdots \\ - K_{12} K_{34} K_{56} \ldots). \end{matrix}$$

Daraus berechnet sich die Empfindlichkeit zu

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K_{12} K_{23} \ldots K_{m-1\,m}}}{\sqrt{c_1 c_m}(1 - K_{12} - K_{23} \ldots + K_{24} K_{34} \ldots)}.$$

γ_e wird stets die Empfindlichkeit, die dem System zukommt, wenn P_1 die der Verrückung x_1 korrespondierende Kraft ist, und die Verrückung x_m eine einfache lineare Verschiebung darstellt. Z. B. bei manometrischen Systemen wird sie zu f/p, wenn in der ersten Gleichung $x_1 = V$, $c_1 = E'$ und $P_1 = p$ und in der letzten $x_m = f$ ist (vgl. vorhergehende Abhandlung S. 292, 293).

2. Die Schwingungszahlen des ungedämpften Systems.

Ihre Bedeutung und besonders die Wichtigkeit der Hauptschwingungszahl wird unten bei der Diskussion der Quotienten Q usw. nochmals erörtert werden. Im übrigen verweise ich auf das oben S. 110 ff. gesagte und mache besonders darauf aufmerksam, daß bei der Kettenkoppelung keine Quadratwurzeln von K auftreten. Ferner darauf, daß das letzte Glied der Gleichung die Form hat:

$$n_1^2 n_2^2 \cdots n_m^2 (1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} \cdots).$$

3. Das logarithmische Dekrement der Eigenschwingungen.

Es wird ebenso aus den Schwingungszahlen und den Dämpfungszahlen ermittelt, wie bei dem System von einem Freiheitsgrad (s. unten), d. h. es wird zu

$$\Lambda_a = \frac{D_a \pi}{\sqrt{1 - D_a^2}} \quad \text{etc.}$$

Umgekehrt kann man aus den logarithmischen Dekrementen der Schwingungen und den Schwingungszahlen die Dämpfungszahlen bzw. schließlich die Reibungskoeffizienten ermitteln.

Die Kenntnis der Frequenzen des gedämpften Systems ist bei den Registriersystemen nicht wichtig. Dagegen ist die Dämpfung zur Feststellung des sogenannten Dekrements von Bedeutung. Ich werde aber aus anderen Gründen bei Systemen von zwei Freiheitsgraden die Ermittelung der gedämpften Frequenzen behandeln.

4. Die Güte des Registriersystems.

Die Empfindlichkeit und die Schwingungszahl des Systems bestimmen in allererster Linie die Leistungen des Systems. Die Dämpfung spielt eine vergleichsweise geringere Rolle, sie hat im wesentlichen die Aufgabe, die Schädlichkeiten einer zu geringen Schwingungszahl zu kompensieren. Eine einfache Betrachtung der Verhältnisse bei Systemen von einem Freiheitsgrad zeigt, daß eine Steigerung der Empfindlichkeit nur auf Kosten einer Verminderung der Schwingungszahl zustande kommt. Ich habe deshalb den Ausdruck $\gamma_r n^2$ als die Güte des Systems bezeichnet. Sie wird bei dem einfachen System von einem Freiheitsgrad = dem reciproken Wert der Masse. Zunächst sieht es so aus, als ob mit diesem Ausdruck nicht viel gewonnen wäre. Aber er hat sich schon bei Systemen sehr bewährt, die nicht unmittelbar Systeme von einem Freiheitsgrad sind, aber als solche behandelt werden können. So z. B. bei Flüssigkeitssystemen, insbesondere dem Kolbenmanometer, bei dem die Flüssigkeitsbewegung durch eine allgemeine Koordinate, die Volumverrückung, dargestellt werden kann. In noch höherem Maße wertvoll ist der Ausdruck für die Bemessung der Leistungen von gekoppelten Systemen. Hier existiert nicht mehr die einfache oben angegebene Beziehung $G = \frac{1}{m}$, sondern es sind so viele Einzelkonstanten vorhanden,

daß ihre Auswahl nur durch die Bestimmung von gewissen Maximis der Güte möglich ist. Als Schwingungszahl kommt, wie ich unten S. 121 zeigen werde, die Hauptschwingungszahl in Betracht. Die Güte hat verschiedene Dimensionen, je nach dem Charakter der Empfindlichkeit. Für manometrische Apparate ist die Dimension $= [L^2]$. Im übrigen gilt für sie Ähnliches, wie das oben über den Charakter der Empfindlichkeit gesagt ist.

Die Bestimmung des Maximums der Güte hat selbst dann, wenn die Bedingungen technisch nicht durchführbar sind, noch eine Bedeutung, nämlich die Grenze für die Leistungen der betreffenden Instrumente festzusetzen.

5. Der Amplitudenquotient Q und die Phasenverschiebung.

Die Veränderung der registrierten Kurve gegenüber dem zeitlichen Ablauf der Krafteinwirkung ist bedingt durch die Veränderung der Amplitude und die Phasenverschiebung. Über die Bedeutung der erstgenannten Veränderung erhält man am besten Aufschluß, wenn man den Quotienten der „dynamischen" Empfindlichkeit und der statischen Empfindlichkeit: Q einführt. Als „dynamische" Empfindlichkeit ist die Amplitude der erzwungenen Schwingungen dividiert durch die Kraftamplitude zu bezeichnen. Für die Kettenkoppelung läßt sich bei Abwesenheit von Reibungskoppelung hierfür ein sehr einfacher Ausdruck angeben. Es ist der Quotient aus der Größe x_n S. 116 und der Empfindlichkeit γ_e S. 118. Q wird dann zu

$$Q = \frac{1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} + \cdots}{\{[\nabla_r R]^2 + \nu^2 [\nabla_i R]^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tan \gamma = -\frac{\nabla_i R}{\nabla_r R}.$$

Für eine getreue Registrierung muß $R_1 = \frac{\nu}{n_1}$ etc. klein sein. Dann wird der Quotient $= 1$ und die dynamische Amplitude wird $=$ der statischen. Auf der andern Seite ist die

Phasenverschiebung $\gamma = 0$. Die Entstellungen treten auf, wenn die Schwingungszahl der erregenden Schwingung größer ist als die irgend einer Schwingung des Gesamtsystems. Es kommt also für die Beurteilung der Entstellungen die niedrigste Schwingungszahl, d. h. die Hauptschwingung des Systems in Betracht, vgl. S. 120 und 144.

Sehr wichtig für die Beurteilung der Registriersysteme ist auch die Frage nach der Lage und Größe der Resonanzmaxima, für deren Amplitude ich schon oben bei kleiner Dämpfung die Formel angegeben habe. Bei größerer Dämpfung fallen die Maxima nicht auf die Stelle der Koinzidenz der Schwingungszahlen der erregenden Schwingung und der Eigenschwingungen, sondern sie liegen im allgemeinen vor diesen Punkten (vgl. jedoch S. 143). Bei bestimmten Dämpfungen verschwindet das Maximum. Diese Verhältnisse werde ich bei den Systemen von zwei Freiheitsgraden eingehend erörtern.

6. Die Korrektur der registrierten Kurven.

Die Korrektur der registrierten Kurven läßt sich unter Benützung der Konstanten des Systems durchführen. Bei Systemen von einem Freiheitsgrad steht hierzu die Differentialgleichung und ihr Integral, d. h. die erzwungene Schwingung zur Verfügung. Man sieht, daß für gekoppelte Schwingungen nur die letztere Möglichkeit besteht, wenn man die Struktur der simultanen Differentialgleichung ins Auge faßt. Denn unmittelbar aus der Kurve sind nur die Verrückungen des Endpunktes bzw. des Registrierpunktes des Systems zu entnehmen, während die anderen allgemeinen Koordinaten nicht bekannt sind. Dagegen läßt sich die zweite Korrekturmethode unter Zerlegung der Kurve in eine Fouriersche Reihe, Korrektur der Teilschwingungen nach Amplitude und Phase und Wiederzusammensetzung der korrigierten Fourierschen Reihe durchführen.

Vereinfachung der Systeme und angenäherte Lösung der Gleichungen für reibungslose Schwingungen.

Wie ich schon in der vorhergehenden Abhandlung auseinandergesetzt habe, ist die rechnerische Behandlung kontinuierlicher Systeme (bzw. solcher von unendlich vielen Freiheitsgraden), an denen diskrete Massen angebracht sind, schwierig und vor allem wenig übersichtlich. Es besteht das Bedürfnis nach Vereinfachung der Systeme. Hierzu stehen zunächst zwei Methoden zur Verfügung. Bei der einen erteilt man dem System einen willkürlichen Schwingungstypus. Man läßt z. B. die Saite in Form einer in der Mitte geknickten Geraden schwingen, berechnet die kinetische und potentielle Energie für diesen Typus und hieraus die Schwingungszahl. Wie Rayleigh gezeigt hat, fällt diese Schwingungszahl stets höher aus als die wirkliche Hauptschwingungszahl, weil man bei diesem Verfahren das System einem Zwang unterwirft. Ich habe in der vorhergehenden Abhandlung mehrere Beispiele für Luftsäulen, Membranen usw. für diese Vereinfachungsmethode gegeben. Die Methode kann zu sehr guten Annäherungen führen. In den wichtigsten Fällen müßte man aber die kontinuierlichen Systeme auf solche von zwei und mehr Freiheitsgraden zurückführen, wofür ich ein geeignetes Verfahren noch nicht gefunden habe.

Für ebenso zweckmäßig halte ich, wie ich ebenfalls früher angedeutet habe, ein anderes Vereinfachungsverfahren, das man wohl als das Verfahren der Massenkonzentration bezeichnen kann (vgl. Rayl. Art. 52, 54 und 120). Es wird systematisch angewandt bei der Entwicklung der Schwingungsgleichung für die Saite. Dabei wird z. B. die Masse einer Saite oder eines Stückes der Saite oder ganz ähnlich einer Luftsäule in die Mitte der Länge verlegt. Diese Verlegung bedeutet einen Zwang, da ein besonderer Typus der Bewegung vorgeschrieben wird. Es müßte demnach die berechnete Frequenz zu hoch ausfallen, wenn die kinetische Energie richtig bemessen würde. Dies ist aber selbstverständlich nicht der Fall, wenn wie hier

die ganze Masse an dem Punkt der stärksten Verrückung gelegt wird. Sie wird zu groß angenommen selbst dann, wenn z. B. bei der Saite oder Luftsäule die halbe Masse in die Mitte verlegt wird und die übrigen Viertel an die Enden. Man sieht in dem letzteren Fall, daß der Zwang bedingt durch die Annahme der Bewegung in Form der geknickten Geraden zu einer um 10% zu hohen Schwingungszahl führt, während für die Belastung in der Mitte $m/2$ die kinetische Energie um 20% niedriger als bei diesem Bewegungstypus und gleichmäßig verteilter Masse ausfällt. Die Schwingungszahl wird also bei der Massenkonzentration in der Mitte immer noch um 10% zu niedrig ausfallen. Der richtige Wert wäre 0,4 m (vgl. Rayl. S. 57). Vorläufig kann man als Regel für diese Methode nur angeben, daß die Massen so zu verlegen und so zu bemessen sind, daß die wichtigsten Grenzfälle genügend richtig dargestellt werden. Bei der Berücksichtigung des Systems wird man sehr zweckmäßige und hinreichend richtige Vereinfachungen erzielen. So kann man das Transmissionsmanometer ohne Bedenken auf ein System von drei Freiheitsgraden zurückführen, weil bei ihm die Luftsäule, für welche die Massenkonzentration in Betracht kommt, nur eine geringe Rolle spielt, nötigenfalls hat man immer noch die genauen Formeln zur Verfügung (vgl. S. 147).

Bei Systemen, die eine höhere Zahl von Freiheitsgraden als zwei besitzen, kann die Lösung der Gleichungen für die Schwingungszahlen nicht mehr in übersichtlicher geschlossener Form erfolgen. In einer Reihe von Fällen kann man aber sehr gute angenäherte Lösungen erhalten.

1. Die Koppelungszahlen sind klein. Das letzte Glied sei:

$$n_1^2 n_2^2 \cdots n_m^2 (1 - K_{12} - K_{23} \cdots + K_{12} K_{34} \cdots).$$

Dann schreibt man die Gleichung in der Form an:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2) \cdots (\lambda^2 + n_m^2)$$
$$= n_1^2 \cdots n_m^2 (K_{12} + K_{23} \cdots - K_{12} K_{34} \cdots)$$

und setzt der Reihe nach $\lambda^2 = -n_1^2, -n_2^2, \cdots -n_m^2$.

Man erhält so lineare Gleichungen von der Form:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(n_2^2 - n_1^2) \cdots (n_m^2 - n_1^2) = n_1^2 \cdots n_m^2 (K_{12} + K_{23} \cdots).$$

Diese Methode ist im Grund die Newtonsche Annäherungsmethode zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Und diese beruht wieder auf der Entwicklung von $f(\lambda)$ nach der Taylorschen Reihe mit Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung. In ausgedehntem Maße werde ich diese Methode zur Lösung der Gleichungen von gedämpften Schwingungen von zwei Freiheitsgraden anwenden.

2. Die Schwingungszahlen von r Einzelsystemen werden unendlich. Ein sehr wichtiger Fall.

Die endlichen Schwingungszahlen des gekoppelten Systems erhält man aus den Gliedern $(\lambda^2)^{m-r}$ bis λ^0. Z. B. bei fünf Freiheitsgraden und Unendlichwerden von drei Schwingungszahlen z. B. der mittleren Einzelsysteme aus den Gliedern $(\lambda^2)^2$, $(\lambda^2)_u \lambda^0$, also aus einer quadratischen Gleichung.

Die (unendlich) großen Schwingungszahlen erhält man aus einer Gleichung, die aus den Gliedern $(\lambda^2)^m$ bis $(\lambda^2)^{m-r}$ besteht. Z. B. bei fünf Freiheitsgraden unter denselben Umständen wie vorher aus den Gliedern $(\lambda^2)^5$, $(\lambda^2)^4$, $(\lambda^2)^3$, $(\lambda^2)^2$, also aus einer Gleichung dritten Grades.

3. Eine Koppelungszahl $K_{rs} = 1$.

Man erhält einerseits eine angenähert richtige lineare Gleichung für die Hauptschwingung aus den beiden letzten Termen der Gleichung.

Andererseits eine Gleichung $(m-1)$ten Grades für die Oberschwingungen. Auch diese läßt sich reduzieren, wenn man berücksichtigt, daß nach dem Gesagten (S. 145) alle übrigen Koppelungszahlen außer K_{rs} sehr klein sind. Dann reduziert sich die Gleichung schließlich folgendermaßen:

$$(\lambda^2 + n_1^2)(\lambda^2 + n_2^2) \cdots (\lambda^2 + n_r^2 + n_s^2) = \text{dem vorletzten Glied der ursprünglichen Gleichung.}$$

In dieser Gleichung wird wie oben für λ^2 der Reihe nach $-n_1^2 \cdots -n_2^2 \cdots -(n_r^2 + n_s^2)$ gesetzt, und man erhält $m-1$ lineäre Gleichungen.

Systeme von einem Freiheitsgrad.

Ich schreibe die für die Registrierung wichtigen Beziehungen ohne weitere Erläuterung an:

$$\gamma_e = \frac{1}{c}, \quad n^2 = \frac{c}{m}, \quad G = \frac{1}{m}.$$

$$n' = n\sqrt{1 - D^2}, \quad \text{worin} \quad D = \frac{h}{n} = \frac{b}{2\,m\,n} = \frac{b\,n}{2\,c} = \frac{b}{2\sqrt{m\,c}}.$$

Logarithmisches Dekrement $\Lambda = \dfrac{D\,\pi}{\sqrt{1 - D^2}}$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{(1 - R^2)^2 + 4\,D^2\,R^2}}, \quad \tan\gamma = \frac{2\,D\,R}{1 - R^2}.$$

Systeme von zwei Freiheitsgraden.

1. Die Empfindlichkeit.

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{c_1\,c_2}}.$$

Zu beachten ist, daß, wenn $K = 1$ wird, zugleich $\sqrt{c_1\,c_2} = \infty$ wird, also γ_e einen endlichen Wert behält.

2. Die Frequenz des ungedämpften Systems.

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\,(n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\,n_1^2\,n_2^2\,K}$$

oder wenn man $n_2 = r\,n_1$ setzt:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\,n_1^2\,(1 + r^2 \pm \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4\,r^2\,K})$$

oder wenn $n_2 = n_1\,(1 + \varepsilon)$, worin ε klein ist:

$$n^2 = n_1^2\,(1 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + K + 2\,\varepsilon\,K})$$

ist $n_1 = n_2$, so wird $n^2 = n_1^2\,(1 \pm \sqrt{K})$.

Die Angabe angenäherter Lösungen hat neben Anderem die Bedeutung für die Beurteilung der Tragweite der angenäherten Lösungen bei den gedämpften Schwingungen.

Wenn K sehr klein ist, wird $n_a^2 = n_1^2 - \frac{n_1^2 n_2^2 K}{n_2^2 - n_1^2}$, $n_b^2 = n_2^2 + \frac{n_1^2 n_2^2 K}{n_2^2 - n_1^2}$. Ist $n_1 = n_2$, so versagt diese Newtonsche Annäherungsmethode, wenn man sich auf eine Annäherung erster Ordnung beschränkt. Nimmt man die Größen zweiter Ordnung dazu, so ergibt sich die Lösung $n = n_1\left(1 \pm \frac{\sqrt{K}}{2}\right)$, die mit der strengen Lösung für kleine K übereinstimmt.

Ist K annähernd $= 1$, so werden die Lösungen $n_a^2 = \frac{n_1^2 n_2^2 (1 - K)}{n_1^2 + n_2^2}$, $n_b^2 = n_1^2 + n_2^2$. Ist $n_1 = n_2$, so resultiert in diesem Fall (ebenso, wenn $n_2^2 = \infty$ ist):

$$n_a^2 = \frac{n_1^2 (1 - K)}{2}, \quad n_b^2 = 2 n_1^2 \text{ [1]},$$

vgl. hierzu die frühere Abhandlung S. 292.

3. Die Güte.

Nach S. 119 ist:

$$G = \frac{v\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{c_1 c_2}} \cdot \frac{n_1^2}{2}(1 + r^2 - \sqrt{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 K}).$$

Führt man die Massen durch die Beziehungen $c_1 = m_1 n_1^2$, $c_2 = m_2 n_2^2$ ein, so wird

$$G = \frac{v\sqrt{K}}{2(1 - K)\sqrt{m_1 m_2}}\left(r + \frac{1}{r} - \sqrt{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2 + 4K}\right).$$

Man sieht leicht, daß $\frac{dG}{dr} = 0$ wird, für $r = 1$, d. h. daß in diesem Fall die Güte ein — sehr wichtiges — Maximum hat. Das Maximum der Güte wird dann

$$\frac{v\sqrt{K}}{(1 + \sqrt{K})\sqrt{m_1 m_2}}.$$

[1]) Ergibt noch für $K = 0{,}5$, $r = 4$ nur 8,8% Abweichung von dem richtigen Resultat.

Fast durchweg besteht die Masse m_2 aus der auf den Endpunkt des Systems reduzierten Masse des Hebels. $= \frac{v^2 L \mu}{3}$, worin L die Länge und μ die Massendichte pro Längeneinheit ist. Führt man diesen Wert ein, so wird:

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1+\sqrt{K})\sqrt{m_1 L \mu/3}}$$

d. h. die Güte wächst mit wachsendem K und ist für

$$K = 1 = \frac{1}{2\sqrt{m_1 L \mu/3}}.$$

4. Zwei Freiheitsgrade, Elastizitäts- und Trägheitskoppelung.

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + c_{11} x_1 - c_{12} x_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + m_{12} \ddot{x}_1 + c_{22} x_2 - c_{12} x_1 = 0.$$

Die Empfindlichkeit ist dieselbe wie bei der reinen Elastizitätskopplung. Die Frequenz berechnet sich aus folgender Gleichung. In ihr ist die Trägheitskoppelungszahl $= T = \frac{m_{12}^2}{m_1 m_2}$

$$\lambda^4 (1-T) + \lambda^2 (n_1^2 + n_2^2 - 2 n_1 n_2 \sqrt{TK}) + n_1^2 n_2^2 (1-K) = 0.$$

Bezeichnet man das Verhältnis n_2/n_1 wie vorher mit r, so wird

$$n_{a,b}^2 =$$
$$\frac{n_1^2}{2(1-T)}\left[1+r^2-2\sqrt{TK} \mp \sqrt{(1+r^2-2\sqrt{TK})^2 - 4r^2(1-K)(1-T)}\right].$$

Die Güte wird, wenn man $r = 1$ setzt, maximal und zwar $=$

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1+\sqrt{K})(1-\sqrt{T})\sqrt{m_1 L \mu/3}}$$ vgl. diese Seite oben.

5. Die Schwingungen des gedämpften Systems.

Ich schreibe die Gleichungen in Determinantenform und aufgelöst an:

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2+b_1\lambda+c_1 & c_{12} \\ c_{21} & m_1\lambda^2+b_2\lambda+c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda^2+2D_1\lambda+1 & c_{12}r^2/c_2 \\ c_{21}/c_1 & \lambda^2+2D_2r\lambda+r^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + 2(D_1 + D_2 r)\lambda^3 + (1 + r^2 + 4rD_1D_2)\lambda^2 + 2(r^2 D_1 + rD_2)\lambda + r^2(1-K) = 0$$

$$r = \frac{n_2}{n_1}.$$

In der letzten Gleichung bedeutet λ die für die Schwingungszahl $n_1 = 1$ ausgerechnete Wurzel.

Zunächst stelle ich die Bedingungen fest, unter denen die Gleichung vierten Grades auf eine zweiten Grades reduziert werden kann. Ich bringe das Diagonalglied, die Determinante durch $\lambda = z - \frac{h_1 + h_2}{2}$ in die folgende Form (vgl. S. 113):

$$z^2 + (h_1 - h_2)z + \frac{(h_1 - h_2)^2}{4} - h_1^2 + n_1^2 \text{ usw.}$$

Dadurch fällt das Glied mit z^3 heraus. Das Glied mit z fällt dann weg, wenn

Fall 1. $h_1 = h_2$ ist. Das ist die gleiche Bedingung, die ganz allgemein gilt (s. S. 113).

Fall 2. Wenn $n_1^2 - h_1^2 = n_2^2 - h_2^2$ ist bzw. $1 - r^2 = D_1^2 - r^2 D_2^2$. Eine derartige Bedingung scheint nur für Systeme von zwei Freiheitsgraden zu bestehen.

In diesen beiden Fällen sind die sämtlichen Lösungen mit gleichen reellen Teilen der Wurzeln ($D_a = D_b$) und gleichen imaginären Teilen der Wurzeln ($n_a' = n_b'$) enthalten. Außerdem selbstverständlich der Fall der Doppelwurzel der quadratischen Gleichung.

Im Fall 1 ist die Lösung $\lambda = n_1(-D_1 \pm i\sqrt{n^2 - D_1^2})$, worin n^2 unter der Wurzel die zwei Schwingungen des ungedämpften Systems bedeuten. Wir bekommen

a) Zwei verschiedene komplexe Wurzeln mit gleichem reellem, aber stets verschiedenen imaginären Teil, so lange D_1^2 kleiner als n^2 der Hauptschwingung ist.

b) Überschreitet D_1^2 diesen Wert, so tritt eine komplexe Wurzel und eine reelle als Lösung auf.

c) Wenn D_1^2 auch noch größer als n^2 der Oberschwingung wird, treten zwei positive reelle Wurzeln auf. Damit sind also die beiden Schwingungen aperiodisch bzw. überaperiodisch geworden.

Für den Fall 2 schreibe ich die Gleichung in folgender Form an:

$$z^4 + a z^2 + c = 0, \quad \text{worin} \quad a = 2 - 2 D_1^2 - \frac{(D_1 - r D_2)^2}{2}$$

und

$$c = 1 - D_1^2 + \frac{(D_1 - r D_2)^2}{4} - r^2 K.$$

Die Teilfälle diskutiere ich an der Hand der allgemeinen Lösung der quadratischen Gleichung und schreibe diese Lösung folgendermaßen an:

$$\lambda = -\frac{D_1 + r D_2}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}.$$

Diese Diskussion faßt natürlich auch die Lösungen von Fall 1 in sich.

a) $a^2 = 4c$ bzw. $(D_1 - r D_2^2)^2 (1 - D_1^2) = r^2 K$. Lösung: die komplexe Doppelwurzel:

$$\lambda = -\frac{D_1 + r D_2}{2} + i \sqrt{\frac{a}{2}},$$

aber nur, wenn a positiv ist; sonst zwei verschiedene reelle Wurzeln. Nur bei Fall 2 möglich. Auch hier nicht, wenn $n_1 = n_2$ bzw. $r = 1$.

b) $a^2 > 4c$. Bei Fall 1 und 2 möglich.

Teilfälle $a > \sqrt{a^2 - 4c}$: zwei komplexe Wurzeln mit gleichen reellen, aber verschiedenen imaginären Teilen.

$a = \sqrt{a^2 - 4c}$: eine konjugiert komplexe Wurzel und zwei gleiche reelle Wurzeln.

$a < \sqrt{a^2 - 4c}$: eine konjugiert komplexe Wurzel und zwei verschiedene reelle Wurzeln. Im Fall 1 verschwindet bei hohen Dämpfungen diese konjugierte komplexe Wurzel bzw. die Oberschwingung (aufgezeigt durch das Unendlichsetzen von D), während bei Fall 1 dies nicht stattzufinden braucht (s. unten).

c) $a^2 < 4c$: zwei gleiche imaginäre und ungleiche reelle Teile der komplexen Wurzeln. Nur bei Fall 2, aber auch hier nicht für $n_1 = n_2$. Denn hier wird nach der Vorbedingung von Fall 2: $D_1 = D_2$, also $a = 2 - 2D_1^2$ und $c = (1 - D_1^2)^2 - K$ und $a^2 - 4c = 4K$, also > 0.

$$D_1 \text{ bzw. } D_2 = \infty .$$

Für die Beurteilung von Grenzfällen ist der Einfluß des Unendlichwerdens einer Dämpfungszahl von Interesse. Das Resultat ist, wenn $D =$ unendlich wird ($n_1 = 1$):

$$\lambda = r(-D_2 + i\sqrt{1 - D_2^2}).$$

Man sieht, daß bei dem Unendlichwerden einer Dämpfungszahl eine Oberschwingung bestehen bleiben kann, die hier erst dann verschwindet, wenn D_2 über 1 wird.

Ist $D_2 = 0$, so wird $\lambda = ir$.

Wird $D_2 = \infty$, so ist das Resultat:

$$\lambda = -D_1 + i\sqrt{1 - D_1^2}.$$

Wenn $D_1 = 0$ ist, wird $\lambda = i$.

$$n_1 = n_2.$$

Von überwiegendem Interesse sowohl für die Theorie der Registrierungen als auch für akustische Beziehungen ist der Fall, daß die Frequenzen der ungedämpften Schwingungen der Einzelsysteme gleich werden. Bei den Registrierinstrumenten bedeutet dieses Gleichwerden die Bedingung für das Gütemaximum. Über die Bedeutung dieses Falles für die Akustik braucht nichts besonderes gesagt zu werden. Man kann diesen Fall als die innere Resonanz bezeichnen.

Die Gleichung und ihre Lösungen schreibe ich durch n_1 dividiert an.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2D_1\lambda + 1 & c_{12}/c_1 \\ c_{21}/c_2 & \lambda^2 + 2D_2\lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 + (2D_1 + 2D_2)\lambda^3 + (2 + 4D_1D_2)\lambda^2 + (2D_1 + 2D_2)\lambda + 1 - K = 0.$$

Zwei Teilfälle sind von Wichtigkeit:

1. $D_1 = D_2 = D$. Diese Bedingung ist identisch mit der allgemeinen $h_1 = h_2$. Aber auch mit dem zweiten Fall der Bedingung für die Reduktion der Gleichung zu einer quadratischen (s. S. 128). Die Lösung wird:

$$\lambda = -D + i\sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2}.$$

2. $D_1 = 0$, $D_2 = D$.

Den Teilfall 1 werde ich nicht weiter besprechen. Die Lösung ist einfach, Verwicklungen treten nicht auf, nur gebe ich hier kurz eine angenäherte Lösung für den Fall, daß D_2 sich nur wenig von D_1 unterscheidet. Ich setze $D_2 = D_1 + \delta$ und nehme als angenäherten richtigen Wert den aus der Bedingung $D_1 = D_2$ gefundenen Wert

$$\lambda = -D + i\sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2}.$$

Die Newtonsche Annäherungsmethode liefert dann folgenden Wert:

$$\lambda = -D - \frac{\delta}{2} + i\sqrt{1 \pm \sqrt{K} - D^2 - D\delta}.$$

Dagegen behandle ich den Fall ($D_1 = 0$) in einem besonderen Abschnitt.

$$n_1 = n_2,\ D_1 = 0,\ D_2 = D.$$

Die Gleichung lautet:

$$\lambda^4 + 2D\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2D\lambda + 1 - K = 0.$$

Aus der Struktur der Gleichung kann man den wichtigen Satz ableiten, daß hier immer $D_{a,b} = \frac{D}{2} \pm \delta$ ist. Nur dann wird nämlich der Faktor von $\lambda^3 = 2D$.

Aus dem nächsten Glied ist zu entnehmen: $\frac{3}{2} D^2 - 2\delta^2 + n_a^2 + n_b^2 = 2$. Es kann bei Kenntnis einer komplexen Wurzel zur Berechnung der anderen benutzt werden.

Bei niedrigem K (Grenze s. S. 135) tritt eine bemerkenswerte Erscheinung auf, nämlich, daß sich die Schwingungszahl der Hauptschwingung bei wachsender Dämpfung erhöht, um dann wieder abzunehmen. Es ist dies der einzige Fall, bei dem eine Erhöhung der Dämpfung zu einer Vermehrung der Frequenz führt. (Auch für die Nachbarwerte von $r = 1$ tritt dasselbe ein. Diese Erweiterung des Erscheinungsgebietes habe ich noch nicht untersucht.) Dagegen wird die Oberschwingungszahl, wie in jedem anderen Fall, durch wachsende Dämpfung herabgesetzt, bis sie $= 1$ wird. Das Maximum von n_a in Bezug auf D läßt sich in folgender Weise berechnen. Man setzt die komplexe Lösung der Gleichung $= (D_a + i n_a)$ in die Gleichung ein. Man erhält dann eine komplexe Funktion dieser Lösungen und der Konstanten D und K. Diese komplexe Gleichung wird in zwei aufgelöst:

1. $n_a^4 - 2 n_a^2 + 1 - K + (6 n_a^2 - 2)(D D_a - D_a^2) - (2 D - D_a) D_a^3 = 0$.

2. $(n_a^2 - 1)(2 D_a - D) + (3 D - 2 D_a) D_a^2 = 0$.

Man kann nun die Bedingung für das Maximum nach den bekannten Regeln für die Ermittlung von Maxima von simultanen Gleichungen festsetzen. Die dritte Gleichung, die sich dann zu den obigen gesellt, lautet:

$$6 n_a^2 D_a^2 + 3 D_a^4 + 3 n_a^4 - 4 n_a^2 + 1 = 0.$$

Aus der dritten Gleichung kann man dasjenige D_a berechnen, das zu der maximalen Schwingungszahl gehört. Die Beziehung lautet:

$$D_a^2 = - n_a^2 + \sqrt{\frac{4 n_a^2 - 1}{3}}.$$

Setzt man dieses D_a in Gleichung 2 ein, so erhält man dasjenige D, welches das Maximum hervorruft.

Die gewonnenen drei Werte in die Gleichung 1 eingesetzt, ergibt das zugehörige K. Man kann dann in einer

Tabelle die zugehörigen Werte zusammenstellen und ist der Suche nach dem Maximum durch Ausprobieren enthoben.

In einem Fall, nämlich wenn die Schwingungszahl n nur wenig von 1 abweicht, was bei kleinem k eintritt, kann man diese Werte unmittelbar aus K berechnen. Die Lösungen lauten:

Wenn $n = 1 - \delta$, so ist $\delta = 9/8\,K$ $D_a^2 = 3/4\,K$ $D^2 = 4/3\,K$ für das Maximum.

In der folgenden Tabelle stelle ich einige nach dem entwickelten Prinzip gewonnene Werte zusammen zugleich mit den Frequenzen für die ungedämpfte Hauptschwingung:

K	D_2	D_a	n_a	$\sqrt{1-\sqrt{K}}$	Differenz
2/3	0		0.5773	0.5773	0.0000
0.4113	0.2842	0.1520	0.6000	0.5988	0.0012
0.2767	0.3999	0.2751	0.7000	0.6885	0.0115
0.2222	**0.4330**	**0.2887**	0.7638	0.7270	0.0368
0.1859	0.4165	0.2848	0.8000	0.7542	0.0458
0.1567	0.3960	0.2758	0.8300	0.7772	0.0528
0.1472	0.3879	0.2712	0.8400	0.7850	0.0550
0.1281	0.3693	0.2615	0.8600	0.8013	0.0587
0.0907	0.3223	0.2326	0.9000	0.8360	0.0640

$n_1 = n_2$, $D_1 = 0$. *Grenze der Aperiodizität einer Schwingung.*

Von einem gewissen D ab bleibt nur eine komplexe Wurzel übrig, und zwei reelle negative Wurzeln, d. h. zwei überaperiodische Bewegungsmodi treten auf. Bei diesem Grenz-D sind die beiden reellen Wurzeln gleich. Analytisch wird dieser Fall dadurch bestimmt, daß die Diskriminante $= 0$ wird. Ich habe nicht diesen Weg zur Bestimmung der Grenze verfolgt, sondern gehe so vor: Stellt man D als Funktion der reellen Wurzeln D_a dar, so erhält man:

$$D = -\left\{\frac{D_a^4 + 2\,D_a^2 + 1 - K}{2\,(D_a^3 + D_a)}\right\}.$$

Das Minimum von D liefert die Grenzbedingung. Die Bedingungsgleichung wird:

$$D_a^6 + D_a^4 + (1 - 3K) D_a^2 - 1 + K = 0.$$

Sie hat die reelle Wurzel:

$$D_a^2 = \tfrac{1}{3}\left\{\sqrt[3]{8 + \sqrt{a}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{a}} - 1\right\},$$

worin $a = 729\,K^3 - 972\,K^2 + 432\,K$. Wird der Wert von D_a in die obige Gleichung eingesetzt, so erhält man dasjenige D, das die Aperiodizität der Hauptschwingung hervorruft. An einem besonderen Beispiel $K = 0.9$ habe ich verifiziert, daß diese Bedingung mit der Bedingung: (Diskriminante = 0) übereinstimmt. Für einige mittlere Werte von K habe ich diese Grenze berechnet. Die folgende Zusammenstellung ist für die Beurteilung des Einhaltens des Königschen Resonanzphänomens wichtig (s. letzte Spalte und S. 139).

	Grenz-D	D^2
$K = 0.4$	0.7798	0.6081
0.4444	0.8511	0.7244
0.5	0.8236	0.6783
0.6	0.7651	0.5853

$n_1 = n_2$, $D_1 = 0$. *Angenäherte Berechnung der Wurzeln.*

Da im allgemeinen die Lösung der biquadratischen Gleichung nur für bestimmte Zahlenwerte möglich ist, so empfiehlt es sich, die Grundzüge von Annäherungsmethoden zu entwerfen. Sie können auch zur angenäherten Bestimmung von Zahlenwerten unmittelbar benutzt werden. Im Prinzip wird man hier die Newtonsche Annäherungsmethode verwenden. Man kann hierbei den Ausgang von verschiedenen Punkten der funktionellen Beziehungen nehmen.

Ausgang von den Lösungen für die ungekoppelten Systeme. Für die Oberschwingung angenäherte Wurzel $\lambda = i$ liefert denselben Wert $\lambda = i$ (vgl. S. 136).

Für die Hauptschwingung Ausgang $\lambda = -D + i\sqrt{1-D^2}$.

Lösung $\lambda = -\frac{K}{4D} + \sqrt{1 - \frac{K}{2} - D^2}$.

Ausgang von der Lösung für ungedämpfte Systeme. Ausgang $\lambda = i\sqrt{1 \pm \sqrt{K}}$.

$$\text{Lösung: } \lambda = -\frac{D}{2}\left\{\frac{4(1 \pm \sqrt{K})K}{4(1 \pm \sqrt{K})K + D^2(2 \pm 3\sqrt{K})^2}\right\}$$

$$+ i\left\{\sqrt{1 \pm \sqrt{K}} \mp \frac{D^2\sqrt{K}\sqrt{1 \pm \sqrt{K}}(2 \pm 3\sqrt{K})}{4(1 \pm \sqrt{K})K + D^2(2 \pm 3\sqrt{K})^2}\right\}.$$

Da hier der ganze Dämpfungswert als Korrektur auftritt, weicht er von dem Richtigen nicht unwesentlich ab. Er fällt immer etwas kleiner als $D/2$ aus, während er für die Hauptschwingung größer sein soll (vgl. oben S. 132). Eine bessere Annäherung ergibt die Berücksichtigung der quadratischen Glieder für die Korrektur des reellen Teils der Wurzeln. Die Korrektur des imaginären Teils der Wurzeln, bestehend in dem zweiten Term des imaginären Teils, liefert eine sehr wichtige Grenzbeziehung. Man sieht nämlich, daß diese Korrektur positiv bleibt, so lange $2 > 3\sqrt{K}$ bzw. K kleiner als $4/9$ ist, d. h. die Kurve $n_h = f(D)$ senkt sich sofort von $D = 0$ oder was dasselbe ist, dieser Wert von K bestimmt die Grenze für die Ausbildung eines Maximums in dieser Funktion. Bei höheren K ruft also die Dämpfung, vom Wert 0 angefangen, keine Erhöhung der Schwingungszahl mehr hervor (vgl. o. S. 132).

Es gibt noch eine weitere Annäherungsmöglichkeit, die gute rechnerische Resultate gibt, nämlich für die Hauptschwingung als Ausgangswert zu wählen:

$$\lambda = -\frac{D}{2} + i\sqrt{1 - \sqrt{K}}$$

auszugehen. Die Resultate schreibe ich nicht an.

Für $K = 1$ kann man die biquadratische Gleichung in zwei quadratische zerreißen (vgl. o. S. 124).

Die Lösungen sind für die Hauptschwingung:

$$\lambda = -\frac{D}{2} + i\sqrt{\frac{1-K}{2} - \frac{D^2}{4}}$$

und für die Oberschwingung:

$$\lambda = -D + i\sqrt{2 - D^2}.$$

n_1 und n_2 verschieden, $n_2 = r n_1$.

Die Grenzfälle, die bestimmt sind durch ein sehr großes r und sehr kleines r, haben eine gewisse Wichtigkeit für die Übersicht der Beziehungen.

Ungedämpfte Schwingungen. r groß:

$$n_h = i\sqrt{1-K} \qquad n_0 = ir,$$

r sehr klein gegen 1:

$$n_h = ir\sqrt{1-K} \qquad n_0 = i.$$

Gedämpfte Schwingungen. r sehr groß:

$$n_h = -D_1 + i\sqrt{1-K-D_1^2}$$
$$n_0 = r(-D_2 + i\sqrt{1-D_2^2}),$$

r sehr klein:

$$n_h = r(-D_2 + i\sqrt{1-K-D_2^2};\quad n_0 = -D_1 \pm i\sqrt{1-D_1^2}$$
$$D_1 = 0, \quad D_2 = D_2$$

$\lim r - \infty \quad n_h = i\sqrt{1-K} \qquad n_0 = r(-D_2 + i\sqrt{1-D_2^2})$

$\lim r = 0 \quad n_h = r(-D_2 + i\sqrt{1-K-D_2^2}) \quad n_0 = i.$

n_2 nur wenig größer oder kleiner als n_1, K klein, $D = 0$.

$n_2 = n_1\ (1 \pm \varepsilon)$. Ausgang: die Schwingung des ungekoppelten Systems $\lambda = i$. Die Newtonsche Annäherung ergibt die Lösung für die schwächer gedämpfte Schwingung:

$$\lambda = \frac{-KD}{4(D^2+\varepsilon^2)} + i\left(1 - \frac{K\varepsilon}{4D^2 + 4\varepsilon^2}\right).$$

Der Überschuß über die Schwingungszahl des ungedämpften Einzelsystems hat ein Maximum bei $\varepsilon = D$. Diese Beziehung wird zur Begründung des Königschen Resonanzphänomens benutzt, dessen Grundzug durch die Formel gut wiedergegeben wird, während für den Fall ($n_1 = n_2$) die Annäherung unzureichend ist (vgl. S. 134 und S. 138).

Das Königsche Resonanzphänomen.

König hat einen sehr interessanten Resonanzversuch ausgeführt (Poggendorfs Annalen, N. F. 9, S. 394, 1880). Er hat einer Stimmgabel einen Resonator gegenüber gestellt, der aus einer mit Luft gefüllten, einseitig offenen, Röhre bestand. Die Länge der Luftsäule konnte durch Verschieben eines Stempels verändert werden. Die Schwingungszahl der Stimmgabel wurde sehr genau mit einem Vibrationsmikroskop bestimmt. Der Eigenton des Resonators lag zunächst unter dem Eigenton der Stimmgabel. Die Stimmgabel gab dann ihren Eigenton. Als der Ton des Resonators erhöht wurde und sich bis etwa eine Terz dem Ton der Stimmgabel genähert hatte, wurde der Ton der Stimmgabel erhöht. Diese Erhöhung wuchs bis zu dem Punkt der vollständigen Übereinstimmung der Eigenschwingungen und erniedrigte sich rasch auf den Eigenton der Stimmgabel. Das Umgekehrte trat dann bei der Erhöhung des Tones des Resonators über dem Ton der Stimmgabel ein. Wenn man die Schwingungszahl der Stimmgabel als Funktion des Tons des Resonators aufzeichnet, so kommt eine Kurve zustande, die von niedrigen Tönen des Resonators angefangen oberhalb der Abscisse liegend zu einem Maximum steigt, um dann durch den Nullpunkt der Kurve hindurch gehend, zu einem Bogen wird, der ungefähr symmetrisch zur Abscisse verläuft. König hat keine Erklärung für das Phänomen gegeben. Sie ist zuerst von Rayleigh auf Grund der Lehre von den erzwungenen Schwingungen angebahnt worden. M. Wien hat gezeigt, daß dieses Doppelsystem als ein gekoppeltes behandelt werden kann und daß es sich hier um die Veränderung der Schwingungs-

zahlen durch die Koppelung handelt. Es handelt sich hier um Trägheitskoppelung, deren Gesetze aber nicht sehr von denen der elastischen Koppelung abweichen. Bedingend für das Zustandekommen ist das Verhältnis der Dämpfungen der beiden Teilsysteme. Die Dämpfung der Stimmgabel wird als sehr klein gegenüber dem Resonator zu gelten haben. Ich setze sie $= 0$. Wien hat mit einer sehr guten Annäherungsmethode den Verlauf der Kurve dargestellt. Er ist ähnlich wie ihn auch Rayleigh gefunden hat. Und derselbe wie er durch die Beziehungen S. 136 geliefert wird. Obwohl die Wiensche Annäherungsformel an sich sehr gut ist, so gibt sie doch an wichtigen Stellen den Verlauf nicht richtig dar, insbesondere den Punkt, bei dem der Stimmgabelton auf den Eigenton zurückfällt. Es ist keine Frage, daß es sich hierbei um den Punkt handelt, bei dem die Frequenz der Hauptschwingung und der Oberschwingung miteinander übereinstimmt. Oder in der graphischen Darstellung um den Kreuzungspunkt der Kurven. Oder analytisch ausgedrückt, um die Gleichheit des imaginären Teils der komplexen Wurzeln. Das kann aber nicht zutreffen für die Übereinstimmung des Eigentons von Stimmgabel und Resonator bzw. für den Fall $n_1 = n_2$ aus den S. 132 angeführten Gründen oder nach einer einfachen Überlegung, die sich auf die graphische Darstellung stützt. Wir wissen außerdem aus dem vorhergehenden, daß für $n_1 = n_2$ die Oberschwingung in ihrer Frequenz durch die wachsende Dämpfung verringert wird, daß die Frequenz aber niemals unter $n = 1$ gehen kann, wie dies nach der Wienschen Formel erforderlich wäre. Kurzum, der Stimmgabelton fällt auf den Eigenton der Stimmgabel zurück, wenn der Resonator einen etwas höheren Ton als die Stimmgabel hat. Daß dies von König nicht beobachtet werden konnte, liegt ohne Zweifel daran, daß wohl die Schwingungszahl der Stimmgabel mit dem Vibrationsmikroskop sehr genau bestimmt wurde, aber nicht die Eigenfrequenz der Resonatorschwingungen. Sie wurde scheinbar nur akustisch festgestellt. Wird die Dämpfung des Resonators kleiner, so verschwindet das Phänomen bzw. die Kurven der Schwin-

gungszahl kreuzen sich nicht mehr, sondern sie werden auseinander gerissen. Der Grenzpunkt ist identisch mit dem Auftreten der Doppelwurzel (vgl. o. S. 129). Bei einem gewissen höheren K tritt zweifellos das Phänomen überhaupt nicht mehr ein. Dieses Grenz-K konnte ich nicht genauer bestimmen. Aber das Phänomen wird unmöglich, wenn bei einem niedrigeren D als das Auftreten der Doppelwurzel erfordert, schon Aperiodizität eintritt. Die S. 134 mitgeteilte Tabelle gibt dieses K als zwischen 0.5 und 0.6 liegend an. Man sieht also, daß die durchgreifende Analyse zu einer vollen Aufklärung dieser Erscheinung führen kann. Man hat dabei die physikalischen Momente zu berücksichtigen, aber auch alle Mittel der allgemeinen rechnerischen Analyse unter Zuhülfenahme von graphischer und event. tabellarischer Darstellung. Auf das Phänomen selbst gedenke ich auf Grund meiner obigen Entwicklungen zurückzukommen.

6. Erzwungene ungedämpfte Schwingungen.

$$Q = \frac{1 - K}{(1 - R_1^2)(1 - R_2^2) - K}.$$

Dies kann auch in den Ausdruck verwandelt werden:

$$Q = \frac{1}{(1 - R_a^2)(1 - R_b^2)},$$

worin jetzt R_a und R_b das Verhältnis der erregenden Schwingungszahl einer der beiden Schwingungen des Gesamtsystems bedeuten. Man sieht, daß Q unendlich wird, wenn R_a oder $R_b = 1$ wird, d. h. die Periode der einwirkenden Schwingung mit der Periode der Eigenschwingung übereinstimmt. Dazwischen liegt ein Minimum von Q für $\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R^2} = 2$. Für

$$n_1 = n_2 \text{ wird } Q = \frac{1 - K}{(1 - R^2)^2 - K}.$$

Es wird unendlich für $R = 1 \pm \sqrt{K}$. Das Minimum liegt bei $R = 1$.

7. Erzwungene gedämpfte Schwingungen.

$$Q = \frac{1 - K}{\sqrt{[\nabla_r R]^2 + [\nabla_i R]^2}}, \text{ worin}$$

$$\nabla_r R = (1 - R_1^2)(1 - R_2^2) - K - 4 D_1 D_2 R_1 R_2$$

und $$\nabla_i R = D_1 R_1 (1 - R_2^2) + D_2 R_2 (1 - R_1^2).$$

Wenn $n_1 = n_2$ ist, welchen Fall ich weiterhin allein behandle, wird

$$\nabla_i R = (1 - R^2)^2 - K - 4 D_1 D_2 R^2$$

und $$\nabla_i R = (D_1 + D_2) R (1 - R^2).$$

Die Maximum-Minimumbedingung $\frac{dQ}{dR^2} = 0$ ergibt eine Gleichung dritten Grades in R^2. Ich behandle nur den Teilfall $D_1 = D_2$.

$$Q = \frac{1 - K}{\sqrt{\{(1 - R^2)^2 - K - 4 D^2 R^2\}^2 + 16 D^2 R^2 (1 - R^2)^2}}.$$

Die Bedingungsgleichung für die Maxima lautet:

$$R^6 - (3 - 6 D^2) R^4 + (3 - K - 8 D^2 + 8 D^4) R^2 - 1 + K + 2 D^2 + 2 K D^2 = 0.$$

Die in den Formeln angegebenen Beziehungen lassen sich am anschaulichsten in Kurvenscharen: $K =$ konst. mit D als Parameter darstellen. Man könnte sie die Charakteristiken der Registriersysteme nennen.

Bei niedrigen Dämpfungen besitzt die Gleichung drei reelle Wurzeln. Es treten zwei Resonanzmaxima auf, dazwischen liegt das Minimum. Wird die Dämpfung größer, so verschwinden schließlich die Maxima bzw. die physikalisch möglichen Wurzeln vollständig. Das Verschwinden erfolgt im allgemeinen stufenweise durch folgende Änderungen der analytischen Beziehungen. 1. die eine Wurzel wird negativ, 2. zwei Wurzeln werden komplex. Beide Bedingungen streiten sich gewissermaßen um den Vorrang. Bei Koppelungen, die über einem gewissen „kritischen“ K liegen, tritt bei wachsendem D zuerst die Bedingung 1 ein. In diesem Fall verschwindet das

Resonanzmaximum der Hauptschwingung durch Negativwerden der Wurzel für R^2. Die Kurve $Q = f(R^2)$ senkt sich bis zu einem Minimum, um dann wieder zu dem Maximum der Resonanz der Oberschwingung anzusteigen. Bei weiterem Wachsen von D verschwindet Maximum und Minimum, indem die beiden entsprechenden Wurzeln komplex werden.

In dem zweiten Fall — bei einem K unterhalb des kritischen — bleibt bei einer gewissen Dämpfung nur mehr eine reelle Wurzel, entsprechend einem Maximum, übrig. Ein Minimum ist nicht vorhanden. Dieses Maximum verschwindet dann, wenn die erste Bedingung realisiert, nämlich die zweite Wurzel negativ wird.

Ich formuliere jetzt die beiden Bedingungen. Die eine Wurzel wird negativ, wenn der letzte Term der Gleichung von der Negativität in die Positivität übergeht, d. h. $= 0$ wird. Die Bedingung lautet: $2D^2 + 2KD^2 - 1 + K = 0$. Oder $D^2 = \frac{1-K}{2(1+K)}$ wird die eine Wurzel $R^2 = 0$. Die Gleichung ergibt eine Lösung $R^2 = 0$. Die anderen Lösungen werden aus der übrig bleibenden quadratischen Gleichung entnommen. Die Lösungen sind

$$R^2 = \frac{1}{1+K}(3K \pm \sqrt{2K^2 + K^3 - 1 - K}).$$

Wenn der Ausdruck unter der Wurzel $= 0$ wird, werden die beiden Wurzeln gleich groß. Der Ausdruck, $= 0$ gesetzt, liefert dann das kritische K, bei kleinerem K werden hier sofort die Wurzeln komplex.

Das Verschwinden der möglichen Wurzeln tritt im zweiten Fall dadurch ein, daß die Wurzeln komplex werden. Dies ist der Fall, wenn die Diskriminante der Gleichung verschwindet. Die Diskriminante $= q^2 + p^3 = 0$, worin

$$q = 2KD^2 \text{ und } p = \frac{4D^2 - 4D^4 - K}{3}.$$

Der Beweis, daß für das kritische K die Grenzbedingung 1 der dreifachen Positivität der Wurzeln zugleich die Grenz-

bedingung der dreifachen Reellität erfüllt ist, läßt sich leicht allgemein dadurch erbringen, daß man in der Gleichung ($q^2 + p^3 = 0$) D durch den Wert für die erste Grenzbedingung ersetzt. Man erhält dann eine Gleichung $f(K) = 0$, die identisch ist mit der obigen Gleichung: $K^3 + 2K^2 - K - 1 = 0$. Die Gleichung für das kritische K ist selbst dritten Grades und liefert die Lösung: kritisches $K = 0.8019377$.

Grenzen der dreifachen Positivität und Reellität für kleine und große Koppelung.

1. K sehr klein. In der Grenzbedingung $q^2 + p^3 = 0$ kann q vernachlässigt werden. Dann ergibt sich für $D^2 = K/4$. Es wird weiter:

$$R^2_{1,2} = 1 - 2D^2 \pm \sqrt{K - 4D^2}; \quad R^2_3 = 1 - 2D^2$$

$$Q_{1,2} = \frac{1}{4D\sqrt{K}} \text{ (Maxima)}; \quad Q_3 = \frac{1}{K + 4D^2} \text{ (Minimum)}.$$

2. K annähernd 1. Grenzwerte für die dreifache Positivität der Wurzeln:

$$D^2 = \frac{1-K}{4} \quad R^2_1 = 0 \quad Q = 1$$

$$R^2_2 = \frac{2}{1+K} = \frac{3-K}{2} \quad Q = 1 - K$$

$$R^2_3 = \frac{6K-2}{1+K} = 2K \quad Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-K}{2}}.$$

Grenzwerte für die dreifache Reellität der Wurzeln:

$$D^2 = 0.063863, \quad R^2_{2,3} = 1.375883, \quad Q = 0.$$

Lage der Maxima und des Minimums.

Bei einem Freiheitsgrad liegt das Resonanzmaximum der gedämpften Schwingung vor dem Maximum der ungedämpften Schwingung, wenn man Q als Funktion von R ansieht und die Lage des Maximums durch die Größe von R, das es hervorruft, angibt. Bei den gekoppelten Schwingungen ist

im allgemeinen das Gleiche der Fall. Nur bei der Hauptschwingung finden Ausnahmen statt. Die Lage der Maxima der gedämpften Schwingungen gegenüber den ausgezeichneten Größen der ungedämpften Schwingung kann man für kleine D aus dem Vorzeichen des Differentialquotienten $\frac{dQ}{d(R^2)}$ bestimmen, wenn man in diese Beziehung jeweilig die Größen von R^2 für die Oberschwingung, das Minimum und die Hauptschwingung bei der ungedämpften Schwingung einsetzt.

1. Lage des Resonanzmaximums der Oberschwingung. Für die ungedämpfte Schwingung ist $R^2 = 1 + \sqrt{K}$. $\frac{dQ}{d(R^2)}$ ist proportional $-(2K + 2D^2 + \sqrt{K} + 2D^2\sqrt{K})$, also stets negativ, d. h. das gedämpfte Maximum liegt stets vor der ungedämpften Resonanz.

2. Das ungedämpfte Minimum befindet sich bei $R = 1$. Es wird $\frac{dQ}{d(R^2)}$ proportional $-(4D^2 + K)$. Der Differentialquotient ist stets negativ, das Minimum der gedämpften Schwingung liegt also stets hinter dem Minimum der ungedämpften Schwingung. Die Reduktion auf eine reelle Wurzel kommt durch Vereinigung des nach rechts rückenden Minimums und des nach links rückenden Maximums zustande. Es entsteht dadurch ein Wendepunkt. Das noch bleibende „zusammengezogene" Maximum entspricht also dem Maximum der Hauptschwingung.

3. Lage des Resonanzmaximums der Hauptschwingung. Für die ungedämpfte Schwingung ist $R^2 = 1 - \sqrt{K}$. Der Differentialquotient $\frac{dQ}{d(R^2)}$ ist proportional

$$2K - \sqrt{K} + 2D^2(1 - \sqrt{K}).$$

Dieser Wert kann positiv oder negativ sein. Wenn er positiv ist, liegt das Maximum hinter demjenigen der ungedämpften Resonanz. Wenn $K = 1$ ist, so ist er stets negativ. Mit abnehmendem K kann er positiv werden. Die Grenze liegt bei $2\sqrt{K} - 1 = 0$ oder $K = 1/4$. Ist K größer als $1/4$, so

wandert das Maximum schon bei geringster Dämpfung nach links, d. h. nach der Seite der kleineren R Werte und verschwindet bei einem gewissen D. Ist $K < 1/4$, so wandert das Maximum mit ansetzender Dämpfung nach rechts und dann bei höherer Dämpfung wieder nach links, um schließlich bei $R = 0$ zu verschwinden. Es kann bei der Rückwanderung wieder auf derselben Stelle eintreten, wie das ungedämpfte Maximum. Die Bedingung hierfür ist:

$$2\,D^2\,(1-\sqrt{K}) = \sqrt{K} - 2\,K \quad \text{oder} \quad D^2 = \frac{\sqrt{K}-2\,K}{2\,(1-\sqrt{K})},$$

z. B. für $K = 0.24$ $\quad D^2 = 0.00972$

$K = 0.23$ $\quad D^2 = 0.01883$

$K = 0.22$ $\quad D^2 = 0.0273.$

Bei einem Vergleich dieser Zahlen mit einer hier nicht veröffentlichten tabellarischen Übersicht über die gesamten zahlenmäßigen Beziehungen ist zu sehen, daß bei einem K zwischen 0.23 und 0.22 das „zusammengezogene" Maximum bei seinem ersten Auftreten auf diese Stelle fällt. Bei K unter dieser Grenze liegt es zuerst immer rechts von dem ungedämpften Resonanzmaximum, bewegt sich dann nach rechts bei weiterem Wachsen der Dämpfung, um schließlich wieder umzukehren und bei $R = 0$ zu verschwinden. Bei den kleinen Koppelungen, wie sie bei akustischen Verhältnissen im allgemeinen vorhanden sind, z. B. bei den von M. Wien behandelten Fällen tritt es also stets rechts von dem ungedämpften Maximum zuerst auf.

Zum Schluß verweise ich nochmals auf die S. 115 angegebene allgemeine Beziehung hin, welche die Größe der Amplituden-Quotienten bei sehr kleiner Dämpfung festlegt. Wie die genannte Tabelle zeigt, nimmt das Verhältnis zwischen den Quotienten Q der Oberschwingung und der Hauptschwingung bei wachsender Dämpfung ab, was zur Beurteilung der Bedeutung der Hauptschwingung für die Leistung der Registriersysteme wichtig ist (vgl. S. 121).

Systeme von drei Freiheitsgraden.

Die Empfindlichkeit wird hier

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{K_{12} K_{23}}}{\sqrt{c_1 c_3}\,(1 - K_{12} K_{23})}.$$

Zu beachten sind folgende Beziehungen, die ich zum Teil schon oben behandelt habe (vgl. S. 112).

1. Wenn $1 - K_{12} - K_{23} = 0$ wird, ist zugleich $\sqrt{c_1 c_3} = \infty$. γ_e bleibt damit endlich.

2. $0 < (K_{12} + K_{23}) < 1$. Wenn $K_{12} + K_{23} > 1$, so wird γ_e negativ, was unmöglich ist.

3. Ebensowenig ist K_{12} oder K_{23} größer als 1.

4. Bedingungen 2 und 3 zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten untereinander und mit dem Koppelungskoeffizienten folgende Beziehungen haben müssen:

$$c_1 = c_{12} + a, \quad c_2 = c_{12} + c_{23}, \quad c_3 = c_{23} + b,$$

worin a und b zunächst willkürliche, aber positive Größen sind.

Die Gleichung für die Wurzeln der ungedämpften Schwingungszahl lautet:

$$(\lambda^2)^3 + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(\lambda^2)^2 + [n_1^2 n_2^2 (1 - K_{12}) + n_2^2 n_3^2 (1 - K_{23}) + n_1^2 n_3^2]\,\lambda^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 (1 - K_{12} - K_{23}) = 0.$$

Die Werte der Wurzeln können nach den oben angegebenen Annäherungsmethoden berechnet werden. Wichtig ist für die Registriersysteme der Fall, daß n_2 gegenüber den anderen Frequenzen der Einzelschwingungen unendlich wird. Die Lösungen der Gleichung werden nach dem oben Mitgeteilten unter diesen Umständen folgende:

$$(\lambda_{1,2})^2 = -\tfrac{1}{2}\{n_1^2(1 - K_{12}) + n_3^2(1 - K_{23}) \pm \sqrt{\{n_1^2(1 - K_{12}) - n_3^2(1 - K_{23})\}^2 + 4 n_1^2 n_2^2 K_{12} K_{23}}\}$$

$$n_3^2 = n_2^2 + n_1^2 K_{12} + n_3^2 K_{23}.$$

Die beiden ersten Wurzeln geben die beiden endlichen Frequenzen an. Eine davon liegt unter der niedrigsten Frequenz der Einzelschwingungen. Es ist die Hauptschwingung, die

durch das Minuszeichen angegeben wird. Die zweite Formel gibt die große Frequenz an, die wesentlich durch die Schwingungszahl n_2 des mittleren Einzelsystems bedingt ist. So würde sich ein System verhalten, das zusammengesetzt ist aus zwei belasteten Membranen, die durch eine Luftsäule verbunden sind. Das sind Systeme, wie sie bei der Lufttransmission häufig vorkommen, vorausgesetzt, daß sie nach dem Grundsatz der Massenkonzentration zu behandeln sind (vgl. die frühere Abhandlung und oben S. 122).

Die beiden ersten Wurzeln kann man ähnlich wie bei Systemen von zwei Freiheitsgraden folgendermaßen anschreiben, wenn man $n_3 = r\,n_1$ setzt:

$$n_{a,b}^2 = \tfrac{1}{2}\,n_1^2\{1 - K_{12} + r^2(1 - K_{23}) \pm \sqrt{[1 - K_{12} - r^2(1 - K_{23})]^2 + 4\,r^2\,K_{12}\,K_{23}}\}.$$

Für die soeben berechnete Hauptschwingung läßt sich in ähnlicher Weise ein Ausdruck für die maximale Güte bestimmen, wie bei den Systemen von zwei Freiheitsgraden. Die Güte wird dann

$$G = \frac{v}{2} \cdot \frac{\sqrt{K_{12}\,K_{23}}}{(1 - K_{12} - K_{23})\sqrt{m_1\,m_3}} \left\{ r(1 - K_{12}) + \frac{1}{r}(1 - K_{23}) - \sqrt{\left[r(1 - K_{12}) - \frac{1}{r}(1 - K_{23})^2 + 4\,K_{12}\,K_{23}\right]} \right\}.$$

Es ist zu ersehen, daß die Maximumbedingung $\frac{dG}{dr} = 0$ erfüllt wird, wenn $r^2 = \frac{1 - K_{12}}{1 - K_{23}}$ wird. Die für r maximale Güte wird dann:

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K_{12}\,K_{23}}}{\sqrt{(1 - K_{12})(1 - K_{23})} + \sqrt{K_{12}\,K_{23}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m_1\,\mu\,L/3}},$$

wenn ein Hebel die Vergrößerung übernimmt.

Die Güte ist bei $K_{12} = 0$ unendlich klein und wird für $K_{12} = 1$ unter Berücksichtigung der Bedingung, daß $K_{12} + K_{23}$ höchstens $= 1$ ist $= \frac{1}{2\sqrt{m_1\,\mu\,L/3}}$ ebenso wie bei dem System von zwei Freiheitsgraden.

Strenge Behandlung der Lufttransmission.

Die Lufttransmissionssysteme bestehen im allgemeinen aus einer Luftsäule, die an beiden Enden mit einer Membran verschlossen ist. An den Membranen sind Massen befestigt. Unter der „strengen" Behandlung dieser Systeme verstehe ich die in der früheren Abhandlung S. 296—305 gegebene. Bei ihr ist die Luftsäule als ein kontinuierliches System behandelt. Die Einschränkungen, die bei dieser „strengen" Behandlung gemacht worden sind, beziehen sich nur auf die Bewegungen der Luft innerhalb der Säule. Bei der „angenäherten" Behandlung wird im Gegensatz hierzu das Prinzip der Massenkonzentration für die Luftsäule verwendet, oder die Masse der Luft wird überhaupt vernachlässigt. In der früheren Abhandlung habe ich erklärt, daß ich die weiteren theoretischen Auseinandersetzungen verschieben wollte, bis die Experimentaluntersuchung zu einem gewissen Ergebnis geführt hätte. Ich glaube jedoch, daß es auf Grund der Theorie jetzt schon möglich ist, für die experimentelle Untersuchung wichtige Schlüsse abzuleiten.

Zunächst entwickle ich die Formeln S. 304 der früheren Abhandlung nochmals in einer etwas anderen Form. Die Massen, die mit den Membranen verbunden sind, behandle ich dabei als wirksame Massen (S. 292 der früheren Abhandlung). Statt der Membran nehme ich einen in das Ende der Röhre eingedichteten mit einer Feder versehenen Kolben an. Die letztere Vereinfachung ist aus verschiedenen Gründen zulässig. Identisch ist dieses System dann mit einer Luftsäule, die mit einer Membran verschlossen ist, die selbst wieder an Flüssigkeitssäulen angrenzen. Nach den früheren Entwicklungen wird

$$\tan \varepsilon = \frac{n\varkappa}{a\,Q(e_1 - n^2 m_1)} = \frac{n\sqrt{M' E'}}{e_1 - n^2 m_1} = N_1$$

und

$$\tan\left(\frac{nL}{a} + \varepsilon\right) = -\frac{n\varkappa}{a\,Q(e_2 - n^2 m_2)} = -\frac{n\sqrt{M' E'}}{e_2 - n^2 m_2} = -N_2.$$

In diesen Formeln ist a die Schallgeschwindigkeit, $\varkappa$ der spezifische Volumelastizitäts-Koeffizient der Luft, L die Länge

der Luftsäule, e_1 und e_2 sind die Volumelastizitäts-Koeffizienten, m_1 und m_2 die wirksame Masse der an die Luftsäule angehängten Flüssigkeitssäulen, M' und E' die wirksame Masse bzw. der Volumelastizitäts-Koeffizient $\left(\frac{dp}{dV}\right)$ der Luftsäule, Q ist der Querschnitt der Luftsäule und n die Schwingungszahl. Die Kombination dieser beiden Beziehungen ergibt

$$\tan(n\,L/a) = \frac{N_1 + N_2}{N_1\,N_2 - 1} = F.$$

Die rechts stehende Funktion bezeichne ich mit F. Von Wichtigkeit ist der Verlauf dieser Funktion, die eine ähnliche Bedeutung hat, wie ich sie S. 303 der früheren Abhandlung entwickelt habe. In unserem Falle ist die Funktion nur komplizierter. Stellt man sie graphisch dar, so erkennt man, daß sie zunächst bei $n = 0$ mit 0 beginnt und dann bei wachsendem n negativ wird. Dann wird sie negativ unendlich groß, springt auf einen positiv unendlichen Wert über und senkt sich von diesem durch 0 stetig hindurch gehend wieder zu negativ unendlich herab, springt nochmals auf positiv unendlich und senkt sich, von hier aus ständig positiv bleibend, zu dem Grenzwert 0 herab. Die auf der linken Seite der Gleichung stehende Tangentenfunktion steigt bis $n\,L/a = \frac{\pi}{2}$ ständig positiv bleibend bis unendlich an. Sie kann in diesem Intervall von F zweimal gekreuzt werden und zwar jedesmal hinter den beiden Unstetigkeitspunkten von F. Diese Kreuzungspunkte geben natürlich die Lösungen der Gleichung an. Fernerhin wird F von der Kurve $\tan(n\,l/a)$ jeweilig etwas hinter $n\,\pi$ gekreuzt. Die letzteren Werte stellen die von der Luftsäule herrührenden Schwingungen bzw. Oberschwingungen dar, während die beiden ersten Kreuzungspunkte die durch die Anwesenheit der beiden Massen bedingten Schwingungen repräsentieren. Um diese Punkte annähernd festzustellen, muß man zunächst die Lage der Unstetigkeitspunkte ermitteln. Sie resultieren aus der Beziehung $N_1\,N_2 = 1$ bzw. aus der Gleichung

$$n^4 - n^2\left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} + \frac{M' E'}{m_1 m_2}\right) + \frac{e_1 e_2}{m_1 m_2} = 0.$$

Daraus wird für diese Unstetigkeitspunkte:

$$n^2 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} + \frac{M' E'}{m_1 m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{m_1} + \frac{e_2}{m_2} + \frac{M' E'}{m_1 m_2}\right)^2 - \frac{4 e_1 e_2}{m_1 m_2}}\right\}.$$

Man sieht, daß diese Unstetigkeitspunkte wenig vor dem Punkt $\frac{e_2}{m_2}$ oder wenig nach dem Punkt $\frac{e_1}{m_1}$ liegen, wobei der Wert $\frac{e_2}{m_2}$ kleiner als der Wert $\frac{e_1}{m_1}$ angenommen ist. Für diese beiden letzten Punkte beträgt $F = \frac{1}{N_1}$ oder $= \frac{1}{N_2}$.

Nach dem zweiten Unstetigkeitspunkt senkt sich die Kurve auf den Grenzwert $\frac{\sqrt{M' E'}(m_1 + m_2)}{n\, m_1 m_2}$ herab. Zwischen den beiden Unstetigkeitspunkten liegt der Wert $F = 0$ für $N_1 = -N_2$ oder $n^2 = \frac{e_1 + e_2}{m_1 + m_2}$.

Der Wert für n der Hauptschwingung wird zwischen diesem letzteren Punkt und dem Punkt $\frac{e_2}{m_2}$ zu suchen sein.

Das Transmissionsmanometer als System von zwei Freiheitsgraden.

Das Transmissionsmanometer besteht aus einer Flüssigkeitssäule mit der wirksamen Masse M, die auf der einen Seite in Verbindung steht mit dem Inhalt des Röhrensystems, in dem der Druck gemessen werden soll (Arterie, Vene oder dgl.), auf der anderen Seite durch eine Membran mit dem Volumelastizitäts-Koeffizienten e_1 abgegrenzt ist. Dann folgt eine Luftsäule mit dem Volumelastizitäts-Koeffizienten E' zur Verbindung mit der Registrierkapsel. Die Registrierkapsel wird von mir jetzt als Kolbenkapsel behandelt. Sie hat den Quer-

schnitt Q. Die an dem Kolben angebrachte Feder erzielt einen Volumelastizitäts-Koeffizienten e_2, die Bewegungen des Kolbens werden durch einen Hebel mit der Masse $l\mu$ um das v fache vergrößert.

v und Q treten immer in der Verbindung $v/Q = R$ auf. Die Elastizitätskoeffizienten sind die folgenden:

$$c_1 = c_1 + E', \quad c_2 = (e_2 + E')\,Q^2, \quad c_{12} = E'\,Q.$$

Die Koppelungszahl

$$K = \frac{E'^2}{(c_1 + E')\,(e_2 + E')} = \frac{1}{1 + R/\gamma E'}.$$

Die Empfindlichkeit wird gleich

$$\gamma_r = \frac{v\sqrt{K}}{\sqrt{c_1 c_2}\,(1 - K)} = \frac{R}{\sqrt{c_1 e_2/E' + e_1 + e_2}}.$$

Die maximale Güte ist erreicht, wenn $n_1 = n_2$. Sie wird dann zu

$$G_{\max} = \frac{\sqrt{K}}{(1 - K)\sqrt{M'\mu e/3}}.$$

Die Bedingung $n_1 = n_2$ lautet hier:

$$(e_1 + E')\,R^2\,l\mu/3 = e_2 + E'.$$

Zu beachten ist, daß für die Empfindlichkeit eine gewisse Grenze nicht überschritten werden darf, wenn e nicht negativ werden soll. Sie findet sich, wenn man in der Gleichung für die Empfindlichkeit und in der letzten Bedingungsgleichung $c_2 = 0$ setzt. Die maximale Empfindlichkeit wird dann

$$\gamma = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{3\,E'\,M'}{l\mu\,(e_1 + E')}}.$$

Ebenso muß R über einen gewissen Wert hinausgehen, der aus denselben Beziehungen durch die Formel:

$$R^3 + E'\,\gamma\,R^2 - \frac{3\,E'\,\gamma\,M'}{\mu} = 0$$

ermittelt wird.

Die Formeln für die Reibung an der Hebelspitze werde ich später mitteilen.

Ich gebe für das Transmissionsmanometer einige Beispiele und zwar für einen Typus von der Empfindlichkeit des Arterienmanometers und einen zweiten von der Empfindlichkeit des Venenmanometers.

Arterienmanometer $\gamma_r = 7.5 \times 10^{-6}$ $M' = 60$ $\mu = 0.02$
$l = 5$ $E' = 0.3 \times 10^6$.

1. $R = 40$ $K = 0.0533$ $G = 0.419$ $N = 37.8$ $e_1 = 4.06 \times 10^6$
2. $R = 50$ $K = 0.0431$ $G = 0.384$ $N = 36.3$ $e_1 = 3.61 \times 10^6$
3. $R = 100$ $K = 0.0220$ $G = 0.289$ $N = 31.4$ $e_1 = 2.41 \times 10^6$

Venenmanometer $\gamma_r = 200 \times 10^{-6}$ $M' = 20$.

1. $R = 70$ $K = 0.462$ $G = 1.57$ $N = 14.1$ $e_1 = 0.188 \times 10^6$
2. $R = 100$ $K = 0.375$ $G = 1.47$ $N = 13.7$ $e_1 = 0.080 \times 10^6$

Berechnungen eines Transmissionsmanometers von brauchbarer Art 1. nach der „strengen" Behandlung, 2. als System von zwei Freiheitsgraden und 3. nach dem Prinzip der Massenkonzentration für die Luftsäule als System von drei Freiheitsgraden ergeben für die Hauptschwingung und die erste Oberschwingung eine sehr gute Übereinstimmung aller drei Berechnungsarten und für die zweite Oberschwingung eine Übereinstimmung der ersten und dritten Berechnungsart.

Der Lufttonograph.

Bei dem Lufttonographen fällt die Membran zwischen Flüssigkeitssäule und Luftsäule des Transmissionsmanometers weg, d. h. $e_1 = 0$. Damit wird $K = \frac{E'}{e_2 + E'}$ und die Empfindlichkeit $\gamma_r = \frac{R}{e}$.

Die Maximumbedingung für die Güte $n_1 = n_2$ läßt sich nicht erfüllen, weil sie erfordert, daß zu gleicher Zeit K nicht beeinflußt wird. Dagegen läßt sich ein Maximum der Güte für R ermitteln. Sie erfordert für das Venenmanometer (vgl.

oben) $R = 106.4$, für das Arterienmanometer dagegen $R = 4000$. Man sieht hieraus, daß der Lufttonograph als Arterienmanometer sehr unzweckmäßig ist, daß er dagegen eine relativ hohe Güte als Venenmanometer besitzen kann. Die besonderen Rechnungen, die in den folgenden Tabellen zusammengestellt sind, erweisen dies. Sie zeigen, daß der Lufttonograph als Venenmanometer sogar vor dem Transmissionsmanometer den Vorzug verdient, obwohl die Güte des Lufttonographen immer noch etwas hinter derjenigen des besten Transmissions-Venenmanometers zurücksteht. Aber technische Gründe, vor allem die Unmöglichkeit, gerade diejenige Membran als Scheidewand zu finden, welche die richtige Empfindlichkeit erzielt, bedingen für den Lufttonographen hier den Vorzug.

Arterienmanometer $\gamma_r = 7.5 \times 10^{-6}$.

$R = 20$	$K = 0.10$	$G = 0.034$	$N = 10.7$
$R = 100$	$K = 0.0220$	$G = 0.036$	$N = 11.1$.

Venenmanometer $\gamma_r = 200 \times 10^{-6}$.

$R = 20$	$K = 0.75$	$G = 0.72$	$N = 9.6$
$R = 100$	$K = 0.375$	$G = 1.41$	$N = 13.4$.

Der Transmissions-Sphygmograph.

Die Auswahl der zweckmäßigen Konstruktion ist bei diesem Instrument noch schwieriger als bei dem Transmissionsmanometer, weil die Zahl der Größen, über die verfügt werden muß, größer ist. Als Urkonstanten kommen in Betracht (ich verweise hierbei auf die Abhandlung von Frank und Petter über den Sphygmographen): 1. Die Berührungsfläche zwischen der Arterie und der Pelotte $= F$. 2. Der Querschnitt der Empfangskapsel (Kolbenkapsel) $= Q_1$. 3. Der Querschnitt der Registrierkapsel $= Q_2$. 4. Die Hebelvergrößerung $= v$. 5. Der Elastizitätskoeffizient von Haut und Gefäßpolster, der Sphygmographenfeder und ev. der Spannung der Membran $= \mathfrak{E}$. 6. E' der Luftsäule. 7. η bzw. e_2 der Registrierkapsel. In den Gleichungen tritt immer v mit Q als Quotient $v/Q = R$ auf.

Die abgeleiteten wichtigen Konstanten sind:

$$c_1 = e_1 + E', \quad c_2 = (e_2 + E')\, Q_2^2, \quad c_{12} = E'\, Q$$

$$K = \frac{E'^2}{(e_1 + E')\,(e_2 + E')} = \frac{1}{1 + \dfrac{F\,R}{Q_1\,\gamma\,E'}}.$$

Die Empfindlichkeit wird zu

$$\gamma_r = \frac{f}{p} = \frac{v\,F\sqrt{K}}{Q_1\sqrt{c_1\,c_2}\,(1-K)} = \frac{F}{Q_1} \cdot \frac{R}{\sqrt{e_1\,e_2}\,/\,E' + e_1 + e_2}.$$

Wenn $F = Q_1$ gesetzt wird, dann ergibt sich die Formel für das Transmissionsmanometer.

Die Güte wird maximal für $n_1 = n_2$. Sie wird dann gleich

$$\frac{F\sqrt{K}}{(1+\sqrt{K})\sqrt{m_1\,\mu\,e}\,/\,3}.$$

Die Maximumbedingung ($n_1 = n_2$) hat die Form:

$$e_2 + E' = (\mathfrak{E} + E'\,Q_1^2)\,l\,\mu\,R^2\,/\,3\,M'.$$

Zu der Berechnung der Güte ist folgendes hinzuzufügen. Neben der Maximumbedingung $\dfrac{\partial G}{\partial r} = 0$ könnte noch die Maximumbedingung $\dfrac{\partial G}{\partial Q_1} = 0$ erfüllt werden. Sie führt aber zu negativen Werten von e_2, ist daher unbrauchbar.

Die Erfüllung der Maximumbedingung $n_1 = n_2$ bringt gewisse Schwierigkeiten mit sich. Die Empfindlichkeit kann nämlich nicht über eine gewisse Grenze gesteigert werden, sonst wird e_2 negativ. Diese Grenze ergibt sich, wenn man in der Formel von γ_r und in der Maximumbedingung ($n_1 = n_2$) $e_2 = 0$ setzt:

$$\gamma_r < \frac{F\,Q}{\mathfrak{E}}\sqrt{\frac{E'\,3\,M'}{\mu\,l\,(E'\,Q^2 + \mathfrak{E})}}. \quad \text{Wenn } Q = \infty\text{: } \gamma_r < \frac{F}{\mathfrak{E}}\sqrt{\frac{1}{\mu'}}.$$

Berechnet man diesen Grenzwert für die Konstanten, wie sie bei dem Sphygmographen im allgemeinen vorhanden sind, so kommt man zur Empfindlichkeit $\gamma_r = 11.6 \times 10^{-6}$, deren Überschreitung ein negatives e hervorruft.

Ferner zeigt sich, daß beim Einhalten der Bedingung ($n_1 = n_2$) die Größen e_2, R und RQ_2 für ein bestimmtes Q ein Maximum haben. Es ergibt sich aus den allgemeinen Beziehungen und geht aus der angefügten Tabelle für die normaler Weise verfügbaren Größen hervor:

	R	RQ	e_2
$Q = 0.5$	13.8	6.9	-0.164
1	20.0	20.0	-0.0332
3	12.8	38.5	$+0.1060$
5	7.9	39.3	$+0.0480$
10	3.9	38.9	$+0.0124$

Bei der Forderung einer bestimmten Empfindlichkeit kann nach dem Vorhergehenden die Bedingung ($n_1 = n_2$) nur eingehalten werden, wenn die Empfindlichkeit unter dem obigen Grenzwert liegt. Da ferner für v und η (der Registrierkapsel) aus technischen Gründen bestimmte Grenzen gezogen sind, wird man in diesem Fall Q als Funktion der übrigen Größen darstellen. Aus der Formel für die Empfindlichkeit ergibt sich:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{2\,\mathfrak{S}}\left[\frac{Fv}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{F^2v^2}{\gamma^2} - 4\,\mathfrak{S}\,\eta\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{E'\,Q_1^2}\right)}\right].$$

Hieraus ersieht man, daß Q nur reell wird, wenn

$$v^2 \geq \frac{4\,\gamma^2\,\mathfrak{S}\,\eta}{F^2}\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{E'\,Q^2}\right).$$

Wird dieses minimale v eingesetzt, so erhält man:

$$Q_2 = \frac{F\,Q_1\,v}{2\,\gamma\,\mathfrak{S}} \text{ bzw. } Q_2 = Q_1\sqrt{\frac{\eta}{\mathfrak{S}}\left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{E'\,Q_1^2}\right)}. \text{ Da } \sqrt{1 + \frac{\mathfrak{S}}{E'\,Q_1^2}}$$

fast durchweg sehr nahe 1 wird, so ist Q_2 annähernd

$$= Q_1\sqrt{\frac{\eta}{\mathfrak{S}}}.$$

Ich gebe zum Schluß eine Übersicht über nach diesen Grundsätzen ausgewählte Konstruktionen.

$\gamma = 5 \times 10^{-6}$ Forderung $n_1 = n_2$ erfüllt ϑ stets $= 10^6$.
$Q_1 = 1.8 \quad R = 18.5 \quad K = 0.331 \quad G = 0.882$
$Q_1 = 3.0 \quad R = 12.8 \quad K = 0.54 \quad G = 0.979$

$\gamma = 7.5 \times 10^{-6}$.
$Q_1 = 2 \quad R = 14.9 \quad K = 0.501 \quad G = 0.93$
$Q_1 = 5 \quad R = 7.5 \quad K = 0.833 \quad G = 1.12 \quad (N = 61.4)$

$\gamma = 30 \times 10^{-6}$.
$Q_1 = 20 \quad Q_2 = 9 \quad v = 90 \quad R = 10, \quad \eta = 0.2 \times 10^6 \quad G = 0.432$
$N = 19.2.$

Es läßt sich auch der Einfluß des Trommelraumes berechnen, ebenso die Rückwirkung auf den Kreislauf. Die Formeln gebe ich hier nicht an.

Die Hebelschwingungen.

Die Ausschläge der Kolben und Membranen usw. werden bei den Instrumenten, die zur Russchreibung dienen, durch materielle Hebel vergrößert. Diese Hebel können durch Schwingungen die registrierte Kurve entstellen. Um eine Grundlage für das rechnerische Vorgehen zu gewinnen und zur Schätzung des Einflusses dieser Schwingungen berechne ich ein einfaches System. Ein Hebel dreht sich um eine Achse. Er ist bis zur Entfernung a von dieser Achse starr. Von dort für die Länge l biegsam mit dem Modul E. Die Masse eines Zentimeters ist $= \mu$, das Trägheitsmoment des Querschnitts $= \Theta$. In dem Punkt a greifen die äußeren Kräfte an. Sie bestehen in den Trägheitskräften einer Masse M und einer Feder mit dem Koeffizienten e. Die Differentialgleichung für die Biegungskurve des schwingenden Hebels (Stabs) lautet nach Rayleigh, Sound S. 256 und 261:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{\mu n^2 u}{\Theta E},$$

wobei u die Amplituden der verschiedenen Punkte des Hebels sind. Die Lösung dieser Gleichung läßt sich, da das eine Ende des Hebels $x = 0$ frei ist, in der Form schreiben, wenn man

$$\sigma = \sqrt[4]{\frac{n^2 \mu}{\Theta E}}$$

setzt: $u = A(\cos\sigma x + \cos h\,\sigma x) + C(\sin\sigma x + \sin h\,\sigma x)$.

Auf Grund des d'Alembertschen Prinzips gilt an dem Ende $x = l$ die Beziehung:

$$\Theta E\left(\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{x=l} = a(e - n^2 M)u,$$

worin durch $\frac{d^2u}{dx^2}$ das Biegungsmoment und durch $a\frac{d^3u}{dx^3}$ die Scheerkraft bestimmt ist. Ich schreibe zunächst u und seine Differentialquotienten an. Ist

$$R = \cos\sigma l + \cos h\,\sigma l, \quad S = -\sin\sigma l + \sin h\,\sigma l,$$
$$T = -\cos\sigma l + \cos h\,\sigma l, \quad U = \sin\sigma l + \sin h\,\sigma l,$$

so wird $u = AR + CU$.

$$\frac{du}{dx} = \sigma(AS + CR), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \sigma^2(AT + CS)$$

und

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \sigma^3(AU + CT).$$

Zur Elimination der Konstante C bzw. A dient die Beziehung $a(du/dx)_{x=l} = -u$. C wird dann

$$= -\frac{A(R + a\sigma S)}{U + a\sigma R}.$$

Daraus resultiert die Schlußgleichung

$$E\Theta[\sigma(TU - RS) + a\sigma^2(U^2 - S^2) + a^2\sigma^3(RU - ST)]$$
$$= a^2(e - n^2 M)(R^2 - SU)$$

bzw. $E\Theta[\sigma(\sin\cos h - \cos\sin h) + a\sigma^2(2\sin\sin h)$
$+ a^2\sigma^3(\sin\cos h + \cos\sin h)] = a^2(e - n^2 M)(1 + \cos\cos h)\cdot$
$[\sin = \sin\sigma l \text{ etc.}]$.

Interessant sind die Grenzwerte.

1. Die Masse des Hebels verschwindet. Dann ist $\varrho = 0$ und $n^2 = \frac{e}{M}$.

2. Der Grenzwert für das Verschwinden der Masse M läßt sich aus der Formel entnehmen.

3. Der Elastizitätskoeffizient der Feder wird $= \infty$, d. h. der Hebel wird unverrückbar eingeklemmt. Dann erhält man, weil die linke Seite der Gleichung endlich ist:

$$1 + \cos\sigma l \cos h\sigma l = 0,$$

was für den einseitig festgeklemmten Stab gilt.

4. Besonders bemerkenswert ist die Umformung der Gleichung beim Starrwerden des Hebels, d. h. wenn der Modul E unendlich wird. Dann wird bei der Entwicklung bis zur 4. Potenz von σl:

$$\sin\sigma l \sin\sigma l = \sigma^2 l^2;\ \sin\sigma l \cos h\sigma l = \sigma l + \frac{\sigma^3 l^3}{3},$$

$$\cos\sigma l \sin h\sigma l = \sigma l - \frac{\sigma^3 l^3}{3};\ \cos\sigma l \cos h\sigma l = 1 - \frac{\sigma^4 l^4}{4}.$$

Die Hauptgleichung wird zu

$$E\Theta\left(\sigma \cdot \frac{2\sigma^3 l^3}{3} + a\sigma^2 \cdot 2\sigma^2 l^2 + a^2\sigma^3 \cdot 2\sigma l\right) = 2a^2(e - n^2 M)$$

$$n^2 \mu\left(\frac{l^3}{3} + a l^2 + a^2 l\right) = a^2(e - n^2 M).$$

Daraus

$$n^2 = \frac{e}{m_{\text{red}} + M}$$

d. h. es resultiert die Schwingungszahl eines starren Hebels unter der Einwirkung des Elastizitätskoeffizienten e, wenn seine reduzierte Masse m_{red} und die Zusatzmasse M beträgt. Durch die Feststellung dieser Grenzwerte wird die allgemeine Gleichung verifiziert.

Da die Lösung der Gleichung durch die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen verwickelt wird, empfiehlt es sich, eine angenäherte Lösung zu suchen, die einer Beschränkung auf zwei Freiheitsgrade gleichkommt. Dazu entwickelt man die obigen Produkte in Reihen (bis zur 7. Potenz von σl).

Schließlich wird die Gleichung zu:

$$E\Theta\sigma^4\left[\frac{l^3}{3} + a\,l^2 + a^2\,l - \sigma^4\,l^4\left(\frac{l^3}{630} + \frac{a\,l^2}{90} + \frac{a^2\,l}{30}\right)\right] = a^2\,(e - n^2\,M)\left(1 - \frac{\sigma^4\,l^4}{12}\right).$$

Dividiert man durch $1 - \frac{\sigma^4\,l^4}{12}$, so ergibt sich:

$$n^2\mu\left[\frac{l^3}{3} + a\,l^2 + a^2\,l + \frac{n^2\,\mu}{E\Theta}\,l^4\left(\frac{11\,l^3}{420} + \frac{13\,a\,l^2}{180} + \frac{a^2\,l}{20}\right)\right] = a^2\,(e - n^2\,M).$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung hat sich den experimentellen Untersuchungen anzupassen.

Wendet man dieselbe Annäherung auf einen bekannten Fall an, nämlich auf einen einseitig eingeklemmten Stab, so führt sie zu sehr guten Werten für die Hauptschwingung und den ersten Oberton. Es ist zu erwarten, daß dies auch für unseren Fall gilt.

Ebenso wie unser Fall läßt sich auch die Schwingung eines Stabs mit am Ende befestigter Masse behandeln.

Inhalt.

Seite

Einleitung 107
Allgemeines Schwingungsproblem 108
Eigenschwingungen ohne Reibung 110
Eigenschwingungen mit Reibung 112
Die erzwungenen Schwingungen 113
Allgemeine Theorie der graphischen Registrierung 116
1. Die Empfindlichkeit 117
2. Die Schwingungszahlen des ungedämpften Systems . . . 118
3. Das logarithmische Dekrement der Eigenschwingungen . . 118
4. Die Güte des Registriersystems 119
5. Der Amplituden-Quotient Q und die Phasenverschiebung . 120
6. Die Korrektur der registrierten Kurven 121
Vereinfachung der Systeme und angenäherte Lösung der Gleichungen für reibungslose Schwingungen 122
Systeme von einem Freiheitsgrad 125
Systeme von zwei Freiheitsgraden 125
1. Die Empfindlichkeit 125
2. Die Frequenz des ungedämpften Systems 125
3. Die Güte 126
4. Zwei Freiheitsgrade, Elastizitäts- und Trägheitskoppelung . 127
5. Die Schwingungen des gedämpften Systems 128
D_1 bzw. $D_2 = \infty$ 130
$n_1 = n_2$ 130
$n_1 = n_2$, $D_1 = 0$ 133
Grenze der Aperiodizität einer Schwingung . . . 133
Angenäherte Berechnung der Wurzeln 134
n_1 und n_2 verschieden 136
n_2 nur wenig von n_1 verschieden, K klein. $D = 0$ . . 136
Das Königsche Resonanzphänomen 137

Seite

6. Erzwungene ungedämpfte Schwingungen 139
7. Erzwungene gedämpfte Schwingungen 140
Grenzen der dreifachen Positivität und Reellität für kleine und große Koppelung 142
Lage der Maxima und des Minimums 142
Systeme von drei Freiheitsgraden 145
Strenge Behandlung der Lufttransmission 147
Das Transmissionsmanometer 149
Der Lufttonograph 151
Der Transmissions-Sphygmograph 152
Die Hebelschwingungen 155

Die Abbildung einer bewegten Ebene durch eine photographische Kammer mit Schlitzverschluss [1]).

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 2. März 1918.

Koordinatensystem und Bezeichnungen. Die äußere Orientierung der Aufnahmekammer sei durch die Höhe h des Aufnahmeortes über der horizontal gedachten Objektebene, den Neigungswinkel ν der optischen Achse gegen die Objektebene und durch einen Kantungswinkel $\varkappa$ bestimmt, durch den die Haupthorizontale des Bildes in die Richtung der langen Seite des Bildrahmens übergeführt wird. Die innere Orientierung wird als bekannt vorausgesetzt; die Bildweite sei f. Ein Bildpunkt auf dem Positiv soll durch seine Lage in einem Koordinatensystem bestimmt sein, dessen X- und Y-Achse parallel zur langen, beziehungsweise kurzen Rahmenseite durch den Hauptpunkt des Bildes gehen; dieselben Richtungen sollen zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ haben, während $\mathfrak{k}$ in Richtung der optischen Achse vom Hauptpunkt auf den optischen Mittelpunkt zu verläuft. Dann stellt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y - \mathfrak{k}f$$

den vom optischen Mittelpunkt nach einem Punkt des Bildes führenden Vektor dar.

---

[1]) Für verschiedene Winke bin ich den Herren Prof. S. Finsterwalder und E. Rudel zu Dank verpflichtet; eine gemeinsame Arbeit mit letzterem gab die Veranlassung zu dieser Untersuchung.

Es bedeute ferner:

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{i} \sin \varkappa + \mathfrak{j} \cos \varkappa) \cos \nu + \mathfrak{k} \sin \nu$$

einen Einheitsvektor in Richtung des Lotes h gegen den Zenith zu.

Die Bewegung der Aufnahmekammer gegenüber der Objektebene besitzt eine fortschreitende Geschwindigkeit

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{i} u + \mathfrak{j} v + \mathfrak{k} w$$

und eine Winkelgeschwindigkeit

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{i} p + \mathfrak{j} q + \mathfrak{k} r.$$

Für den rechnerischen Ansatz ist es bequem, sich die Kammer fest zu denken und der Objektebene die Geschwindigkeiten $-\mathfrak{V}$ und $-\mathfrak{W}$ zuzuschreiben.

Infinitesimale projektive Transformation. Eine in der kleinen Zeit dt vor sich gehende Änderung der gegenseitigen Lage von Objekt und Kammer bringt eine infinitesimale projektive Transformation des Bildes hervor, die zunächst aufgestellt werden soll, und zwar in die von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ herrührenden Teile zerlegt. — Der vom Aufnahmeort nach einem Punkt der Objektebene führende Vektor $\mathfrak{X}$ hängt mit dem Bildvektor $\mathfrak{A}$ durch die Gleichung $\mathfrak{X} = c\mathfrak{A}$ zusammen, wo c ein skalarer Faktor ist. Im Fall einer fortschreitenden Bewegung erleidet der Vektor $\mathfrak{X}$ für jeden Objektpunkt in der Zeit dt die gleiche Änderung $d\mathfrak{X} = -\mathfrak{V}\,dt$. Die Verschiebung $d_1\mathfrak{A}$ des Bildpunktes ist dann durch die Gleichung

$$-\mathfrak{V}\,dt = dc\,\mathfrak{A} + c\,d_1\mathfrak{A}$$

gegeben. Weil die Bildebene, in der die Verschiebung erfolgt, auf der optischen Achse senkrecht steht, ist $(\mathfrak{k}\,d_1\mathfrak{A}) = 0$; also

$$-(\mathfrak{k}\mathfrak{V})\,dt = (\mathfrak{k}\mathfrak{A})\,dc$$

oder nach Rückkehr zu den Koordinaten

$$w\,dt = f\,dc; \quad dc = \frac{w}{f}\,dt.$$

Folglich ist $d_1\mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\left(\frac{w}{f}\mathfrak{A} + \mathfrak{V}\right)dt.$

c ist selbst von der Orientierung abhängig und im Bild von Punkt zu Punkt veränderlich. Die Einführung der Höhe ergibt

$$-h = (\mathfrak{X}\,\mathfrak{n}) = c\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n}); \quad c = -\frac{h}{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n})}.$$

Damit ist für die aus der fortschreitenden Bewegung folgende Verschiebung der Bildpunkte der Ausdruck gewonnen:

1) $$d_1\mathfrak{A} = \frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n})}{h}\left(\frac{w}{f}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right)dt.$$

Um die aus der Drehung herrührende Verschiebung der Bildpunkte abzuleiten, denkt man sich das ganze Büudel der Bildvektoren um eine durch den optischen Mittelpunkt gehende Achse als Träger des Drehvektors $\mathfrak{W}\,dt$ gedreht. Der Endpunkt jedes Bildvektors $\mathfrak{A}$ wird hiebei um $[\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,dt$ verschoben und liegt infolgedessen nicht mehr in der Bildebene, muß vielmehr vom optischen Mittelpunkt aus wieder in dieselbe projiziert werden; dies geschieht durch Multiplikation des durch die Drehung aus $\mathfrak{A}$ hervorgegangenen Vektors $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + [\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,dt$ mit einem Skalar $1 + \varepsilon$, der so zu bestimmen ist, daß

$$(1 + \varepsilon)\,(\mathfrak{A}'\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{k}) = -f \text{ ist.}$$

Die Ausführung dieser Multiplikation ergibt

$$(1 + \varepsilon)\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{k}) + (1 + \varepsilon)\,([\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})\,dt = -f$$

und hieraus unter Weglassung von Gliedern höherer Ordnung

$$\varepsilon = \frac{([\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})\,dt}{f}.$$

Der neue Bildvektor wird somit:

$$\mathfrak{A}'' = (1 + \varepsilon)\,\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \left\{[\mathfrak{W}\mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})}{f}\mathfrak{A}\right\}dt,$$

also die aus der Drehung folgende Verschiebung der Bildpunkte selbst

2) $$d_2\mathfrak{A} = \left\{[\mathfrak{W}\mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{W}\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})}{f}\mathfrak{A}\right\}dt.$$

Die aus der ganzen Bewegung folgende Verschiebung der Bildpunkte ist die Summe $d\mathfrak{A} = d_1\mathfrak{A} + d_2\mathfrak{A}$; also:

$$3)\quad d\mathfrak{A} = \left\{\frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n})}{h}\left(\frac{w}{f}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right) + [\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})}{f}\,\mathfrak{A}\right\} dt.$$

Geht man zu Koordinaten über, so erhält man folgende Ausdrücke, die die geometrisch evidente Projektivität der Transformation auch analytisch sichtbar machen:

$$d_1\mathfrak{A} = \frac{1}{hf}\,[(x\sin\varkappa + y\cos\varkappa)\cos\nu - f\sin\nu]\;[\mathfrak{i}\,(wx + fu)$$
$$1\,a)\qquad + \mathfrak{j}\,(wy + fv)]\,dt,$$

$$d_2\mathfrak{A} = \frac{1}{f}\,[\mathfrak{i}\,(pxy - q(x^2 + f^2) - ryf) + \mathfrak{j}\,(p(y^2 + f^2) - qxy$$
$$2\,a)\qquad + rxf)]\,dt.$$

Die Schlitzverschluß-Verzerrung. Die bisher behandelte infinitesimale projektive Transformation ist dem Betrag nach mit der Zeit veränderlich. Weil nicht das ganze Bild durch gleichzeitige Belichtung entstanden ist, sondern dadurch, daß ein enger Schlitz mit beträchtlicher Geschwindigkeit über die Platte wanderte, kommt den Punkten eines jeden durch gleichzeitige Belichtung entstandenen Bildstreifens eine Verschiebung $d\mathfrak{A}$ zu, deren Betrag von dem durch dt gekennzeichneten Zeitpunkt der Belichtung abhängig ist. Setzt man voraus (was der Wirklichkeit nicht ganz genau entspricht), daß der Verschluß mit konstanter Geschwindigkeit über die Platte läuft, und bezeichnet man die kleine Zeit, in der er den Weg 1 (cm) zurücklegt, mit $\delta\tau$, so ist der Zeitpunkt, in der ein zur Ordinate y gehöriger Streifen belichtet wurde, durch $dt = y\,\delta\tau$ gegeben, wenn man als Nullpunkt der Zeit dt den Zeitpunkt einführt, in dem der Schlitz über den Mittelpunkt der Platte läuft. Für die Verschiebung aller Punkte des Bildes erhält man dann folgende „Schlitzverschluß-Verzerrung“:

$$4)\quad \delta\mathfrak{A} = \left\{\frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n})}{h}\left(\frac{w}{f}\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right) + [\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}]\,\mathfrak{k})}{f}\,\mathfrak{A}\right\} y\,\delta\tau.$$

Geht man wieder zu Koordinaten über, so erhält man, nach den 6 Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, p, q, r zerlegt, folgenden Ausdruck:

$$\delta\mathfrak{A} = \left(\mathrm{i}\frac{u}{h}\delta\tau + \mathrm{j}\frac{v}{h}\delta\tau\right)[(x\sin\varkappa + y\cos\varkappa)\cos\nu - f\sin\nu]\,y$$

4 a)
$$+\frac{w}{h}\delta\tau(\mathrm{i}x + \mathrm{j}y)[(x\sin\varkappa + y\cos\varkappa)\cos\nu - f\sin\nu]\frac{y}{f}$$
$$+ p\,\delta\tau[\mathrm{i}xy + \mathrm{j}(y^2 + f^2)]\frac{y}{f} + q\,\delta\tau[-\mathrm{i}(x^2 + f^2) - \mathrm{j}xy]\frac{y}{f}$$
$$+ r\,\delta\tau[-\mathrm{i}y + \mathrm{j}x]\,y.$$

Jede einer Geschwindigkeitskomponente entsprechende Verzerrung läßt sich darstellen als Produkt aus einem kleinen, dieser Geschwindigkeit proportionalen Faktor ε und einer Verzerrung, die dem Wert 1 dieses Faktors entsprechen würde. Die Faktoren ε sollen in folgender Weise definiert werden:

5)
$$\varepsilon_1 = \frac{u}{h}\delta\tau;\quad \varepsilon_2 = \frac{v}{h}\delta\tau;\quad \varepsilon_3 = \frac{w}{h}\delta\tau;$$
$$\varepsilon_4 = p\,\delta\tau;\quad \varepsilon_5 = q\,\delta\tau;\quad \varepsilon_6 = r\,\delta\tau.$$

Sie sind als kleine Winkel zu betrachten. Ferner sollen folgende Elementar-Verschiebungen eingeführt werden:

$\mathfrak{P}^{\mathrm{I}}_1 = \mathrm{i}fy$ eine Scherung parallel zur langen Rahmenseite;

$\mathfrak{P}^{\mathrm{I}}_2 = \mathrm{j}fy$ eine Affinität in Richtung der kurzen Rahmenseite;

6) $\mathfrak{P}^{\mathrm{II}}_1 = (\mathrm{i}x + \mathrm{j}y)y$ eine spezielle Zentralperspektive mit der x Achse als Achse;

$$\mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}_1 = (-\mathrm{i}y + \mathrm{j}x)y;\quad \mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}_2 = \mathrm{i}xy;\quad \mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}_3 = \mathrm{j}xy;$$
$$\mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}_4 = \mathrm{i}y^2;\quad \mathfrak{Q}^{\mathrm{II}}_5 = \mathrm{j}y^2;$$

$$\mathfrak{Q}^{\mathrm{III}}_1 = (\mathrm{i}x + \mathrm{j}y)\frac{xy}{f};\quad \mathfrak{Q}^{\mathrm{III}}_2 = (\mathrm{i}x + \mathrm{j}y)\frac{y^2}{f}.$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich die 6 von den 6 Geschwindigkeits-Komponenten herrührenden Verzerrungen in folgender Weise darstellen:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathfrak{A}_1 &= \varepsilon_1[-\mathfrak{P}_1^{\mathrm{I}}\sin\nu + (\mathfrak{Q}_2^{\mathrm{II}}\sin\varkappa + \mathfrak{Q}_4^{\mathrm{II}}\cos\varkappa)\cos\nu]\\
\delta\mathfrak{A}_2 &= \varepsilon_2[-\mathfrak{P}_2^{\mathrm{I}}\sin\nu + (\mathfrak{Q}_3^{\mathrm{II}}\sin\varkappa + \mathfrak{Q}_5^{\mathrm{II}}\cos\varkappa)\cos\nu]\\
\delta\mathfrak{A}_3 &= \varepsilon_3[-\mathfrak{P}_1^{\mathrm{II}}\sin\nu + (\mathfrak{Q}_1^{\mathrm{III}}\sin\varkappa + \mathfrak{Q}_2^{\mathrm{III}}\cos\varkappa)\cos\nu]\\
\delta\mathfrak{A}_4 &= \varepsilon_4[\mathfrak{P}_2^{\mathrm{I}} + \mathfrak{Q}_2^{\mathrm{III}}]\\
\delta\mathfrak{A}_5 &= \varepsilon_5[-\mathfrak{P}_1^{\mathrm{I}} - \mathfrak{Q}_1^{\mathrm{III}}]\\
\delta\mathfrak{A}_6 &= \varepsilon_6\mathfrak{Q}_1^{\mathrm{II}}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Hiebei bedeutet $\mathfrak{P}$ eine projektive, $\mathfrak{Q}$ eine nicht projektive Verschiebung. Alle $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind in x, y, f homogen vom 2. Grad. Die römischen Ziffern, die bei $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ als oberer Index auftreten, geben den Grad in x, y an. Weil $|ix + jy|$ höchstens gleich der halben Bilddiagonale werden kann, die im allgemeinen wesentlich kleiner als die Bildweite f ist, sind die Höchstbeträge der Verschiebungen eines jeden Grades im Verhältnis der halben Diagonalen zur Bildweite kleiner als die Höchstbeträge der Verschiebungen des nächst niedrigeren Grades, also von kleinerem Einfluß auf die Verzerrung des Bildes. Zwischen den 6 Elementar-Verschiebungen 2. Grades bestehen 2 lineare Gleichungen; $\mathfrak{P}_1^{\mathrm{II}}$ und $\mathfrak{Q}_1^{\mathrm{II}}$ sind nur der Einfachheit halber eingeführt.

Die Unschärfe des Bildes. Die Verzerrung $\delta\mathfrak{A}$ an irgend einer Stelle x, y des Bildes kann man als die Verschiebung des Bildpunktes während der Zeit $y\,\delta\tau$ auffassen, in der der Schlitz den Weg von der Plattenmitte bis zur Ordinate y zurücklegt. Ist die Schlitzbreite σ, so ist $\sigma\,\delta\tau$ die Zeit T, die jeder Punkt belichtet (Belichtungszeit), während der Schlitz über ihn hinweggeht. Die während dieser Zeit stattfindende Verschiebung $\mathfrak{U}$ des Bildpunktes äußert sich als Unschärfe, und zwar ist

$$
\mathfrak{U} = \frac{\sigma}{y}\,\delta\mathfrak{A} = \frac{T}{y\,\delta\tau}\,\delta\mathfrak{A} \tag{8}
$$

$$
\text{oder}\quad \mathfrak{U} = \left\{\frac{(\mathfrak{A}\,\mathfrak{n})}{h}\left(\frac{w}{f}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\right) + [\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}] + \frac{([\mathfrak{W}\,\mathfrak{A}]\,\mathfrak{f})}{f}\mathfrak{A}\right\} T.
$$

Die Unschärfe ist also zum Unterschied von der Schlitzverschluß-Verzerrung eine projektive Verschiebung der Bild-

punkte; sie läßt sich in analoger Weise wie diese zerlegen, was hier nicht näher ausgeführt werden soll; insbesondere sind jedoch die zu den Elementar-Verschiebungen $\mathfrak{P}_1^1$ und $\mathfrak{P}_2^1$ gehörigen Unschärfen

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1^1) = \sigma i f \text{ und } \mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2^1) = \sigma j f$$

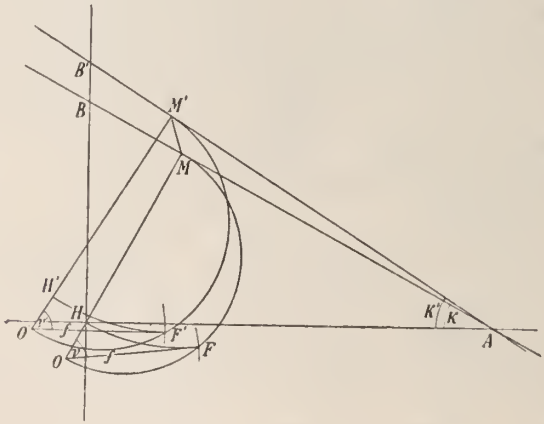
über das ganze Bild hin nach Richtung und Größe konstant.

Wenn während der Aufnahme nur eine fortschreitende Bewegung vorhanden war, so überwiegt der projektive Teil der Verzerrung über den nicht projektiven, und der konstante Teil der Unschärfe über den veränderlichen. In ähnlicher Weise bewirkt eine reine Drehung um eine Parallele zur Platte bis auf unprojektive Glieder höherer Ordnung dieselbe Art von Verzerrung und Unschärfe wie fortschreitende Bewegung in Richtung der dazu senkrechten Parallelen zur Platte. Dagegen heben sich bei gezielten Aufnahmen, wenn während der Aufnahme die Kammer so bewegt wird, daß die optische Achse durch einen festen Punkt des Objektes geht, die von Fortschreitung und Drehung herrührenden projektiven Verzerrungen 1. Grades auf; ebenso der konstante Teil der Unschärfe. Verzerrung und Unschärfe wachsen also rasch gegen die Ecken des Bildes zu. Ähnliche Verhältnisse hat eine reine Drehung der Kammer um die optische Achse zur Folge.

Die Fälschung der Orientierung. Die projektiven Teile der durch den Schlitzverschluß hervorgebrachten Verzerrungen und die so entstandenen Abweichungen von der durch einen Zentralverschluß erzeugten Perspektive haben zur Folge, daß sowohl die äußere als auch die innere Orientierung der Kammer während der Aufnahme verändert erscheint. Setzt man, was bei ebenen Objekten gestattet ist, die zu der verzerrten Perspektive gehörige Bildweite = der Bildweite der Kammer, so äußert sich die Fälschung der Orientierung durch den Schlitzverschluß am auffälligsten in einer Veränderung der Lage des Hauptpunktes. Es soll wenigstens für die beiden Verzerrungen erster Ordnung $\mathfrak{P}_1^1$ und $\mathfrak{P}_2^1$, die sich stets zu einer schiefen Affinität zusammensetzen, ein graphisches Ver-

fahren angegeben werden, durch das sich die Verlegung des Hauptpunktes ermitteln läßt.

Es sei, unter Voraussetzung der Belichtung durch einen Zentralverschluß, H der Hauptpunkt, HA und HB parallel zur langen, bzw. kurzen Rahmenseite, AB der Horizont, d. h. das Bild der ∞ fernen Geraden der Objektebene, HM die Hauptvertikale, $BAH = \varkappa$ der Kantungswinkel. Auf dem Horizont bilden die Fluchtpunkte der Bilder von Paaren aufeinander senkrechter Richtungen in der Objektebene eine Involution, die vom optischen Mittelpunkt 0 aus durch eine Rechtwinkel-Involution projiziert wird. Die Ebene durch Horizont und optischen Mittelpunkt ist in der Figur um den Horizont in die Bildebene geklappt; ebenso um die Gerade OM dieser Ebene die durch die Hauptvertikale und optische Achse gehende Lotebene MOF, in der die Brennweite f und der Neigungswinkel ν liegen.



Bei einer aus $\mathfrak{P}_1^{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{P}_2^{\mathrm{I}}$ zusammengesetzten Transformation erleiden alle Punkte des Horizonts Verschiebungen in gleicher Richtung. A bleibt wie jeder Punkt der Geraden HA an seiner Stelle; M soll nach M' kommen; $\sphericalangle M'AH = \varkappa'$ ist die veränderte Kantung. Die auf dem Horizont liegende Involution erfährt eine Maßstabsänderung, wobei M' Mittel-

punkt der neuen Involution wird. Im gleichen Verhältnis wie alle Strecken auf dem Träger der Involution ändert sich auch der Abstand des Punktes, von dem aus sie als Rechtwinkel-Involution projiziert wird. Man hat also, um den neuen optischen Mittelpunkt $0'$ zu finden, in M' ein Lot zu errichten, dessen Länge durch die Gleichung $0'M' : 0M = M'A : MA$ bestimmt ist. Damit ist auch der zu jeder beliebigen, z. B. der unveränderten Brennweite f gehörige Neigungswinkel ν' und Hauptpunkt H' bekannt.

Die Durchbiegung der Bilder von Geraden. Die nicht projektiven Teile der Schlitzverschluß-Verzerrung haben zur Folge, daß sich die Geraden der Objektebene im allgemeinen nicht als Gerade abbilden, sondern eine Durchbiegung erleiden. Als obere Grenze für den Biegungspfeil hat man den Betrag der Verzerrung $\delta\mathfrak{A}$ in den Punkten, in denen die betreffende Gerade den Bildrand trifft, kann also zu ihrer Bestimmung die Kurvensysteme benützen, welche die Elementar-Verschiebungen darstellen; jedoch wird diese obere Grenze nur in 2 Fällen, nämlich bei $\mathfrak{Q}_1^{II}$ für Gerade durch den Mittelpunkt und bei $\mathfrak{Q}_4^{II}$ für Parallele zur kurzen Rahmenseite wirklich erreicht.

Um die Gleichung der Kurven zu finden, welche durch die Schlitzverschluß-Verzerrung aus den Geraden des nicht verzerrten Bildes hervorgehen, kann man von Gleichung (4 a) mit vereinfachten Koeffizienten ausgehen. Es sei $\delta\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\,\delta x + \mathfrak{j}\,\delta y$ gesetzt, und die Koordinaten eines Punktes in dem verzerrten Bild mit $\xi = x + \delta x$, $\eta = y + \delta y$ bezeichnet. Dann ist

$$9) \qquad \begin{aligned} \xi &= x + [a + cx + dy + x(hx + ky)]\, y\,\delta\tau \\ \eta &= y + [b + ex + fy + y(hx + ky)]\, y\,\delta\tau. \end{aligned}$$

Es sei

$$10\,a) \qquad Ax + By + C = 0$$

die Gleichung einer Geraden im ursprünglichen System. Dann folgt nach Multiplikation der Gleichungen (9) mit A bzw. B:

$$A\xi + B\eta = -C + [A(a + cx + dy) + B(b + ex + fy) - C(hx + ky)]\, y\,\delta\tau.$$

In dem Faktor von $\delta\tau$ kann man unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in $\delta\tau$ die Größen x, y durch ξ, η ersetzen; dann ergibt sich die deformierte Kurve als Kegelschnitt

$$10\,\text{b)} \quad \begin{aligned} &-(Ac + Be - Ch)\,\delta\tau\,xy - (Ad + Bf - Ck)\,\delta\tau\,y^2 \\ &+ A\xi + (B - (Aa + Bb)\,\delta\tau)\,y + C = 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante ist $(-Ac - Be + Ch)^2\,\delta\tau^2$; sie ist für reelle Werte der Koeffizienten größer als Null oder höchstens gleich Null, und zeigt, daß außer Geraden nur Hyperbeln und Parabeln als Bilder von Geraden möglich sind.

Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit einer lithographierten Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 9. Februar 1918.

I. Grundlehren der sphärischen Bewegung, abgeleitet aus der ebenen Bewegung.

In der Lehre von der Bewegung des Auges haben die irrtümlichen Begriffe „Raddrehung“ und „Rollung“ Anlaß gegeben zu vielen Mißverständnissen und Schwierigkeiten, die durch kinematische Aufklärung erledigt werden. J. Purkinje[1]), der die Bewegung des Auges eine Musik des Auges nennt, hat schon vor nahe hundert Jahren darauf hingewiesen, daß die Gesetze dieser Bewegung ihre Gültigkeit in der Phoronomie haben, die nunmehr Kinematik genannt wird. Demnach sind zur Lehre von der Bewegung des Auges die Grundlehren der sphärischen Bewegung erforderlich, die aber bedingt wird durch das aus dem Listingschen Gesetz gefolgerte Hauptgrundgesetz der Bewegung des Auges.

Bei der theoretischen Betrachtung der Bewegung des Auges wird der Augapfel als eine Kugel und deren Mittelpunkt als einen in dem Kopfe festen Drehpunkt angenommen, weil nach experimentellen Beobachtungen seine Lage sich während der Bewegung des Auges nur um Bruchteile eines Millimeters verändert[2]). Demzufolge kann die Bewegung des Auges, mithin auch die Bewegung der Ansätze der sechs Augenmuskeln als sphärische Bewegung betrachtet werden, und zur Diagnose dienen.

Die Gesamtheit beliebig vieler in einer Ebene oder in einer Kugelfläche liegenden, starr miteinander verbundenen Punkte wird ein ebenes Gebilde oder ein sphärisches Gebilde genannt. Die Bewegung eines ebenen Gebildes in einer Ebene heißt ebene Bewegung, und die Bewegung eines sphärischen Gebildes auf einer Kugelfläche sphärische Bewegung. Durch die sphärische Bewegung, die wir aus der ebenen ableiten, wird die Vorstellung von der Bewegung des Auges veranschaulicht und erleichtert.

Wird in Fig. 1 der Tafel ein ebenes Gebilde G in einer ruhenden Ebene aus einer Lage G_1 in eine andere Lage G_2 beliebig bewegt, so sind G_1, G_2 kongruente ebene Gebilde. Indem wir die entsprechenden gleichen Strecken A_1B_1, A_2B_2 als gegeben annehmen, erhalten wir zu einem beliebigen Punkt C_1 in G_1 den entsprechenden Punkt C_2 in G_2 durch das zu dem Dreieck $A_1B_1C_1$ konstruierte kongruente Dreieck $A_2B_2C_2$; mithin sind durch zwei entsprechende Punktpaare A_1B_1, A_2B_2 je zwei Lagen G_1, G_2 eines ebenen Gebildes bestimmt.

Errichten wir auf den Verbindstrecken A_1A_2, B_1B_2 in deren Mitten m_a, m_b die Normalen $m_a\mathfrak{P}_{12}$, $m_b\mathfrak{P}_{12}$, die sich im Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ schneiden, so sind die Dreiecke $A_1B_1\mathfrak{P}_{12}$, $A_2B_2\mathfrak{P}_{12}$ wegen ihrer entsprechenden gleichen Seiten kongruent; und in dem Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ liegen zwei entsprechende Punkte der Gebilde G_1, G_2 vereint, der als solcher der einzige selbstentsprechende Punkt dieser Gebilde ist. Denn wenn noch zwei andere entsprechende Punkte vereint wären, dann decken sich die beiden kongruenten Gebilde. Der selbstentsprechende Punkt $\mathfrak{P}_{12}$ heißt der Pol der beiden Lagen G_1, G_2. Demnach gehen alle in dem mitten auf den Verbindstrecken der entsprechenden Punkte errichteten Normalen durch den Pol $\mathfrak{P}_{12}$; und ein ebenes Gebilde kann durch Drehung um den Pol aus der einen zweier gegebener Lagen in die andere gebracht werden.

Sonach ergeben sich die Sätze:

1. Die Normalen in den Mitten auf den Verbindstrecken der entsprechenden Punkte zweier in einer

Ebene liegenden kongruenten Gebilde gehen durch den Pol.

2. Jede ebene Bewegung eines ebenen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um den Pol ersetzt werden.

Wenn insonderheit die beiden Lagen parallel sind, dann liegt der Pol im Unendlichen.

Um die analogen Beziehungen bei der sphärischen Bewegung darzulegen, betrachten wir anstatt jener ebenen Gebilde G_1, G_2 und jener ebenen Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ nun in der schematischen Fig. 1a die übereinstimmend bezeichneten kongruenten sphärischen Gebilde G_1, G_2 und die kongruenten sphärischen Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ auf einer gedachten, um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugelfläche. Die Seiten dieser sphärischen Dreiecke können Bögen von Kleinkreisen und Großkreisen der Kugelfläche sein, während bei einem gewöhnlichen sphärischen Dreieck die drei Seiten Bögen von Großkreisen sind.

Anstatt jener in Fig. 1 in den Mitten m_a, m_b auf den Verbindstrecken $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ errichteten Normalen, die den Pol $\mathfrak{P}_{12}$ bestimmen, legen wir in Fig. 1a durch die Mitten m_a, m_b auf die Verbindsehnen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ der Kugelfläche Normalebenen, die sich in einer durch den Mittelpunkt O gehenden Geraden schneiden, die wir die Polachse der beiden Lagen G_1, G_2 nennen. Die Polachse schneidet die Kugelfläche in zwei Punkten, von denen nur der eine eingezeichnete $\mathfrak{P}_{12}$ in Betracht kommt und der Pol der beiden Lagen heißt. Hiernach ergeben zu 1 und 2 die analogen auf der Kugelfläche geltenden Sätze:

1a. Die Normalebenen in den Mitten auf den Verbindsehnen der entsprechenden Punkte zweier auf einer Kugelfläche liegenden kongruenten Gebilde gehen durch die Polachse.

2a. Jede sphärische Bewegung eines sphärischen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um die Polachse ersetzt werden.

Die Normalebene in der Mitte auf der Verbindsehne zweier entsprechender Punkte schneidet die Kugelfläche in einem durch den Pol gehenden Großkreis, den wir den Normalgroßkreis für die Mitte der Verbindsehne nennen. Sonach folgen ferner die analogen Sätze:

1b. Die Normalgroßkreise für die Mitten der Verbindsehnen der entsprechenden Punkte zweier auf einer Kugelfläche liegenden kongruenten Gebilde gehen durch den Pol.

2b. Jede sphärische Bewegung eines sphärischen Gebildes aus einer Lage in eine andere kann durch Drehung um den Pol ersetzt werden.

Nach diesen Darlegungen ergeben sich fernerhin sinngemäß zu den Beziehungen der ebenen Bewegung analoge Beziehungen der sphärischen Bewegung.

In Fig. 2 sind durch die drei entsprechenden Strecken B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 die drei Lagen G_1, G_2, G_3 eines ebenen Gebildes G bestimmt, und die zugehörigen drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ konstruiert. Sind umgekehrt die drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben, so sind dadurch auch die drei zugehörigen Lagen bestimmt, und können in einfacher Weise konstruiert werden, wenn wir z. B. in G_1 einen beliebigen Punkt A_1 annehmen.

Zu dem selbstentsprechenden Punkt $\mathfrak{P}_{23}$ in G_2, G_3 ergibt sich der entsprechende Punkt $\mathfrak{P}'_{23}$ in G_1 als zweiter Schnittpunkt der durch $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden, um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ beschriebenen Kreisbögen, und der Punkt $\mathfrak{P}'_{23}$ liegt mithin symmetrisch zu dem Punkt $\mathfrak{P}_{23}$ in Bezug auf die Gerade $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$. Ferner beschreiben wir um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch den Punkt A_1 gehenden Bahnkreise a_{12}, a_{13}, die sich in einem zweiten Punkt A_1 schneiden. Drehen wir nun um $\mathfrak{P}_{12}$ das Dreieck $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}'_{23}A_1$ nach $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{23}A_2$, so ist $\mathfrak{P}_{23}A_2 = \mathfrak{P}'_{23}A_2 = \mathfrak{P}_{23}\mathsf{A}_1$; und drehen wir ferner um $\mathfrak{P}_{13}$ das Dreieck $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}'_{23}A_1$ nach $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{23}A_3$, so ist auch $\mathfrak{P}_{23}A_3 = \mathfrak{P}'_{23}A_3 = \mathfrak{P}_{23}\mathsf{A}_1$, wobei die gedrehten Dreiecke strichpunktiert gekennzeichnet sind; folglich schneidet der um $\mathfrak{P}_{23}$ mit dem Radius $\mathfrak{P}_{23}\mathsf{A}_1$ beschriebene Bahnkreis a_{23} die Bahnkreise a_{12}, a_{13} in den Punkten A_2, A_3. Da hiernach

$\mathfrak{P}_{23}^{1} A_1$, $\mathfrak{P}_{23} A_2$, $\mathfrak{P}_{23} A_3$ entsprechende Strecken in den Lagen G_1, G_2, G_3 sind, so ergeben sich in diesen auch die entsprechenden kongruenten Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$.

Demnach erhalten wir den bei der ebenen und der sphärischen Bewegung geltenden Satz:

3. Die um die drei Pole dreier Lagen eines ebenen oder sphärischen Gebildes beschriebenen drei Bahnkreise eines Punktes des Gebildes schneiden sich in einem Punkt.

Weiter folgt für die ebene und die sphärische Bewegung die Konstruktion:

4. Wenn in Fig. 2 drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben sind, beschreibe man um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden Kreisbögen, die sich in dem zweiten Punkt $\mathfrak{P}_{23}^{1}$ schneiden, ferner um $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ die durch einen beliebigen in G_1 angenommenen Punkt A_1 gehenden Bahnkreise α_{12}, α_{13} und um $\mathfrak{P}_{23}$ den durch ihren zweiten Schnittpunkt A_1 gehenden Bahnkreis α_{23}, der α_{12}, α_{13} in den Punkten A_2, A_3 schneidet; dann sind $\mathfrak{P}_{23}^{1} A_1$, $\mathfrak{P}_{23} A_2$, $\mathfrak{P}_{23} A_3$ entsprechende Strecken in G_1, G_2, G_3, und dadurch die Lagen bestimmt.

Sind B_1, $\mathsf{\Gamma}_1$ die Schnittpunkte je drei der um die drei Pole beschrieben gedachte Bahnkreise der Punkte B, C des Gebildes G; dann ist das Dreieck $\mathsf{A}_1 \mathsf{B}_1 \mathsf{\Gamma}_1$ symmetrisch zu den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ bezüglich der Geraden $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{13}$. Von diesen Geraden werden also die Strecken $\mathsf{A}_1 A_1$, $\mathsf{A}_1 A_2$, $\mathsf{A}_1 A_3$ senkrecht halbiert[3]).

Sind nur die beiden Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gegeben und nehmen wir den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in beliebigen Lagen an, so werden für jede Lage desselben die beiden zugehörigen Lagen G_2, G_3 durch die Schnittpunkte bestimmt, die der um $\mathfrak{P}_{23}$ beschriebene, durch den Punkt A_1 gehende Bahnkreis α_{23} mit den Bahnkreisen α_{12}, α_{13} bildet. Wird der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in den Punkt A_1 gelegt, so schrumpft der Bahnkreis α_{23} in dem Punkt A_1 zusammen und die beiden Lagen G_2, G_3 decken sich. Wird der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in die Gerade $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$ gelegt, so fallen die drei Lagen G_1, G_2, G_3 zusammen. Diese Beziehungen dreier Lagen eines Gebildes in

der Ebene gelten auch sinngemäß bei drei Lagen eines Gebildes auf einer Kugelfläche.

In Fig. 3 sind die Bahnkurven α, β zweier Punkte A, B eines bewegten ebenen Gebildes G gegeben, und dadurch ist dessen Bewegung in einer Ebene bestimmt. Denn nehmen wir zwei Lagen A_1B_1, A_2B_2 an, so erhalten wir durch die kongruenten Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und mehrere solche die Bahnkurve γ des dritten Punktes C. Ebenso ergeben sich die Bahnen aller Punkte des Gebildes G. Denken wir uns das Gebilde aus der Lage A_1B_1 in eine unendlich nahe Lage bewegt, so kann diese Bewegung als eine unendlich kleine Drehung um den Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1$ der Normalen $A_1\mathfrak{P}_1$, $B_1\mathfrak{P}_1$ an den Bahnkurven α, β aufgefaßt werden, den wir den Augenblickspol für die Lage A_1B_1 nennen; und $C_1\mathfrak{P}_1$ ist mithin auch die Normale an der Bahnkurve γ. Demnach ergibt sich der Satz:

5. In jeder Lage eines in einer Ebene bewegten Gebildes gehen die Normalen aller Bahnkurven durch den zugehörigen Augenblickspol.

Wenn wir durch die Normalen $A_2\mathfrak{P}_2$, $B_2\mathfrak{P}_2$ an den Bahnkurven α, β den Augenblickspol $\mathfrak{P}_2$ für die Lage A_2B_2 und ebenso für mehrere Lagen bestimmen, dann bilden die Augenblickspole $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, . . . eine Kurve π, auf der sich der Augenblickspol in der ruhenden Ebene bewegt. Diese Kurve nennen wir schlechthin die Rastpolbahn. Zugleich bewegt sich der Augenblickspol auch in dem bewegten ebenen Gebilde auf einer Kurve p. Um sie zu konstruieren, betrachten wir A_1B_1 als eine Anfangslage des Gebildes, zeichnen an A_1B_1 das Dreieck $A_1B_1\mathfrak{P}_{II}$, welches dem Dreieck $A_2B_2\mathfrak{P}_2$ kongruent ist, und verfahren ebenso für mehrere aufeinander folgende Lagen; dann bilden die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_{II}$, . . . die zu dem bewegten Gebilde gehörende Kurve p, die wir schlechthin die Gangpolbahn nennen. Wenn nun das Gebilde in die Lage A_2B_2 bewegt wird, gelangt $\mathfrak{P}_{II}$ nach $\mathfrak{P}_2$, weil die Dreiecke $A_1B_1\mathfrak{P}_{II}$, $A_2B_2\mathfrak{P}_2$ kongruent sind.

Nehmen wir an, daß sich A_2B_2 unendlich nahe an A_1B_1 befinde, so sind die Strecken $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_{II}$ unendlich klein.

Demnach ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ ein Element der Rastpolbahn π und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_{II}$ ein Element der Gangpolbahn p. Da die Bewegung des Gebildes aus der Lage A_1B_1 in die unendlich nahe Lage durch eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}_1$ erfolgt, so fällt das Element $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_{II}$ mit dem Element $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ zusammen, und das nämliche gilt für alle aufeinander folgenden unendlich kleinen Bewegungen. Eine Kurve, die sich so auf einer anderen bewegt, daß stets gleich lange Bögen in Berührung kommen, rollt auf der anderen Kurve. Sonach erhalten wir den Satz:

6. Bei der ebenen Bewegung eines ebenen Gebildes rollt dessen Gangpolbahn auf der Rastpolbahn, und der Berührpunkt der beiden ist der jeweilige Augenblickspol, nach dem in jeder Lage des bewegten Gebildes die Normalen der Bahnkurven gehen.

Bei einer Drehung eines ebenen Gebildes in einer Ebene um einen Drehpunkt entartet die Gangpolbahn und die Rastpolbahn in den Drehpunkt.

Für die sphärische Bewegung gelten die analogen Beziehungen wie bei der ebenen Bewegung. Wir nehmen in Fig. 3 an, daß α, β gegebene sphärische Bahnkurven zweier Punkte A, B eines sphärischen Gebildes sind. In den Punkten A_1, B_1 und A_2, B_2 dieser Bahnkurven denken wir uns auf ihnen normale Bögen von Großkreisen der ruhenden Kugelfläche als sphärische Normalen errichtet, die sich in den sphärischen Augenblickspolen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ schneiden, und bei jeder unendlich kleinen Bewegung des Gebildes dreht es sich um einen jeweiligen Augenblickspol. Durch die Augenblickspole ergeben sich die sphärische Rastpolbahn π und sphärische Gangpolbahn p. Sonach folgen die zu 5. und 6. analogen Sätze:

5a. In jeder Lage eines auf einer Kugelfläche bewegten Gebildes gehen die sphärischen Normalen aller Bahnkurven durch den jeweiligen Augenblickspol.

6a. Bei der sphärischen Bewegung eines sphärischen Gebildes rollt dessen sphärische Gangpolbahn auf der sphärischen Rastpolbahn, und der Berührpunkt

der beiden ist der jeweilige Augenblickspol, nach dem die sphärischen Normalen der Bahnkurven gehen.

Die Normalebenen in den Punkten A_1, B_1 auf den sphärischen Bahnkurven α, β oder auf deren Tangenten schneiden sich in einer durch den Mittelpunkt O der gedachten Kugelfläche gehenden Augenblickspolachse. Die während der Bewegung des sphärischen Gebildes entstehenden Augenblickspolachsen bilden die Mantellinien eines Kegels $O\pi$ und die Mantellinien eines Kegels Op. Jenen nennen wir den Rastpolachsenkegel und diesen den Gangpolachsenkegel. Hiernach erhalten wir zu 5a, 6a die analogen Sätze:

5b. In jeder Lage eines auf einer Kugelfläche bewegten sphärischen Gebildes gehen die Normalebenen aller Bahnkurven durch die jeweilige Augenblickspolachse.

6b. Bei der sphärischen Bewegung eines sphärischen Gebildes rollt dessen Gangpolachsenkegel auf den Rastpolachsenkegel, und die Berührmantellinie der beiden ist die jeweilige Augenblickspolachse, nach der die Normalebenen der Bahnkurven gehen.

Wenn wir bei der ebenen Bewegung in den Polen Senkrechte auf der ruhenden Ebene errichten, so können die Drehungen des ebenen Gebildes um die Pole auch durch Drehungen um diese Senkrechten als Polachsen erfolgen; demnach sind bei ebener Bewegung die Polachsen parallel und bei sphärischer Bewegung gehen sie durch den Mittelpunkt der ruhenden Kugelflächen.

Die Darlegungen, bei denen nur ein bewegtes ebenes und sphärisches Gebilde beziehlich in der Ebene und auf der Kugelfläche betrachtet wurde, wollen wir der Vollständigkeit halber noch ergänzen. Die Bewegung eines Gebildes in einem ruhenden Gebilde wird absolute Bewegung und die Bewegung eines Gebildes in einem bewegten relative Bewegung genannt. Um bei ebener Bewegung diese beiden Bewegungsweisen in Fig. 4 im Zusammenhang zu betrachten, bezeichnen wir zur Unterscheidung von den vorherigen Lagen eines Gebildes das ruhende Gebilde mit G^1, das in ihm bewegte Ge-

bilde mit G^2 und das in diesem bewegte Gebilde mit G^3. Diese drei Gebilde sind in der Zeichnung von beliebigen Ovalen unbestimmt umgrenzt. Wir nehmen an, daß das Gebilde G^2 in dem ruhenden Gebilde G^1 eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}_{12}$ und das Gebilde G^3 in dem bewegten Gebilde G^2 eine unendlich kleine Drehung um den Augenblickspol $\mathfrak{P}^{23}$ ausführt, daß ferner ein Punkt B^3 von G^3 auf einer Bahnkurve β_{13} in G^1 eine unendlich kleine Bewegung macht. Hiernach wird, weil sich $\mathfrak{P}^{23}$ als Punkt von G^2 und G^3 um $\mathfrak{P}^{12}$ momentan dreht, durch die Normale im Punkt B^3 der Bahnkurve β_{13} auf der Geraden $\mathfrak{P}^{12}\mathfrak{P}^{23}$ der Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$ von G^1 und G^3 bestimmt, um den sich G^3 in Bezug auf G^1 dreht; mithin liegen die drei Pole $\mathfrak{P}^{12}$, $\mathfrak{P}^{23}$, $\mathfrak{P}^{13}$ in einer Geraden. Sonach folgen für ebene und sphärische Bewegung beziehlich die Sätze:

7. Während einer unendlich kleinen ebenen Bewegung zweier ebenen Gebilde in einem anderen liegen die drei Augenblickspole in einer jeweiligen Geraden.

7a. Während einer unendlich kleinen sphärischen Bewegung zweier sphärischer Gebilde in einem anderen liegen die drei Augenblickspole in einem jeweiligen Großkreis und die drei Augenblickspolachsen in einer jeweiligen Ebene.

In Fig. 5 nehmen wir an, daß die ebene Bewegung des Gebildes G^2 in Bezug auf das ruhende G^1 durch Rollung der Gangpolbahn p auf der Rastpolbahn π bestimmt ist, die sich in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{12}$ berühren; daß ferner die Gebilde G^2, G^3 gleichsam durch eine Achse in dem Pol $\mathfrak{P}^{23}$ gelenkig verbunden sind, und ein Punkt B^3 von G^3 sich auf einer gegebenen Bahnkurve β_{13} in G^1 bewegt. Demnach trifft die Normale an der Bahnkurve β_{13} für den Punkt B^3 die Gerade $\mathfrak{P}^{12}\mathfrak{P}^{23}$ in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$, und die Bewegung des Gebildes G^3 in Bezug auf das ruhende G^1 ist durch die Rollung einer Gangpolbahn p' auf einer Rastpolbahn π' bestimmt. Analog bei der sphärischen Bewegung.

Zu dieser Darlegung möge noch ein einfaches anschau-

liches Beispiel dienen, für einen auf einem Wagen sitzenden Beobachter vollzieht das Wagenrad Drehungen um die Achse; aber für einen auf der Straße stehenden Beobachter dreht sich das Wagenrad nicht um die bewegte Achse, sondern es dreht sich in jedem Moment theoretisch um den jeweiligen Berührpunkt mit der Straße, auf der es rollt. Für einen neben dem Wagen mit dessen Geschwindigkeit gehenden Beobachter vollzieht das Wagenrad Drehungen um die gleichsam mit ihm verbunden gedachte Achse.

In Fig. 6 ist die Straße S das Gebilde G^1 und der sich auf der Straße bewegende, schematisch gezeichnete Wagen W das Gebilde G^2, das sich in einer zu G^1 gehörenden Hülse verschiebt und sich also um den unendlich fernen Pol $\mathfrak{P}_\infty^{12}$ dreht. Ferner ist das sich um die Achse $\mathfrak{P}^{23}$ in G^2 drehende, auf der Straße rollende Wagenrad R das Gebilde G^3 und dessen Berührungspunkt mit G_1 der jeweilige Augenblickspol $\mathfrak{P}^{13}$, nach dem die Normale der von einem Punkt B^3 des Wagenrades R beschriebenen Bahnkurve β_{13} geht. Demnach folgt der für die ebene und sphärische Bewegung allgemein geltende Satz:

8. Für einen in Ruhe befindlichen Beobachter dreht sich ein in einer Ebene oder auf einer Kugelfläche bewegtes Gebilde nicht um eine in Bezug auf ihn bewegte Achse; denn es rollt auf einem ruhenden Gebilde oder dreht sich insonderheit um eine feste Achse.

In der irrtümlichen Auffassung, daß sich für einen in Ruhe befindlichen Beobachter das Wagenrad um seine Achse drehe, ist die Benennung „Raddrehung", und für diese vermeintliche Drehung auch die Benennung „Rollung" entstanden, ohne zu beachten, daß das Wagenrad auf der Straße rollt. Diese Benennungen, die beide für diese Bewegung aus Irrtum gebraucht wurden, haben Anlaß zu vielen Verwirrungen gegeben.

In Fig. 7 betrachten wir noch eine besondere ebene oder sphärische Bewegung, bei der sich in dem ruhenden Gebilde G^1 die beiden Gebilde G^2, G^3 beziehlich um die festen Pole $\mathfrak{P}^{12}$, $\mathfrak{P}^{13}$ drehen und die beiden Kurven k^2, k^3 dieser Gebilde während der Drehungen berühren; dann trifft die gemeinsame Normale

dieser Kurven die Gerade $\mathfrak{P}^{12}\mathfrak{P}^{13}$ in dem Augenblickspol $\mathfrak{P}^{23}$, der auf dieser Geraden wandert. Hierbei wird das eine der Gebilde G^2, G^3 von dem anderen geführt, und deshalb heißt diese Art der relativen Bewegung eine Führungsbewegung. Diese Führungsbewegung kommt bei zweien ineinander greifenden Zahnrädern vor, und die Kurven k^2, k^3 vertreten die zylindrischen Zahnflächen. Dieser Bewegungsvorgang kommt auch, wenn die eine der Kurven k^2, k^3 in einem Punkt zusammenschrumpft, als sphärische Bewegung später theoretisch bei der Bewegung des Auges in Betracht.

Wir haben die Grundlehren der sphärischen Bewegung in der Weise umfassend behandelt, daß sie nicht nur zur Aufklärung, sondern fürderhin jeder Zeit auch zu weiterer Untersuchung der Bewegung des Auges dienen können.

II. Die Bewegung des Auges.

Zur Veranschaulichung der Bewegung des Auges ist in Fig. 8 die Augenhöhle als Kugelfläche schrägbildlich dargestellt, deren Mittelpunkt O der Drehpunkt des Auges und deren Umriß die mit c bezeichnete Ellipse ist. Von den drei in O aufeinander senkrechten Durchmessern $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$, $Z\overline{Z}$ liegen die beiden XX, ZZ in der Bildebene, und $Y\overline{Y}$ ist das Bild des gedachten, auf der Bildebene im Raum senkrechten Durchmessers $Y_r\overline{Y}_r$. Dabei haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß $Y\overline{Y}$ gegen $\overline{X}X$ unter dem Winkel von 30° geneigt und OY gleich der Hälfte des entsprechenden Kugelradius OY_r ist. Die drei aufeinander senkrechten Ebenen XOY, XOZ, YOZ, von denen die erste wagrecht ist und die beiden anderen lotrecht sind, schneiden die Kugelfläche in den Kreisen ζ, ν, ξ. An dieser festen Kugelfläche denken wir uns eine bewegliche Kugelfläche liegend, auf der ein sphärisches Gebilde das bewegte Auge vertritt. Bei unseren Darlegungen werden wir nur das eine, das rechte Auge betrachten, und da bei der sphärischen Bewegung des Auges jede Polachse durch dessen Drehpunkt geht, so braucht dies fernerhin in den Beschreibungen nicht mehr besonders erwähnt zu werden.

Nach Helmholtz[4]) heißt die von dem Drehpunkt nach einem fixierten Punkt gehende Gerade die Blicklinie, und er schreibt: „Sie ist nicht ganz identisch mit der Gesichtslinie, die dem ungebrochenen Lichtstrahl entspricht. Doch wird die Abweichung beider Linien voneinander in den meisten Fällen zu vernachlässigen sein.“ Demgemäß können wir annehmen, daß die Abbildung eines fixierten Punktes vermittels des ungebrochenen Lichtstrahls auf der Netzhaut in dem Mittelpunkt der Netzhautgrube erfolgt, also in der Stelle des deutlichsten Sehens. Den mit A_3 bezeichneten Schnittpunkt, in dem eine Blicklinie OA_3 die bewegliche Kugelfläche trifft und der mithin auf dem Augapfel in der Mitte der Hornhaut liegt, nennen wir den Sehpunkt, und die Ebene, die durch die Anfangslage und die Endlage einer beliebig bewegten Blicklinie geht, die Sehebene. Ferner wollen wir die später S. 189 definierte Blickrichtung, die wir in der Geraden OX liegend annehmen, die Hauptlage der Blicklinie OA_1 und den Sehpunkt A_1 den Hauptsehpunkt nennen. Die übliche Benennung „Primärstellung“ oder „Primärlage“ der Blicklinie ist nicht zulässig, weil jede Lage, in der eine Bewegung der Blicklinie beginnt, als eine Anfangslage zu betrachten ist. Der zu dem Hauptsehpunkt A_1 diametrale Punkt Ω heißt nach Helmholtz der Okzipitalpunkt. Die auf der festen Kugelfläche liegenden, durch A_1 und Ω gehenden Kreise werden Hauptkreise genannt.

Die Grundlage für die Bewegung des Auges ist das von Listing vermutete, von Ruete[5]) nach ihm benannte und durch Beobachtungen bestätigte Listingsche Gesetz:

9. Jede Bewegung des Auges, bei der die Blicklinie aus der Hauptlage in eine andere Lage gelangt, kann ersetzt werden durch Drehung um die auf der Sehebene senkrechte Polachse.

Danach hat Ruete die Verallgemeinerung des Listingschen Gesetzes gefolgert:

10. Jede Bewegung des Auges, bei der die Blicklinie aus einer beliebigen Lage in eine andere gelangt

und die Sehebene durch die Hauptlage geht, kann ersetzt werden durch Drehung um die auf der Sehebene senkrechten Polachse.

Demnach liegen bei diesen Drehungen des Auges die Polachsen in der auf der Hauptlage OA_1 senkrechten Ebene YOZ und die Pole auf dem Kreis ξ. Ferner folgt aus dem Listingschen Gesetz:

11. Jeder Lage der Blicklinie oder des Sehpunktes entspricht eindeutig eine Lage des Auges.

Ein in der Hauptlage A_1 des Sehpunktes auf dem Auge gezeichnetes Kreuz $l_1 A_1 w_1$, dessen lotrechter Stammstrich l_1 und dessen wagrechter Armstrich w_1 beziehlich in den Kreisen ν, ζ liegen, vertritt als sphärisches Gebilde das Auge. Dieses rechtwinkelige Kreuz, dessen Mittelpunkt also in A_1 liegt, wollen wir das Augkreuz nennen. Nach dem Listingschen Gesetz ergibt sich für jede Blicklinie OA_3 die entsprechende Lage $l_3 A_3 w_3$ des Augkreuzes durch Drehung aus der Hauptlage $l_1 A_1 w_1$ um die auf der zugehörigen Sehebene senkrechte Polachse.

Bei einer allgemeinen Bewegung des Auges rollt dessen Gangpolachsenkegel auf dem zugehörigen Rastpolachsenkegel, und das Augkreuz ist fest mit dem Gangpolachsenkegel verbunden. Nehmen wir an, daß die Blicklinie aus der Hauptlage OA_1 beliebig bewegt in eine Lage OA_3 gelangt, so kann die Bewegung des Auges durch Drehung um die auf der Sehebene $A_1 OA_3$ senkrechte Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ ersetzt werden, wobei sich der Sehpunkt auf dem Bahnkreis α_{13} bewegt, der den Kreis ξ in einem Punkt Ξ schneidet und nach dem Okzipitalpunkt Ω geht. Die in der Mitte auf der Verbindsehne $A_1 A_3$ senkrechte Ebene schneidet die Ebene YOZ in der Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$, die sich als Senkrechte auf $O\Xi$ ergibt. Das aus dem Augkreuz $l_1 A_1 w_1$ und dem Großkreisbogen $A_1 \mathfrak{P}_{13}$ bestehendes sphärisches Gebilde dreht sich sonach um den auf dem Kreis ξ liegenden Pol $\mathfrak{P}_{13}$ aus der Lage $\mathfrak{P}_{13} l_1 A_1 w_1$ in die Lage $\mathfrak{P}_{13} l_3 A_3 w_3$, und es ist mit dem Großkreis fest verbunden. Aus diesen Darlegungen, wie auch aus dem allgemeinen Satz 8, folgt:

12. Es gibt keine Drehung des Auges um die Blicklinie.

Damit ist der seit 80 Jahren eingewurzelte, wahrscheinlich von Hueck[6]) stammende Irrtum, daß sich das Auge um die Blicklinie drehe, widerlegt. Dieser Irrtum, der ein Wirrsal in der Lehre von der Bewegung des Auges verursacht hat, ist trotzdem, daß er von Joh. Müller[7]), Meißner[8]) und Donders[9]) erkannt wurde, vorherrschend geblieben mit den beiden S. 180 schon erwähnten Benennungen „Raddrehung", die, wie es scheint, zuerst bei Ruete[10]) vorkommt, und „Rollung", die vermutlich zuerst von Tourtual[11]) verwendet wurde. Dieser Irrtum ist noch besonders von Helmholtz[12]) befestigt worden, indem er schreibt: „Für diese Art der Drehung des Augapfels, nämlich die Drehung um die Gesichtslinie, wollen wir den bezeichnenden Namen der Raddrehung beibehalten, da sich die Iris dabei wie ein Rad um ihren Mittelpunkt drehen würde." In einer gedankenreichen Abhandlung von 44 Seiten hat Meinong[13]) sich vergeblich bemüht, Klarheit in der unrichtigen Auffassung der Bewegung des Auges zu erlangen. Auch v. Kries[14]) ist es nicht gelungen. Unbegreiflich ist es, daß bei der leicht vorstellbaren, absoluten Bewegung des Auges so viele Mißverständnisse und Schwierigkeiten entstehen konnten.

In Fig. 9 bestimmen wir die Lage eines Sehpunktes A_3 oder einer Blicklinie OA_3, indem wir als Koordinaten den Winkel $A_1 O A_3 = \varrho$ und den Neigwinkel $A'' A^x A_3 = \theta$ der Ebene des Bahnkreises α_{13} gegen die Ebene XOZ annehmen. Dieser Neigwinkel θ ist auch der Winkel bei A_1 zwischen den Kreisen α_{13} und ν. Die wahren Größen der Winkel ϱ, θ bezeichnen wir mit ϱ_0, θ_0. Zur Konstruktion der Lage OA_3 begrenzen wir auf dem Kreis ν den Bogen $A_1 \mathsf{P}$ durch den Winkel $A_1 O \mathsf{P} = \varrho_0$, fällen auf OA_1 die Senkrechte $\mathsf{P} A^x$, legen an sie den Winkel $\mathsf{P} A^x \Theta = \theta_0$, wobei wir $A^x \Theta = A^x \mathsf{P}$ machen, und fällen ferner auf OZ die Senkrechte ΘA^z, die $A^x \mathsf{P}$ im Punkt A'' schneidet. Sodann ergeben sich vermittels der beiden betreffenden Parallogramme die senkrechten Projektionen A', A'', A''' des Sehpunktes A_3 auf die als Grundriß-, Aufriß- und

Seitenrißebene betrachteten Ebenen XOY, XOZ, YOZ. Der Ellipsenbogen $A_1 \alpha_{13} A_3$ ist als affin zu dem Kreisbogen $A_1 \nu P$ bezüglich der Affinitätsachse OA_1 konstruiert.

Da in Fig. 8 bei der Drehung des Augkreuzes um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ oder um den Pol $\mathfrak{P}_{13}$ der Winkel zwischen den Bögen $A_1 \alpha_{13}$, $A_1 l_1$ gleich θ ist, so wird die Lage des Auges, die dem Sehpunkt A_3 entspricht, durch den Winkel θ zwischen den Bögen $A_3 \Xi$, $A_3 l_3$ bestimmt. Und den Winkel θ nennen wir den Auglagewinkel in Bezug auf den Hauptkreis α_{13}. Demnach erhalten wir den Satz:

13. Die Lage des Sehpunktes und die Lage des Auges wird durch den Winkel ϱ und den Auglagewinkel θ bestimmt.

Insonderheit ist, je nachdem sich der Sehpunkt auf dem Kreis ν oder ζ bewegt, der Auglagewinkel gleich 0 oder 90 Grad.

Um die Lage des Auges in einer anderen Weise zu bestimmen, ziehen wir in Fig. 8 durch die Grundrißprojektion A' des durch θ, ϱ gegebenen Sehpunktes A_3 die Sehne ΩA_2 des Kreises ζ und durch deren Mitte M_2 den Radius $O\mathfrak{P}_{23}$, der mithin im Raum auf der Sehne ΩA_2 senkrecht ist und den Kreisbogen ΩA_2 halbiert. Ferner ist OY im Raum senkrecht auf ΩO; folglich ist der Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = O\Omega A'$. Auf dem Kreis ζ machen wir den Bogen $A_1 \mathfrak{P}_{23}^1 = A_2 \mathfrak{P}_{23}$, und weil $O\mathfrak{P}_{23}$ den Bogen ΩA_2 halbiert, ist $A_1 \mathfrak{P}_{23}^1 = \Omega \mathfrak{P}_{23}$ und der Punkt Y die Mitte des Bogens $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{23}^1$. Wird nun das Augkreuz um die Polachse $O\mathfrak{P}_{12}$ in die Lage $l_2 A_2 w_2$ und dann um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ gedreht, so beschreibt der Sehpunkt einen auf der Grundrißebene senkrechten Bahnkreis α_{23}, der ein Kleinkreis mit dem Mittelpunkt M_2 ist, und mithin durch den Sehpunkt A_3 nach dem Okzipitalpunkt Ω geht. Dabei bewegt sich die Blicklinie auf einer Drehkegelfläche, deren Spitze in O liegt und deren Grundkreis α_{23} ist.

Bei dieser Drehung des sphärischen Gebildes aus der Lage $\mathfrak{P}_{23} l_2 A_2 w_2$ sind dessen Lagen zu dem sphärischen Gebilde $\mathfrak{P}_{23}^1 l_1 A_1 w_1$ kongruent, und $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{23}^1$ entsprechende Punkte. Da der Kreis ξ auf dem Kreisbogen $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{23}^1$ in dessen Mitte Y

senkrecht ist, so kann jede dieser Lagen als eine Lage des um eine in der Ebene YOZ liegenden Polachse gedrehten sphärischen Gebildes $\mathfrak{P}_{23}^1 l_1 A_1 w_1$ betrachtet werden, und für die Lage $\mathfrak{P}_{23} l_3 A_3 w_3$ ist $O\mathfrak{P}_{13}$ die Polachse.

Analoge Beziehungen ergeben sich, wenn wir durch die Aufrißprojektion A'' die Sehne ΩA_{II} des Kreises ν und den zu ihr senkrechten Radius $O\mathfrak{P}_{II3}$ ziehen, der sie in ihrer Mitte M_{II} schneidet; dann ist der Winkel $ZO\mathfrak{P}_{II3} = O\Omega A''$. Sonach erhalten wir den Satz:

14. Die einem Sehpunkt A_3 entsprechende Lage des Auges wird bestimmt durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$, bei dem der Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = O\Omega A'$ und durch den Pol $\mathfrak{P}_{II3}$, bei dem der Winkel $ZO\mathfrak{P}_{II3} = O\Omega A''$ ist.

Um diese Winkel als Funktionen von den Koordinaten θ, ϱ des Sehpunktes A_3 zu bestimmen, setzen wir $O\Omega A' = \tau'$, $O\Omega A'' = \tau''$, und nehmen in Fig. 8 und 9 den Radius der Kugelfläche als Einheit an; dann ist in wahrer Größe $A^x A_3$ gleich $A^x \mathbf{P} = \sin\varrho$; mithin $A^x A' = A'' A_3 = \sin\varrho \sin\theta$, $A^x A'' = \sin\varrho \cos\theta$ und $OA^x = \cos\varrho$. Demnach ergibt sich:

$$\tan\tau' = \frac{A^x A'}{1 + OA^x}, \quad \tan\tau'' = \frac{A^x A''}{1 + OA^x},$$

und ferner

$$\tan\tau' = \frac{\sin\varrho \sin\theta}{1 + \cos\varrho}, \quad \tan\tau'' = \frac{\sin\varrho \cos\theta}{1 + \cos\varrho}, \quad \frac{\tan\tau'}{\tan\tau''} = \tan\theta.$$

Die Ableitung, daß bei der Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ für jede Lage des Sehpunktes auf dem durch den Okzipitalpunkt gehenden Bahnkreis α_{23} die Lage des Auges durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ bestimmt wird, gilt allgemein. Wir nehmen an, es werde der Sehpunkt von A_1 aus auf einem beliebigen Hauptkreis ζ mit dem Augkreuz in eine beliebige Lage A_2 gedreht. Dann ergeben sich dieselben Beziehungen wie bei jener Ableitung, obschon das Augkreuz sich nun in schräger Stellung gegen ζ befindet. Um die auf der Sehne ΩA_2 des Kreises ζ senkrechte Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ wird der Sehpunkt von A_2 aus mit dem Augkreuz in eine beliebige Lage gedreht, wobei sich der

Sehpunkt auf einem durch den Okzipitalpunkt Ω gehenden Kreis α_{23} bewegt. Und in diese Lage kann das Augkreuz auch durch Drehung aus der Hauptlage $l_1 A_1 w_1$ um eine in der Ebene YOZ liegende Polachse gebracht werden.

Die durch den Okzipitalpunkt Ω gehenden Kleinkreise, die nur Hauptkreise sind, wenn sie durch den Hauptsehpunkt A_1 gehen, hat Helmholtz Richtkreise genannt und auf ihre Wichtigkeit hingewiesen. Legen wir nun durch zwei Lagen eines beliebig bewegten Sehpunktes und den Okzipitalpunkt den Richtkreis, dann kann das Auge aus der einen der hierdurch bestimmten Lagen in die andere durch Drehung um die auf der Richtkreisebene senkrechte Polachse erfolgen, die also durch den Mittelpunkt des Richtkreises geht, und der zugehörige Pol bestimmt während dieser Drehung jede Lage des Auges. Hierbei kommt nun der Okzipitalpunkt hauptsächlich und der Hauptsehpunkt nur nebensächlich in Betracht. Sonach erhalten wir als Folgerung aus dem Listingschen Gesetz das bisher noch nicht bekannte Hauptgrundgesetz der Bewegung des Auges:

15. Jede Bewegung des Auges aus einer Lage in eine andere kann ersetzt werden durch Drehung um die Polachse, die auf der durch die beiden Lagen des Sehpunktes gehenden Richtkreisebene senkrecht ist.

Hieraus folgt der Satz:

16. Jede Bewegung des Auges, bei welcher der Sehpunkt aus einer gegebenen Lage in je eine beliebige andere gelangt, kann ersetzt werden durch Drehung um die Polachse, die auf der durch die beiden Lagen des Sehpunktes gehenden Richtkreisebene senkrecht ist; und diese Polachsen liegen in der Ebene, die in der Mitte auf der Verbindsehne der gegebenen Lage des Sehpunktes mit dem Okzipitalpunkt senkrecht steht, also auch durch den Drehpunkt des Auges geht.

Bewegt sich bei einer Bewegung des Auges der Sehpunkt A auf einer Bahnkurve α und wird für mehrere Lagen desselben jede entsprechende Lage des Auges durch den betreffenden Pol

bestimmt, dann kann man die Bahnkurve β eines Punktes B des Auges vermittels kongruenter sphärischer Dreiecke konstruieren. Jede von dem Okzipitalpunkt an die Bahnkurve α gelegte Berührebene ist die Richtkreisebene für zwei unendliche nahe Lagen des Sehpunktes und die unendliche kleine Bewegung des Auges kann als eine unendlich kleine Drehung um die auf der jeweiligen Richtkreisebene senkrechten Polachse betrachtet werden. Diese Richtkreisebenen sind Berührebenen der Kegelfläche, deren Spitze der Okzipitalpunkt ist, und durch die Bahnkurve α bestimmt wird. Die auf diesen Berührebenen senkrechten Polachsen bilden den Rastpolachsenkegel des Auges, der auf dem zugehörigen Gangpolachsenkegel rollt.

Nach der Übertragung der aus Fig. 2 abgeleiteten Sätze 3, 4 auf die Bewegung des Auges in drei Lagen ergeben sich bedingt durch das Hauptgrundgesetz mannigfaltige modifizierte Beziehungen, bei denen der Punkt A_1 dann den Okzipitalpunkt Ω vertritt und der Punkt A_1 des Gebildes G_1 ein beliebiger Sehpunkt oder insonderheit auch der Hauptsehpunkt sein kann.

Der Kreis auf dem Auge, der in dessen Hauptlage mit dem wagrechten Kreis ξ zusammenliegt, wird nach Helmholtz der Netzhauthorizont genannt, und wir bezeichnen ihn als solchen mit n. Den Kreis auf dem Auge, der in dessen Hauptlage mit dem lotrechten Kreis ν vereint liegt, nennen wir den Hauptmeridian, und bezeichnen ihn als solchen mit m. Durch die Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ gelangt mit dem Augkreuz der Netzhauthorizont n in die Lage n_3 und der Hauptmeridian m in die Lage m_3. Die Lage n_3 ist in der Zeichnung der durch den Sehpunkt A_3 und den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ bestimmte Bogen $\mathfrak{P}_{23} n_3 A_3$, der affin zu dem Bogen $\mathfrak{P}_{23} n A_2$ bezüglich $O\mathfrak{P}_{23}$ als Affinitätsachse bis an den Punkt N des Kreises ν gehend konstruiert ist, und den Kreis ξ im Punkt F schneidet. Demnach ist die Gerade ON die Aufrißspur und die Gerade OF die Seitenrißspur der Ebene On_3. Analog ist die Lage m_3 der durch den Sehpunkt A_3 und den Pol $\mathfrak{P}_{11\,3}$ bestimmte Bogen $\mathfrak{P}_{11\,3} m_3 A_3$, der affin zu dem Kreisbogen $\mathfrak{P}_{11\,3} m A_{11}$

bezüglich $O\mathfrak{P}_{II\,3}$ als Affinitätsachse bis an den Punkt L des Kreises ζ gehend konstruiert ist, und den Kreis ξ im Punkt H schneidet. Demnach ist die Gerade OL die Grundrißspur und die Gerade OH die Seitenrißspur der Ebene Om_3. Ferner ergibt sich auch in der Zeichnung vermittels der großen Halbachse $O\mathfrak{P}_{II\,3}$ der Ellipse m_3 und des Punktes A_3 deren kleine Halbachse; und danach kann auch der Bogen $\mathfrak{P}_{II\,3}m_3L$ konstruiert werden. Aus diesen Darlegungen folgt:

17. Je nachdem man den Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = \tau'$ oder $ZO\mathfrak{P}_{II\,3} = \tau''$ macht, ergibt sich die Lage n_3 des anfangs wagrechten Netzhauthorizontes n durch den Großkreisbogen $\mathfrak{P}_{23}A_3$ oder die Lage m_3 des anfangs lotrechten Hauptmeridians m durch den Großkreisbogen $\mathfrak{P}_{II\,3}A_3$.

Der erfolgreiche Gedanke von Ruete[15]): vermittels des auf der Netzhaut entstehenden Nachbildes von einem auf einer Wand gespannten lotrechten, roten Band die Lage des anfangs lotrechten Meridians zu beobachten, hat Donders[16]), später Ruete selbt[17]), dann auch Wundt[18]), Helmholtz[19]) und Hering[20]) veranlaßt, die Beobachtungen zur Bestätigung des Listingschen Gesetzes auszuführen. Ferner hat Fick[21]) den bilden Fleck auf der Netzhaut und Meißner[22]) die durch beide Augen entstehenden Doppelbilder bei diesen Beobachtungen verwendet. Bei dem Beginn der Beobachtungen ist zur Ermittelung der Hauptlage OA_1 zuerst die Blicklinie lotrecht auf- und abwärts, dann wagrecht nach rechts und links zu bewegen, bis das Nachbild nicht in schräger Lage erscheint. Danach ist die Vorrichtung für die Beobachtungen zu orientieren.

In Fig. 10 wollen wir die perspektive Abbildung der sphärischen Gebilde ausführen, wobei der Drehpunkt O, der Gesichtspunkt und die in einem Punkt $\mathfrak{A}_1$ auf der Hauptlage OA_1 der Blicklinie senkrecht mit $\mathfrak{B}$ bezeichnete Ebene die Bildebene ist. Diese Bildebene wird in der Darstellung rückseits gesehen und als durchsichtig angenommen; und die Bilder der Großkreise sind gerade Linien. Die durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ gehende lotrechte Gerade $\mathfrak{m}$ und wagrechte Gerade $\mathfrak{n}$ sind beziehlich

die Bilder von dem Hauptmeridian m und dem Netzhauthorizont n; ferner ist $l_1 \mathfrak{A}_1 w_1$ das Bild von dem Augkreuz $l_1 A_1 w_1$. Die Winkel θ, ϱ, durch welche die Lage des Sehpunktes A_3 und der Blicklinie $O A_3$, wie in Fig. 9 bestimmt wird, sind so zu wählen, daß A_3 innerhalb des Bereiches der Bewegung des Auges liegt. Das Bild $\mathfrak{A}_3$ von A_3 ergibt sich, indem wir durch seine Projektion A' die Gerade $O A'$ bis an den Punkt $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{n}$ und zu $\mathfrak{m}$ die Parallele $\mathfrak{A}' \mathfrak{A}_3$ ziehen, welche die Blicklinie $O A_3$ in $\mathfrak{A}_3$ trifft; dann ist die durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ gehende Gerade $\mathfrak{a}_{13}$ das Bild von dem Bahnkreis a_{13}.

Behufs der Konstruktion der Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ der Lagen m_3, n_3 des Hauptmeridians und des Netzhauthorizontes können wir in verschiedener Weise verfahren. Die auf der Geraden $\Omega A''$ senkrechte Polachse $O \mathfrak{P}_{\mathrm{II}\,3}$ trifft die Bildebene $\mathfrak{B}$ in einem Punkt $\mathfrak{P}^*_{\mathrm{II}\,3}$ auf der Geraden $\mathfrak{m}$. Demnach ist die durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}^*_{\mathrm{II}\,3}$ gehende Gerade $\mathfrak{m}_3$ das Bild von der Lage m_3 des Hauptmeridians. Da aber der Punkt $\mathfrak{P}^*_{\mathrm{II}\,3}$ nicht zugänglich ist, so zeichnen wir ein zu dem Dreieck $O \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3$ ähnliches und ähnlich liegendes Hilfsdreieck $o'' a_1'' a_3''$, indem wir zu $O \mathfrak{A}_1$ eine beliebige Parallele ziehen, welche $O \mathfrak{P}_{\mathrm{II}\,3}$ und $\mathfrak{m}$ in den beiden Eckpunkten o'', a_1'' schneidet; dann ist der dritte Eckpunkt a_3' ein Punkt der Geraden $\mathfrak{m}_3$. Analog trifft die auf der Geraden $\Omega A'$ bildlich senkrechte Polachse $\mathfrak{P}_{23} O$, die durch die Mitte M_2 der Sehne ΩA_2 geht, die Bildebene in einem Punkt $\mathfrak{P}^*_{23}$ auf der Geraden $\mathfrak{n}$. Demnach ist die durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}^*_{23}$ gehende Gerade $\mathfrak{n}_3$ das Bild von der Lage n_3 des Netzhauthorizontes n. Da der Punkt $\mathfrak{P}^*_{23}$ auch nicht zugänglich, so zeichnen wir wie vorhin ein zu dem Dreieck $O \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3$ ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck $o' a_1' a_3'$, dessen Eckpunkte o', a_1' beziehlich auf $\mathfrak{P}_{23} O$, $\mathfrak{n}$ liegen; dann ist der dritte Eckpunkt a_3' ein Punkt der Geraden $\mathfrak{n}_3$. Somit ergibt sich auf den Geraden $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{n}_3$ das Bild $l_3 \mathfrak{A}_3 \mathfrak{w}_3$ von dem Augkreuz $l_3 A_3 w_3$.

Bei der Drehung um die Polachse $O \mathfrak{P}_{23}$ bewegt sich der Sehpunkt auf dem Richtkreis a_{23}, dessen Ebene zur Grundriß-

ebene senkrecht ist, und die Blicklinie erzeugt die Drehkegelfläche $O\alpha_{23}$. Bei der Drehung um die Polachse $O\mathfrak{P}_{II\,3}$ bewegt sich der Sehpunkt auf dem Richtkreis $\alpha_{II\,3}$, dessen Ebene zur Aufrißebene senkrecht ist, und die Blicklinie erzeugt die Drehkegelfläche $O\alpha_{II\,3}$. Die beiden Richtkreise α_{23}, $\alpha_{II\,3}$, die sich in dem Okzipitalpunkt Ω und dem Sehpunkt A_3 rechtwinkelig schneiden, schmiegen sich sehr nahe an das auf m_3, n_3 liegende Augkreuz.

Aus diesen Darlegungen ergeben sich die Sätze:

18. Bei der Bewegung des Sehpunktes auf einem zur Grundrißebene senkrechten Richtkreis α_{23} dreht sich die Lage n_3 des Netzhauthorizontes um die Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$ und das Bild $\mathfrak{n}_3$ um den Punkt $\mathfrak{P}^*_{23}$.

19. Bei der Bewegung des Sehpunktes auf einem zur Aufrißebene senkrechten Richtkreis $\alpha_{II\,3}$ dreht sich die Lage m_3 des Hauptmeridians um die Polachse $O\mathfrak{P}_{II\,3}$ und das Bild $\mathfrak{m}_3$ um den Punkt $\mathfrak{P}^*_{II\,3}$.

Die Grundrißprojektion der gemeinsamen Tangente an m_3, α_{23} in A_3 liegt in der Sehne ΩA_2 des Kreises ζ; folglich geht diese Tangente nach dem Schnittpunkt T_{II} der in Ω auf $O\Omega$ Senkrechten und der Polachse $O\mathfrak{P}_{II\,3}$. Analog geht die gemeinsame Tangente an n_3, $\alpha_{II\,3}$ in A_3 nach dem Schnittpunkt T_2 der von Ω ausgehenden, zu OY Parallelen und der Polachse $O\mathfrak{P}_{23}$. Hiernach erhalten wir eine andere Konstruktion der Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$; denn sie sind auch die Bilder der Tangenten A_3T_{II}, A_3T_2. Ziehen wir durch den Punkt U', in welchem die Gerade $\Omega A'$ die Gerade $\mathfrak{n}$ trifft, und zur Geraden $\mathfrak{m}$ die Parallele $U'V_{II}$ bis an die Tangente $T_{II}A_3$, so ist der Punkt V_{II} deren Schnittpunkt mit der Bildebene $\mathfrak{B}$; und durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, V_{II} wird das Bild $\mathfrak{m}_3$ dieser Tangente bestimmt. Dabei ist der Schnittpunkt $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}$ das Bild des Punktes L, in welchem m_3 den Kreis ζ schneidet. In analoger Weise ergibt sich, indem wir durch den Punkt U'', in welchem die Gerade $\Omega A''$ die Gerade $\mathfrak{m}$ trifft, und zur Geraden $\mathfrak{n}$ die Parallele $U''V_2$ bis an die Tangente T_2A_3 ziehen; dann ist der Punkt V_2 deren Schnittpunkt mit der Bildebene $\mathfrak{B}$, und durch die Punkte $\mathfrak{A}_3$, V_2 wird das Bild $\mathfrak{n}_3$ dieser Tangente

bestimmt. Dabei ist der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{n}_3$, $\mathfrak{m}$ das Bild des Punktes N, in welchem n_3 den Kreis ν schneidet.

Die erweiterte Drehkegelfläche, deren Spitze in O liegt und deren Grundkreis der Richtkreis α_{23} ist, wird von der Bildebene $\mathfrak{B}$ in einer Hyperbel geschnitten. Hierbei kommt nur der eine Hyperbelzweig $\mathfrak{a}_{23}$ in Betracht. Denn die zur Bildebene parallele Ebene OYZ schneidet ΩA_2 in einem Punkt J und die Ebene des Richtkreises α_{23} in der durch J gehenden zu OZ Parallelen i, j; mithin ist Hyperbelzweig $\mathfrak{a}_{23}$ das Bild von dem durch die Punkte i, j begrenzten rechtsseitigen Teil des Richtkreises α_{23}, und diese Punkte sind auch die Schnittpunkte, die der Kreis ξ mit dem Richtkeis bildet. Die Gerade OA_2 trifft die Gerade $\mathfrak{n}$ in dem Punkt $\mathfrak{A}_2$ des Hyperbelzweiges $\mathfrak{a}_{23}$.

So wie vermittels der Geraden OA', welche die Gerade $\mathfrak{n}$ in dem Punkt $\mathfrak{A}'$ trifft, und der zur Geraden $\mathfrak{m}$ Parallelen $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ der Punkt $\mathfrak{A}_3$ bestimmt wurde, werden auch andere Punkte des Hyperbelzweiges $\mathfrak{a}_{23}$ konstruiert, der das Bild des rechtsseitigen Teiles des Richtkreises α_{23} ist. Seinem linksseitigen Teil entspricht als Bild der nicht in Betracht kommende andere Hyperbelzweig, der durch den Punkt $\mathfrak{A}_1$ gehen würde; und die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ ist demnach das Bild der Hauptachse der zugehörigen Hyperbel. Die Asymptoten an dem Hyperbelzweig $\mathfrak{a}_{23}$ sind parallel zu den Mantellinien Oi, Oj jener Drehkegelfläche. In ähnelnder Weise wird der Hyperbelzweig $\mathfrak{a}_{\mathrm{II}3}$ konstruiert, der das Bild von dem betreffenden Teil des Richtkreises $\alpha_{\mathrm{II}3}$ ist. Dem Punkt A_{II} entspricht das Bild $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ auf $\mathfrak{m}$, und die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ ist das Bild der Hauptachse der zugehörigen Hyperbel. Die Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ sind Tangenten an den Hyperbelzweigen $\mathfrak{a}_{23}$, $\mathfrak{a}_{\mathrm{II}3}$ in deren Schnittpunkt $\mathfrak{A}_3$.

Zu den Bewegungen des Auges in einem der vier rechtsseitigen Flächenachteln der ruhenden Kugelfläche gibt es in den drei anderen gleichartige Bewegungen, und diese vier Bewegungen sind paarweise symmetrisch. Die in den vier Flächenachteln gleichartig liegenden Sehpunkte A_3, A_4, A_5, A_6 sind die Eckpunkte eines Rechtecks. Demzufolge ergeben sich noch

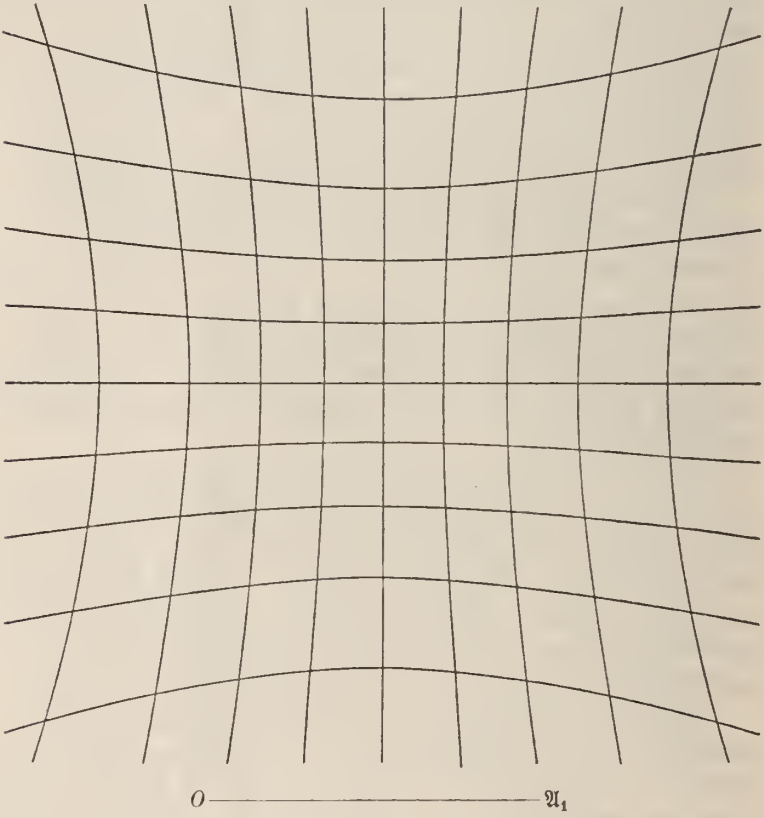
zwei andere Hyperbelzweige $\mathfrak{a}'_{23}$, $\mathfrak{a}'_{II3}$, die den Hyperbelzweigen $\mathfrak{a}_{23}$, $\mathfrak{a}_{II3}$ symmetrisch gegenüber liegen. Jedes der Paare $\mathfrak{a}_{23}\,\mathfrak{a}'_{23}$ und $\mathfrak{a}_{II3}\,\mathfrak{a}'_{II3}$ gehört zu je zwei kongruenten Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Scheitel in $\mathfrak{A}_1$. Die vier Schnittpunkte $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ der vier Hyperbelzweige sind somit die Bilder von den vier Sehpunkten A_3, A_4, A_5, A_6, und Eckpunkte eines Rechtecks, das zu jenem Rechteck ähnlich ist. Die zugehörigen zu $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ symmetrischen Bilder $\mathfrak{m}_4$, $\mathfrak{m}_5$. $\mathfrak{m}_6$ des gedrehten Hauptmeridians und die $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{n}_5$, $\mathfrak{n}_6$ des gedrehten Netzhauthorizontes sind zur Vervollständigung eingezeichnet.

Bei der Bewegung des Sehpunktes auf dem Bahnkreis α_{13} sind die Bilder von dem auf ihm senkrechten Kreisbogen $\mathfrak{P}_{13}\,A_1$ in allen Lagen parallele Gerade, weil die in der Ebene YOZ liegende Polachse $O\,\mathfrak{P}_{13}$ parallel zu der Bildebene $\mathfrak{B}$ ist. Da das Bild von dem zwischen den Kreisbögen $A_1\,\mathfrak{P}_{13}$, $A_1\,\alpha_{13}$ liegenden rechten Winkel auch ein rechter Winkel ist, so sind jene parallelen Bilder in Wirklichkeit senkrecht auf dem Bilde $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_3$ des Bahnkreises α_{13}.

Wenn wir die Bildebene mit ihrem vorderen Teil nach rechts und die Gerade $\mathfrak{m}$ parallel zur Zeichenebene drehen, dann erhalten wir in Fig. 10a die Bilder $\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{l}_3\,\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{w}_3$ von dem bei A_1 und A_3 befindlichen Augkreuz in der wahren Größe und Richtung, aber wegen des Platzes ist ihr Abstand $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_3$ verkürzt gezeichnet. Und nach der vorherigen Darlegung entsprechen sich die bei $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ punktiert gezeichneten Kreuze.

Zur Übersicht ist umseitig die Helmholtzsche Hyperbelnfigur eingefügt, in der die Hyperbelzweige die perspektiven Bilder der Richtkreise sind für einen Abstand $O\,\mathfrak{A}_1$ des Drehpunktes des Auges von der Bildebene im Maßstab 200 mm; wobei in Fig. 10 die Winkel $A_1\,O\,A_2$, $A_1\,O\,A_{11}$, welche die Richtkreise α_{23}, α_{II3} bestimmen, sich von zehn zu zehn bis vierzig Grad vergrößern. In den Schnittpunkten, die je ein Hyperbelzweig mit den anderen Hyperbelzweigen bildet, gehen die an diese gelegten Tangenten durch je einen Punkt; und da diese Tangenten die Bilder von den entsprechenden Lagen des gedrehten Hauptmeridians und Netzhauthorizontes sind, so wird die Gesamtheit

dieser Bilder vorstellbar. Die Konstruktion der Hyperbelzweige kann vermittels senkrechter Projektion leicht ausgeführt werden, weil jene Winkel für jeden Hyperbelzweig den Scheitel, die Hauptachse und die Asymptoten bestimmen.



Nachdem wir in Fig. 10 anschaulich im Zusammenhang mit den dargestellten Lagen m_3, n_3 des gedrehten Hauptmeridians und Netzhauthorizontes zwei Konstruktionen ihrer Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ ausgeführt haben, wollen wir noch eine hiervon unabhängige dritte Konstruktion ausführen.

Wir bezeichnen den Abstand des Drehpunktes O des Auges von der Bildebene $\mathfrak{B}$ mit p, und konstruieren zuvörders den

Punkt $\mathfrak{A}_3$, der durch die gegebenen Winkel θ, ϱ bestimmt wird, indem wir an die Gerade $\mathfrak{m}$ den Winkel $\mathfrak{m}\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 = \theta$ legen, und die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 = p \tan\varrho$ machen. Um die Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ auf der Bildebene $\mathfrak{B}$ zu ermitteln, durch die sich die Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ ergeben, beachten wir, daß die sphärischen Dreiecke A_1A_3N, A_3A_1L mit der gemeinsamen Seite $A_1A_3 = \varrho$ kongruent sind, weil in dem ersten die Winkel θ, $90 - \theta$ an den Ecken A_1, A_3 und in dem zweiten an den Ecken A_3, A_1 liegen; mithin sind die Seiten A_1L, NA_3 und A_1N, LA_3 gleich, ferner sind auch die Winkel an den Ecken L, N gleich. Diesen beiden kongruenten sphärischen Dreiecken entsprechen kongruente Dreikante. Aus einem dieser Dreikante, etwa aus OA_1A_3L, in dem die Seite $A_1OA_3 = \varrho$ und $90 - \theta$, θ die anliegenden Winkel bei A_1, A_3 sind, konstruieren wir die beiden anderen Seiten. Zu diesem Zweck zeichnen wir in Fig. 11 den Winkel $L'RL'' = \varrho$ und tragen auf seinen beiden Schenkeln gleiche Strecken von beliebiger Länge ab; ferner zeichnen wir die in dem Scheitel R rechtwinkeligen Dreiecke $RL'\Lambda'$, $RL''\Lambda''$, in denen die Winkel an den Ecken Λ', Λ'' beziehlich gleich $90 - \theta$, θ sind, und machen $\Lambda'L_0' = \Lambda'L'$, $\Lambda''L_0'' = \Lambda''L''$. Sodann ziehen wir zu $L'R$, $L''R$ die Parallelen $\Lambda'O$, $\Lambda''O$ und ferner die Geraden OL_0', OL_0''. Hiernach sind $\Lambda'OL_0' = \lambda'$, $\Lambda''OL_0'' = \lambda''$ gesetzt, die wahren Größen der in Fig. 10 dargestellten Seiten A_1OL, A_3OL des Dreikants OA_1A_3L, und λ'' ist auch die wahre Größe von A_1ON, weil $A_1ON = A_3OL$ ist. Somit ist in wahrer Größe die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{L} = p \tan\lambda'$, und die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N} = p \tan\lambda''$. Demnach bestimmen die Punkte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ die durch den Punkt $\mathfrak{A}_3$ gehenden Bilder $\mathfrak{m}_3$, $\mathfrak{n}_3$ der Lagen m_3, n_3 des gedrehten Hauptmeridians und Netzhauthorizontes.

Um das Listingsche Gesetz durch Beobachtungen zu prüfen, kann man auf einer grauen Kartonplatte, deren Größe im Geviert etwa 70 cm ist, zwei 6 mm breite, aus rotem Papier geschnittene Bänder rechtwinkelig spannen, welche die Geraden $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ vertreten, und die vier Paare jener Bilder mit den Punkten $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ zeichnen. Wenn man den Abstand des Dreh-

punktes des Auges von dem Scheitel der Hornhaut gleich 13 mm annimmt, dann in dem zugehörigen, bestimmten senkrechten Abstand des Drehpunktes von der Kartonplatte bei festgestellter Kopfhaltung und genauer Einrichtung durch Fixieren der Kreuzung der roten Bänder von ihnen ein deutliches hellgrünes Nachbild empfangen hat, und dann den Blick nach je einem der vier Punkte richtet, so kann man bei dieser viermaligen Beobachtung das Nachbild mit den gezeichneten Bildern der Lagen des Hauptmeridians und des Netzhauthorizontes vergleichen, und auch für je vier andere Punkte die Beobachtung ausführen.

Bisher haben wir nur die absolute Bewegung des Auges in der Aughöhle behandelt. Nun aber wurde von den meisten Beobachtern zur Bestätigung des Listingschen Gesetzes eine besondere relative Bewegung ohne Verständnis verwendet, bei der sich ein einfaches sphärisches Gebilde auf dem bewegten Auge bewegt. Dieses Gebilde besteht in Fig. 8 aus einem von dem Sehpunkt bewegten Großkreis v, der sich um die Achse YY dreht, und dessen durch den Sehpunkt A_3 gehende Lage mit v_3 bezeichnet ist. Bei einer beliebigen Bewegung des Sehpunktes aus der Hauptlage A_1 nach A_3 gelangt also der Großkreis v aus seiner in dem Kreis ζ befindlichen Hauptlage in die Lage v_3. Dabei dreht sich die Großkreisebene um die durch die Drehpunkte der beiden Augen gehende Achse YY und enthält die beiden von den Drehpunkten nach einem Objektpunkt gerichteten Blicklinien. Deshalb hat Helmholtz diese Großkreisebene die Blickebene genannt, und wir wollen den Großkreis v Blickkreis nennen.

Bei der Drehung des Auges um die Polachse $O\mathfrak{P}_{13}$ bewegt sich der Sehpunkt, den mitbewegten Blickkreis führend, auf dem Bahnkreis α_{13} von A_1 nach A_3. Diese besondere relative Bewegung ist die in Fig. 7 erörterte Führungsbewegung, wenn dort die eine der Kurve k^2, k^3 durch einen Punkt ersetzt wird, der nun hier der Sehpunkt ist. Den mit ω bezeichneten Winkel zwischen n_3, v_3, den der gedrehte Netzhauthorizont und der mitbewegte Blickkreis bei der Führungsbewegung einschließen,

nennen wir den Auglenkwinkel und nehmen ihn als positiv an im Sinne von v_3 nach n_3.

Befangen in dem Irrtum, daß sich das Auge während seiner Bewegung um die Blickline drehe, hat Helmholtz[23]) diesen Winkel „Raddrehungswinkel" genannt. Wundt[24]) bezeichnet die vermeintliche Drehung um die Blicklinie als „Rollung oder Raddrehung des Auges, und den Winkel, den dabei der Netzhauthorizont mit seiner ursprünglichen Lage bildet als Rollungs- oder Raddrehungswinkel". In Fig. 8 ist das aber der Winkel, den n, n_3 bei $\mathfrak{P}_{23}$ einschließen. Die aus jenem Irrtum entstandene verfehlte Benennung „Raddrehwinkel" für zwei verschiedene Winkel ist verhängnisvoll in dem Verständnis der Bewegung des Auges geworden.

Um in Fig. 10 den Auglenkwinkel ω zu konstruieren und sein Bild zu erhalten, bestimmen wir die Tangente im Punkt A_3 an den hierbei nicht nötigen und deshalb auch nicht eingezeichneten, durch A_3, Y gehenden Blickkreis. Die durch $\mathfrak{A}_3$ gehende zu $\mathfrak{n}$ Parallele $\mathfrak{v}_3$ ist das Bild dieses Blickkreises; denn alle Bilder seiner Lagen sind wagrecht. Da die Tangenten $T_{II}A_3$, T_2A_3 an m_3, n_3 die Bildebene $\mathfrak{B}$ in den Punkten V_{II}, V_2 treffen, so schneidet die Berührebene an der Kugelfläche im Punkt A_3 die Bildebene in der Geraden $V_{II}V_2$, die $\mathfrak{v}_3$ in einem Punkt W trifft. Demnach ist die Gerade A_3W die Tangente an dem Blickkreis, die mit der Tangente A_3V_2 des Kreises n_3 den in der Berührebene liegenden Auglenkwinkel ω bilden, und dessen Bild ist der von $\mathfrak{v}_3$ und $\mathfrak{n}_3$ eingeschlossene Winkel $\mathfrak{o}$.

Es ist das Verdienst Helmholtz, daß er aus den Ergebnissen seiner und vieler anderer Beobachtungen die Funktion des nun von uns benannten Auglenkwinkels für günstige Koordinaten abgeleitet und in vornehmliche Formen gebracht hat. Dabei benutzte er vier rechtwinkelige räumliche Koordinatensysteme, deren Umwandlungen umständliche Rechnungen mit zwölf Koordinaten und mehreren Hilfswinkeln erfordern, so daß das Verständnis sehr erschwert wird. Deshalb wollen wir die Ableitung dieser Funktion in einfacherer Weise ausführen.

Zuvörderst bestimmen wir in Fig. 9 die Lage einer Blicklinie OA_3 oder eines Sehpunktes A_3 durch die von Helmholtz verwendeten Koordinaten. Erstens erheben wir die Blicklinie aus der Hauptlage OA_1 in der Ebene XOZ um den gegebenen Winkel $A_1 O\mathsf{E} = \varepsilon$, den wir statt „Erhebungswinkel“ kürzer Erhebwinkel nennen. Zweitens wenden wir die Blicklinie seitwärts nach außen in der auf XOZ senkrechten $\mathsf{E}OA_3$ um den Winkel $\mathsf{E}OA_3 = \sigma$, den wir statt „Seitenwendungswinkel“, kürzer Seitenwendwinkel nennen. Und diese beiden Winkel nehmen wir als positiv an. Um den Winkel σ im Bilde darzustellen, legen wir an $O\mathsf{E}$ seine gegebene wahre Größe $\mathsf{E}O\Sigma = \sigma_0$, fällen wir von Σ auf $O\mathsf{E}$ die Senkrechte $\Sigma A''$, ziehen zu OY die Parallele $A''A_3$ und machen sie gleich der Hälfte dieser Senkrechten. Demnach ergibt sich, weil in dem Dreieck $OA''A_3$ der Winkel an A'' ein rechter und der Radius der Kugelfläche gleich der Einheit angenommen ist:

$$A^x A' = A''A_3 = \sin\sigma \quad \text{und} \quad OA^x = \cos\sigma\,\cos\varepsilon.$$

In Fig. 8 ist der Winkel $YO\mathfrak{P}_{23} = A^x \Omega A' = \tau'$, mithin

$$\tan\tau' = \frac{A^x A'}{1 + OA^x} = \frac{\sin\sigma}{1 + \cos\sigma\cos\varepsilon}.$$

Da ferner der Winkel $\mathfrak{P}_{23} OA_3 = \mathfrak{P}_{23} OA_2 = 90 - \tau'$ und bei dem sphärischen Dreieck $A_3 \mathfrak{P}_{23} Y$ der Außenwinkel an Y gleich ε ist, so folgt:

$$\frac{\sin\omega}{\sin\tau'} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin(90 - \tau')} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\tau'}, \quad \sin\omega = \sin\varepsilon\,\tan\tau'$$

und für den Auglenkwinkel ω die Funktion:

$$\text{I} \qquad \sin\omega = \frac{\sin\varepsilon\,\sin\sigma}{1 + \cos\varepsilon\,\cos\sigma},$$

welche die Bewegung des Auges dargestellt.

Hieraus folgen nach trigonometrischen Umformungen die beiden Helmholtzschen symmetrischen Formen der Funktion für den Auglenkwinkel ω:

II $$\tan \omega = \frac{\sin \varepsilon \sin \sigma}{\cos \varepsilon + \cos \sigma},$$

III $$\tan \frac{\omega}{2} = \tan \frac{\varepsilon}{2} \tan \frac{\sigma}{2}.$$

Aus den Gleichungen I und II folgen sehr einfache Konstruktionen des Auglenkwinkels ω, weil in Fig. 9 die auf $A^x\mathbf{P}$ Senkrechte $\Sigma S = \sin \varepsilon \sin \sigma$ und die Strecke $OA^x = \cos \varepsilon \cos \sigma$ ist. Und die Gleichung III dient zur einfachen logarithmischen Rechnung für den Auglenkwinkel.

Helmholtz hat in seiner Ableitung der Funktion, um ihre Gültigkeit auch für die von Fick verwendeten Koordinaten des Sehpunktes Longitudo und Latitudo, also Länge und Breite, zu beweisen, das Verständnis erschwerend mit einbegriffen, bei denen in Fig. 8 die Länge auf dem Kreis ζ als Äquator von A_1 aus bis an den gedachten durch Z, A_3 bestimmten Meridian und auf diesem die Breite bis an A_3 gemessen wird. Dabei hat Helmholtz noch den Winkel eingeführt, der die Lage m_3 des gedrehten Hauptmeridians mit dem Meridianbogen A_3Z bildet. Das ist ein neuer zu ω analoger Auglenkwinkel mit entgegengesetztem Vorzeichen. Aber aus den analogen Beziehungen der Lage n_3 zu dem Blickkreis und der Lage m_3 zu jenem Meridian folgt unmittelbar, daß für diesen neuen Auglenkwinkel sich dieselbe Funktion mit den Koordinaten Länge und Breite ergibt. Ferner folgt dies auch, wenn wir in Fig. 9 den Kreis ν als Äquator betrachten, und uns zu ihm durch den Sehpunkt A_3 den Parallelkreis $\varkappa$ als Breitenkreis ziehen; dann ist der Erhebwinkel ε die Länge und der Seitenwendwinkel σ die Breite. Auch Meinong hat darauf hingewiesen, daß man das Ficksche Koordinatensystem um OX drehen könne, bis der Kreis ζ nach dem Kreis ν gelangt.

Je nachdem wir in der Funktion $\varepsilon = 0$ oder $\sigma = 0$ annehmen, bewegt sich der Sehpunkt auf dem Kreis ζ oder ν; dann ist bei den beiden Bewegungen der Auglenkwinkel $\omega = 0$. Weiter können noch manche theoretische Ergebnisse aus der Funktion gefolgert werden. Nehmen wir an, daß der Seh-

punkt beliebig oder auf dem Bahnkreis α_{13} bis an den Kreis ξ nach dem Punkt Ξ bewegt wird, dann fällt der mitbewegte Blickkreis v mit dem Kreis ξ zusammen, und es ist $\varepsilon = 90^0$. Demnach folgt aus der Funktion $\omega = \sigma$. Hierbei ergibt sich, daß der Auglenkwinkel ω für alle Lagen des Sehpunktes auf dem Kreis ξ gleich dem zugehörigen Lagewinkel θ ist. Für die Lage des Sehpunktes in dem Punkt Y ist $\sigma = 90^0$, und somit $\omega = \varepsilon$; demzufolge ist Y ein singulärer Punkt, wobei die Blickebene beliebig um die Achse YY gedreht werden kann.

Bei Vertauschung der Werte ε, σ entsprechen den hierdurch bestimmten beiden Sehpunkten gleiche Werte des Auglenkwinkels und je zwei dieser Sehpunkte sind demzufolge einander zugeordnet. Nehmen wir für ε, σ gleiche Werte an, dann wird dadurch auf der Kugelfläche eine Kurve bestimmt, in der je zwei zugeordnete Sehpunkte zusammenfallen; und diese Kurve wollen wir die Gleichheitskurve nennen. Setzen wir ε und σ gleich φ in die Gleichung II, so ergibt sich, daß für die Sehpunkte auf der Gleichheitskurve $\tan\omega = \frac{1}{2}\sin\varphi\tan\varphi$ ist. Denken wir uns in Fig. 9 von A_1 auf $O\mathsf{E}$ die Senkrechte gefällt, so ist deren Fußpunkt bei der Annahme $\sigma = \varepsilon$ die Aufrißprojektion eines Punktes der Gleichheitskurve und liegt auf dem Kreis, der den Durchmesser OA_1 enthält. Demnach ist dieser Kreis die Aufrißprojektion der Gleichheitskurve, und die durch ihn bestimmte Drehzylinderfläche schneidet die Kugelfläche in der Gleichheitskurve, zu der beiderseits je zwei zugeordnete Sehpunkte liegen. Wenn wir für ω konstante Werte annehmen, ergeben sich auf der Kugelfläche die Kurven gleicher Auglenkwinkel.

Die wirkliche Bewegung des Augapfels mit einem auf ihm neben der Iris befestigten, kleinen Merkmal werden wir in allen Phasen erst erkennen, wenn es ermöglicht ist, vermittels eines Rapid-Kinematographen[25]) einen Film von der Bewegung des Auges zu erhalten, durch den uns diese Bewegung verhältnismäßig langsam vorgeführt wird.

Literaturnachweise und Bemerkungen.

[1]) J. Purkinje, Beobachtungen und Versuche zur Physiologie der Sinne, 1823, Bd. I, S. 162, und 1825, Bd. II, S. 54.

[2]) a) H. v. Helmholtz, Handbuch der physiologischen Optik, 1810, 3. Aufl., Bd. III, S. 35, 105. b) L. Hermann, Handbuch der Physiologie, 1879, Bd. III, S. 433.

[3]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 602, Fig. 627.

[4]) H. v. Helmholtz, Anm. 2. a) a. a. O. S. 38.

[5]) a) C. G. Ruete, Lehrbuch der Ophthalmologie, 1854, 2. Aufl., Bd. I, S. 37. b) Ein neues Ophthalmotrop, 1857, S. 43.

[6]) A. Hueck, Die Achsendrehung des Auges, 1838, S. 16 schreibt: „Die Drehung des Augapfels um seine Längenachse ist beim lebenden Auge nachweisbar".

[7]) Johannes Müller in seinem vortrefflichen Werk, Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinnes, 1826, S. 254. Er hat sich überzeugt, „daß das Auge bei der Bewegung nicht zugleich um die Längenachse rotiert".

[8]) G. Meißner, Archiv für Ophthalmologie, 1855, Bd. II, Abt. 1, S. 71 schreibt: „So viel können wir aber auch mit völliger Sicherheit aussagen, daß eine Drehung um die optische Achse als Drehachse niemals vorkommt." Und S. 97 glaubt er mit Recht „das Listingsche Gesetz durch Beobachtungen bewiesen".

[9]) F. C. Donders, Archiv für Ophthalmologie, 1870, Bd. XVI, S. 158 schreibt: „Die Literatur ist besonders, was die sogenannte Raddrehung betrifft, nicht von Verwirrungen frei zu sprechen."

[10]) C. G. Ruete, Ein neues Ophthalmotrop, 1857, S. 25.

[11]) Tourtual in Joh. Müllers Archiv für Anatomie, Physiologie, 1846, Abt. 2, S. 355 schreibt: „Die Drehung des Augapfels um die Sehachse werde ich der Kürze halber Rollung nennen". Aber noch früher schreibt auch E. A. Lauth, Neues Handbuch der praktischen Anatomie, 1835, Bd. I, S. 319: „Betrachtet man jeden schiefen Augenmuskel einzeln für sich, so scheint er zum Rollen des Augapfels um die Längenachse bestimmt zu sein. In der Anatomie wird Drehung um eine Achse auch oft Rollung genannt. Vielleicht kommt diese unrichtige Benennung von der Redensart „Die Augen rollen" und z. B. „Vor Wut die Augen rollen".

Weitere Hinweise befinden sich in Grimms Deutsches Wörterbuch, Art. Rollen, S. 1190. Unbewußt ist diese Redensart richtig bei der allgemeinen Bewegung, wo der Gangpolachsenkegel des Auges auf dem Rastpolachsenkegel rollt.

[12]) H. v. Helmholtz, Archiv für Ophthalmologie, 1863, Bd. IX, Ab. 2, S. 154. Vor ihm schreibt A. W. Volkmann: „Die Iris dreht sich deutlich um den Mittelpunkt der Pupille" in R. Wagners Handwörterbuch, 1840, Art. Sehen.

[13]) A. Meinong, Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, 1898, Bd. XVII, S. 161.

[14]) J. v. Kries, Zusätze in Helmholtz, Physiologische Optik, 1910, Bd. III, S. 119.

[15]) C. G. Ruete, Lehrbuch der Ophthalmologie, 1845, S. 14 und dessen Ein Ophthalmotrop, 1846, S. 9.

[16]) F. C. Donders, Holländische Beiträge zu den anatomischen und physiologischen Wissenschaften, 1848, Bd. I, S. 105.

[17]) C. G. Ruete, Anm. 10, a. a. O., S. 22.

[18]) W. Wundt in Archiv f. Ophthalmologie, 1861, Bd. VII, Abt. 2, S. 1.

[19]) H. v. Helmholtz daselbst, 1863, Bd. IX, Abt. 2, S. 153.

[20]) E. Hering in L. Hermann, Handbuch der Physiologie, 1879, Bd. III, S. 477.

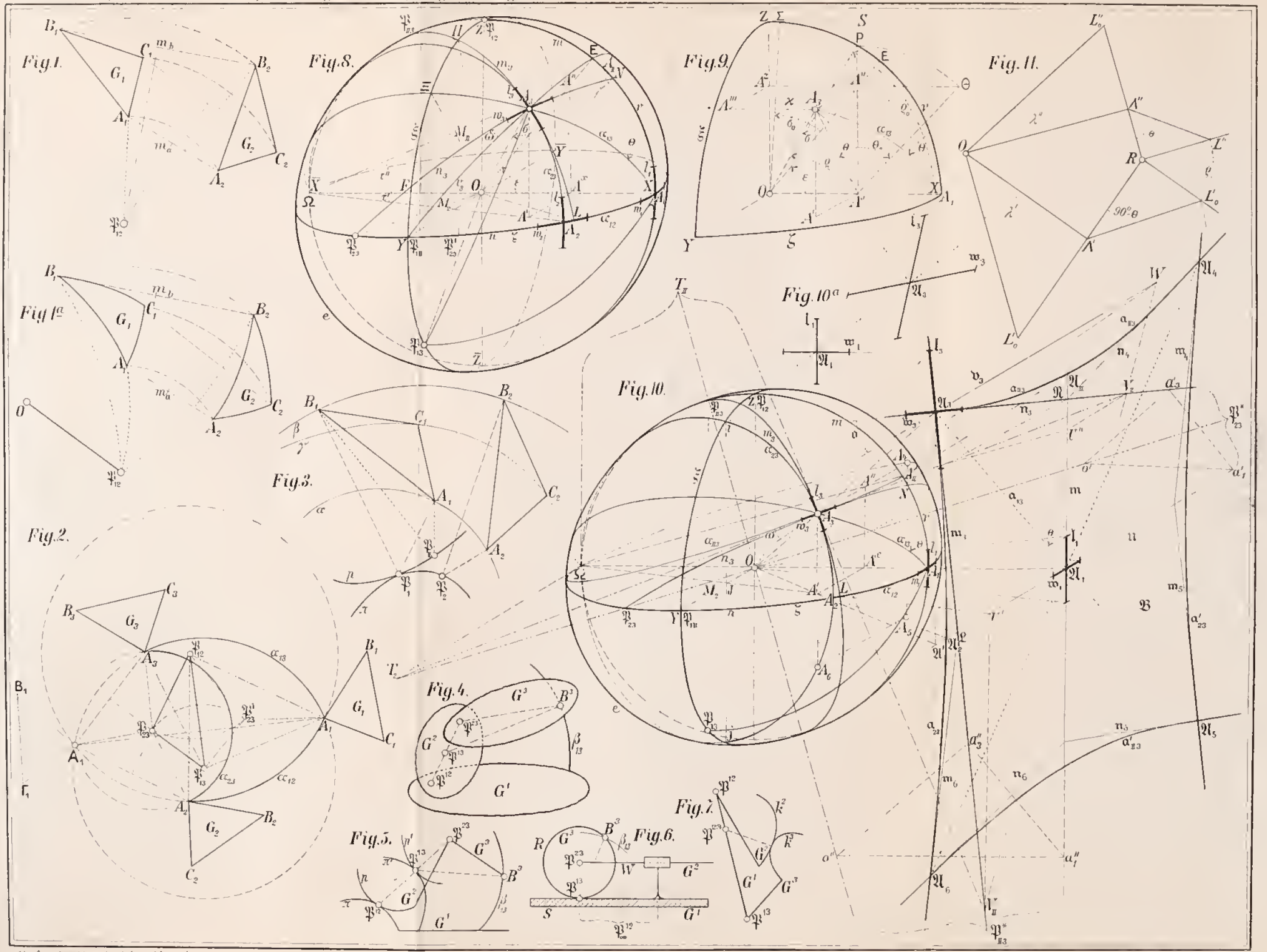
[21]) A. Fick in Jac. Moleschott, Untersuchungen zur Naturlehre des Menschen, 1858, Bd. V, S. 193.

[22]) G. Meißner, Anm. 8.

[23]) H. v. Helmholtz, Anm. 2a, a. a. O., S. 38.

[24]) W. Wundt, Archiv für Ophthalmologie, 1861, Bd. VIII, Abt. 2, S. 1, und Grundzüge der physiologischen Psychologie, 1910, 6. Aufl., Bd. II, S. 550.

[25]) J. Paul Liesegang, Handbuch der praktischen Kinematographie, 1912, 3. Aufl., S. 374.



Lith. Anst. Hub. Kohler, München.

Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1918.

Verl. L. Burmester

Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Mai 1918.

Für die Aufgabe, ein durch eine endliche Anzahl von Bögen algebraischer Kurven begrenztes Polygon auf den Kreis oder auf die Halbebene konform abzubilden, fehlt bisher jeder Ansatz. Für ein geradliniges Polygon hat Christoffel (Ann. di matematica, Ser. II, t. 1) bekanntlich die Lösung gegeben, und für ein von Kreisen begrenztes Polygon verdankt man Schwarz (Crelles Journal, Bd. 70) den zum Ziele führenden Ansatz. In beiden Fällen bleibt eine endliche Anzahl von Konstanten noch zu bestimmen. Die Frage, ob auch in anderen Fällen die Zurückführung auf eine Differentialgleichung gelingt, kann man bisher nicht beantworten; es dürfte deshalb Interesse haben, für eine weitere allgemeine Klasse von Polygonen, nämlich solchen, die von beliebigen Parabeln begrenzt werden, die Zurückführung des Problems auf eine Differentialgleichung zu bewerkstelligen, wie es im folgenden geschehen soll.

Auch für beliebige Kegelschnitte als Begrenzungskurven scheint sich ein analoger Ansatz durchführen zu lassen, worauf ich demnächst zurückkommen werde.

§ 1. Die Differentialgleichung der Kegelschnitte.

Besteht zwischen x und y eine Gleichung zweiten Grades, so kann man y als Funktion von x auffassen, die noch von fünf willkürlichen Konstanten abhängt, und diese Funktion ist

dann das allgemeine Integral einer gewissen Differentialgleichung fünfter Ordnung. Letztere kann man nach Halphen[1]) in folgender Weise gewinnen:

Die Auflösung nach y ergibt die Gleichung des in der Form

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

gegebenen Kegelschnittes in der Form:

$$(1)\quad a_{22}y = -(a_{12}x + a_{13}) + \sqrt{-A_{33}x^2 - 2A_{13}x - A_{23}},$$

wo mit A_{ik} die Unterdeterminanten des Kegelschnittes bezeichnet sind. Durch zweimalige Differentiation findet man:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (A_{33}A_{23} - A_{23}^2)(-A_{33}x^2 - 2A_{13}x - A_{23})^{-\frac{3}{2}}$$

und folglich:

$$(2)\qquad \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0$$

oder entwickelt:

$$(2\,a)\quad 9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5} - 45\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{d^4y}{dx^4} + 40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 0.$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung aller Kegelschnitte. Für eine Parabel ist $A_{33} = 0$. Nach (1) ist also $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ eine lineare Funktion von x, und wir erhalten als Differentialgleichung aller Parabeln:

$$(3)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.$$

Fassen wir x und y als Funktionen einer dritten Variabeln X auf, so wird bekanntlich:

$$(4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3},$$

wo $\quad x' = \dfrac{dx}{dX},\ x'' = \dfrac{d^2x}{dX^2},\ y' = \dfrac{dy}{dX},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dX^2}.$

[1]) Bulletin de la Société mathématique de France, tom. 7, 1879, p. 83.

Wir erhalten also:

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{U_{31}\cdot x' - 3\,U_{21}\cdot x''}{x'^4}, \tag{5}$$

wenn

$$U_{ik} = y^{(i)}x^{(k)} - y^{(k)}x^{(i)} \tag{6}$$

gesetzt wird, ferner:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \tag{7}$$
$$= \frac{x'(U_{41}x' - 2U_{31}x'' - 3U_{21}x''' + U_{32}x') - 4x''(U_{31}x' - 3U_{21}x'')}{x'^5}$$

und:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}}\frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dX}\frac{1}{x'}, \tag{8}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{9}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{8}{3}}\left[\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]^2\frac{1}{x'^2} \tag{9}$$
$$-\frac{2}{3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]\frac{1}{x'^2} + \frac{2}{3}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{d}{dX}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right]\frac{x''}{x'^3},$$

$$\frac{d^3}{dx^3}(\eta)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{80}{27}\eta^{-\frac{11}{3}}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^3\frac{1}{x'^3} + \frac{10}{3}\eta^{-\frac{8}{3}}\frac{d\eta}{dX}\frac{d^2\eta}{dX^2}\frac{1}{x'^3} \tag{10}$$
$$-\frac{10}{3}\eta^{-\frac{8}{3}}\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2\frac{x''}{x'^4} - \frac{2}{3}\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d^3\eta}{dX^3}\frac{1}{x'^3} + 2\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d^2\eta}{dX^2}\frac{x''}{x'^4}$$
$$+\frac{2}{3}\eta^{-\frac{5}{3}}\frac{d\eta}{dX}\left(\frac{x'''}{x'^4} - 3\frac{x''^2}{x'^5}\right),$$

worin $\frac{d^2y}{dx^2}$ zur Abkürzung durch η ersetzt ist. Der Ausdruck (9) ergibt dann die allgemeine Gleichung der Parabel in der folgenden Form:

$$5\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2x' - 3\eta\frac{d^2\eta}{dx^2}x' + 3\eta\frac{d\eta}{dx}x'' = 0.$$

Setzt man hier die Ausdrücke (4), (5) und (6) ein, so wird schließlich die Differentialgleichung der Parabel:

$$5(U_{31}x' - 3U_{21}x'')^2 - 3U_{21}[U_{41}x'^2 - 6U_{31}x''x' - 3U_{21}x'''x'$$
$$+ U_{32}x'^2 + 12U_{21}x''^2] + 3U_{21}(U_{31}x' - 3U_{21}x'')x'' = 0$$

oder, da links ein Faktor x' heraustritt:

$$(11)\quad 9U_{21}^2x''' - 9U_{21}U_{31}x'' + [5U_{31}^2 - 3(U_{41}+U_{32})U_{21}]x' = 0.$$

Durch Vertauschung von x mit y ergibt sich die weitere Gleichung:

$$(12)\quad 9U_{21}^2y''' - 9U_{21}U_{31}y'' + [5U_{31}^2 - 3(U_{41}+U_{32})]y' = 0.$$

Um das entsprechende für beliebige Kegelschnitte zu erhalten, bedürfen wir noch der aus (7) durch Differentiation nach x fließenden Relation:

$$\frac{d^3\eta}{dX^3} = \frac{1}{x'^7}[(U_{51}+2U_{42})x'^3 - (U_{41}+5U_{32})x'^2x'' - 5U_{31}x'^2x''' + 9U_{21}x'x''x'''].$$

(13)

Gemäß (2) erhalten wir die betreffende Differentialgleichung durch Nullsetzen der rechten Seite von (10) in der Form:

$$40\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^3x'^2 - 45\eta\frac{d\eta}{dX}\frac{d^2\eta}{dX^2}x'^2 + 45\eta\left(\frac{d\eta}{dX}\right)^2x'x'' + 9\eta^2\frac{d^3\eta}{dX^3}x'^2 - 27\eta^2\frac{d^2\eta}{dX^2}x'x'' - 9\eta^2\frac{d\eta}{dX}(x'x''' - 3x''^2) = 0,$$

in der für η und die Differentialquotienten von η die obigen Werte einzusetzen sind.

§ 2. Die Ecken des Parabelpolygons.

Wir bestimmen einen Punkt x, y der Ebenen durch die beiden Koordinaten

$$(14)\qquad z = x + iy, \quad z_1 = x - iy.$$

Dann ist, wenn:

$$V_{kl} = z_1^{(k)}z^{(l)} - z^{(k)}z_1^{(l)} = \frac{d^kz_1}{dX^k}\frac{d^lz}{dX^l} - \frac{d^kz}{dX^k}\frac{d^lz_1}{dX^l}$$

gesetzt wird:

$$V_{kl} = -2iU_{kl}.$$

Aus den beiden in x bzw. y linearen Gleichungen (11) und (12) ergibt sich also auch:

$$(15)\quad 9V_{21}^2z''' - 9V_{21}V_{31}z'' + [5V_{31}^2 - 3(V_{41}+V_{32})V_{21}]z' = 0.$$

Gelingt es also, die Größen V_{kl} als Funktionen von Z (wo Z einen Punkt der Halbebene bezeichnet, auf welche das Parabelpolygon abzubilden ist, und nunmehr X durch Z ersetzt wird) zu bestimmen, so genügt die gesuchte Funktion z von Z einer homogenen linearen Differentialgleichung dritter Ordnung. Die singulären Punkte dieser Gleichung sind die Unendlichkeits- und Verzweigungspunkte der Koeffizienten V_{kl}, d. h. der Funktionen:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}}, \quad \frac{V_{41}}{V_{21}} \text{ und } \frac{V_{32}}{V_{21}}. \tag{16}$$

Als singuläre Stellen kommen ferner die Ecken des Parabelpolygons in Betracht. Eine solche Ecke denken wir uns der Einfachheit halber im Anfangspunkte $x = 0$, $y = 0$. Die beiden dort zusammentreffenden Parabeln lassen sich durch einen Parameter t mittels der Formeln

$$x = a_1 t + a_2 t^2, \quad y = b_1 t + b_2 t^2, \text{ und:}$$
$$x = a_1' t + a_2' t^2, \quad y = b_1' t + b_2' t^2$$

darstellen, wo dann der Wert $t = 0$ der im Anfangspunkte liegenden Ecke entspricht; also auch für die erste Parabel:

$$z = (a_1 + i b_1) t + (a_2 + i b_2) t^2, \tag{17}$$

und für die zweite Parabel:

$$z = (a_1' + i b_1') t + (a_2' + i b_2') t^2. \tag{18}$$

Die Tangenten der beiden Parabeln mögen miteinander im Punkte $t = 0$ den Winkel λ einschließen, und es seien α und α' die Winkel dieser Tangenten gegen die x-Axe; dann ist:

$$a_1 + i b_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot e^{i\alpha}$$
$$a_1' + i b_1' = \sqrt{a_1'^2 + b_1'^2} \cdot e^{i\alpha'}, \text{ und } \alpha' = \alpha + \pi - \lambda.$$

Für die erste Parabel sei nun t durch τ, für die zweite Parabel t durch τ_1 gemäß den Formeln:

$$\tau = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot t, \quad \tau_1 = \sqrt{a_1'^2 + b_1'^2} \cdot t$$

ersetzt; dann geben die Gleichungen (17) und (18):

$$z = e^{i\alpha} \tau + (a + i b) \tau^2, \text{ und}$$
$$z = e^{i\alpha'} \tau_1 + (a' + i b') \tau_1^2.$$

Da z im Innern der oberen Halbebene ($Y > 0$) eine eindeutige Funktion von $Z = X + iY$ ist, so ist auch (abgesehen vom Brennpunkte), τ eine eindeutige Funktion von Z, und letztere ist reell auf dem Rande ($Y = 0$), und beim Übergang von der ersten Parabel auf die zweite verwandelt sich $e^{i\alpha}\tau$ in $e^{i\alpha'}\tau_1 = e^{i(\alpha+\pi-\lambda)}\tau_1$. Es kann daher, wenn $X = A$ auf der reellen Axe der Ecke $t = 0$ entspricht, in der Umgebung dieses Punktes

$$\tau = (Z - A)^{\frac{\lambda}{\pi}} \mathfrak{P}(Z - A) \tag{19}$$

gesetzt werden, wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet, deren konstantes Glied von Null verschieden ist, denn bei diesem Übergange von $X < A$ nach $X > A$ wächst $(Z - A)$ um den Faktor $e^{-\pi i}$, $(Z - A)^{\frac{\lambda}{\pi} - 1}$ also um den Faktor $e^{i(\pi-\lambda)}$. Da τ für $Z = X < A$ reell sein muß, sind die sonst reellen Koeffizienten von $\mathfrak{P}$ mit einem entsprechenden Faktor zu versehen.

Um die Koeffizienten der linearen Gleichung (15) als Funktionen von Z zu bestimmen, haben wir den Einfluß der Substitution $t = f(X)$ auf die Größen V_{ik} festzustellen, wo wieder t für τ geschrieben ist. Es ist

$$\frac{dz}{dX} = \frac{dz}{dt} f'(X), \quad \frac{d^2z}{dX^2} = \frac{d^2z}{dt^2} f'(X)^2 + \frac{dz}{dt} f''(X),$$

$$\frac{d^3z}{dX^3} = \frac{d^3z}{dt^3} f'(X)^3 + 3\frac{d^2z}{dt^2} f'(X) f''(X) + \frac{dz}{dt} f'''(X),$$

$$\frac{d^4z}{dX^4} = \frac{d^4z}{dt^4} f'(X)^4 + 6\frac{d^3z}{dt^3} f'(X)^2 f''(X) + \frac{d^2z}{dt^2}[3f''(X)^2 + 4f'(X)f'''(X)] + \frac{dz}{dt} f^{IV}(X).$$

Für die Differentialquotienten von z_1 gelten die gleichen Beziehungen, denn $f(X)$ ist eine für reelle Werte von X reelle Funktion. Setzt man noch

$$W_{kl} = \frac{d^k z}{dt^k}\frac{d^l z_1}{dt^l} - \frac{d^l z}{dt^l}\frac{d^k z_1}{dt^k},$$

so wird:

$$V_{21} = f'(X)^3 W_{21},\quad V_{31} = f'^4 \cdot W_{31} + 3f'^2 f'' \cdot W_{21},$$
$$V_{41} = f'^5 \cdot W_{41} + 6f'^3 f'' \cdot W_{31} + f'(3f''^2 + 4f'f''') \cdot W_{21},$$
$$V_{32} = f'^5 W_{32} + f'^3 f'' W_{31} + (3f'f''^2 - f'^2 f''') \cdot W_{21}.$$

Es waren aber z und z_1 ganze quadratische Funktionen von t bzw. τ; infolgedessen verschwinden die Ausdrücke W_{31}, W_{32}, W_{41}, und wir erhalten einfach:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{f''}{f'},\quad \frac{V_{32}}{V_{21}} = 3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{f'},$$
$$\frac{V_{41}}{V_{21}} = 3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 + 4\frac{f'''}{f'}.$$

Setzt man endlich für $f(X)$ die in (19) gegebene Potenzreihe ein, so ergibt sich:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\frac{1}{X-A} + \mathfrak{P}_1(X-A),$$
$$\frac{V_{32}}{V_{21}} = \left(2\frac{\lambda^2}{\pi^2} - 3\frac{\lambda}{\pi} + 1\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \mathfrak{P}_2(X-A), \tag{20}$$
$$\frac{V_{41}}{V_{21}} = \left(7\frac{\lambda^2}{\pi^2} - 18\frac{\lambda}{\pi} + 11\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \mathfrak{P}_3(X-A),$$

wo mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ wieder Potenzreihen bezeichnet sind, die in der Umgebung des Punktes A konvergieren. Schreiben wir die Differentialgleichung (15) in der Form

$$z''' + Pz'' + Qz' = 0, \tag{21}$$

so erhalten wir also für die Umgebung der singulären Stelle A:

$$P = 3\left(1 - \frac{\lambda}{\pi}\right)\frac{1}{X-A} - \mathfrak{P}_1(X-A),$$
$$Q = \left(2\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)\frac{1}{(X-A)^2} + \frac{a}{X-A} + \mathfrak{P}_4(X-A), \tag{22}$$

wo a eine Konstante und $\mathfrak{P}_4$ eine neue Potenzreihe bedeutet, und zwar ist:

$$a = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\pi} - 1\right)c_0,$$

wenn c_0 das konstante Glied der Reihe $\mathfrak{P}_1$ bezeichnet.

Das gleiche gilt für alle Ecken; es folgt also, daß bei passender Bestimmung der auftretenden Konstanten die Funktionen

$$P - 3\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_s}{\pi}\right)\frac{1}{Z-A_s} \text{ und}$$

(22 a)

$$Q - \Sigma\left(2\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{(Z-A_s)^2} - \Sigma\frac{a_s}{Z-A_s}$$

in den Punkten A_s der reellen Axe, welche den Ecken des Polygons entsprechen, sich nicht mehr singulär verhalten.

Auf dem Rande des Parabelpolygons, d. h. auf der reellen Axe der Z-Ebene können andere singuläre Stellen nicht vorkommen, denn der Nenner V_{21} der Funktionen wird nur für einen Wendepunkt der Randkurve gleich Null, und solche Punkte treten bei Kegelschnitten nicht auf.

§ 3. Die Brennpunkte der Parabeln.

Um die Größen V_{kl} als Funktionen von Z im Innern der Halbebene $Y > 0$ zu bestimmen, müssen wir unter z_1 diejenige Funktion verstehen, welche sich ergibt, wenn man den auf dem Rande geltenden Wert $z_1 = x - iy$ stetig fortsetzt. Diese Fortsetzung fällt aber verschieden aus, je nachdem, von welcher Parabel der Begrenzung man ausgeht. Längs einer Parabel, deren Gleichung in der Form

$$(23)\quad a_{11}z^2 + a_{22}z_1^2 + 2a_{12}z_1z_2 + 2a_{13}z + 2a_{23}z_1 + a_{33} = 0$$

mit der Bedingung $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ (die für die Variable z, z_1 ebenso gilt wie für die Variable x, y) gegeben ist, wird:

$$(24)\quad a_{22}z_1 = -(a_{12}z + a_{23}) \pm \sqrt{2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})z + a_{23}^2 - a_{22}a_{33}},$$

und dieser Wert nimmt den zu z konjugierten Wert an, wenn der Punkt auf der Parabel liegt. Im allgemeinen definiert die vorstehende Gleichung eine zweiblättrige Riemannsche Fläche, welche sich über der z-Ebene ausbreitet und einen Verzweigungspunkt im Endlichen (den zweiten im Unendlichen) besitzt. Etwa im oberen Blatte derselben denken wir uns das Parabelpolygon gezeichnet. Überschreitet der Punkt Z denjenigen

Teil der reellen Axe, welcher der Parabel (23) bei der Abbildung entspricht, so verläßt der Punkt z das Innere des Parabelpolygons, und der unteren Halbebene ($Y < 0$) der Z-Ebene entspricht im oberen Blatte der Riemannschen Fläche ein Polygon, das aus dem gegebenen Parabelpolygon durch eine Art „Spiegelung" an der Parabel (23) entsteht[1]).

Liegt der Verzweigungspunkt p der Funktion (24), der bekanntlich mit dem Brennpunkte der Parabel (23) identisch ist, im Innern des gegebenen Polygons, so muß auch dort die Abbildung eindeutig und eindeutig umkehrbar sein. Es besteht also eine Gleichung der Form

$$z - p = \mathfrak{P}(Z - P), \tag{25}$$

wenn P den dem Punkte p in der Halbebene $Y > 0$ entsprechenden Punkt bezeichnet, wobei das konstante Glied der Potenzreihe $\mathfrak{P}$ gleich Null ist. Die Gleichung (24) ergibt also ein Resultat der Form

$$\begin{aligned} z_1 = A z + B + C\sqrt{z - p} = A\,\mathfrak{P}(Z - P) + B \\ + C\sqrt{\mathfrak{P}(Z - P)}, \end{aligned} \tag{26}$$

wo A, B, C Konstante bezeichnen. Die Funktion z_1 hat also in P einen Verzweigungspunkt. Entsprechend muß dann die Funktion z in dem konjugierten Punkte P_1 (in der Halbebene $Y < 0$) einen Verzweigungspunkt haben. Die Brennpunkte der anderen begrenzenden Parabeln spielen bei der Fortsetzung über die Parabel (23) hinaus keine besondere Rolle.

Die Differentiation von (26) nach Z gibt:

$$z_1' = A z' + \frac{1}{2}\frac{C}{\sqrt{z - p}}\, z',$$

$$z_1'' = A z'' + \frac{1}{2}\frac{C}{\sqrt{z - p}}\, z'' - \frac{1}{4}\frac{C}{(z - p)^{3/2}}\, z'^2,$$

also: $$V_{21} = z_1'' z' - z_1' z'' = -\tfrac{1}{4} C z'^3 (z - p)^{-3/2},$$

[1]) Vgl. meinen Aufsatz „Die analytische Fortsetzung derjenigen Funktionen, welche das Innere eines Kegelschnittes konform auf die Halbebene abbilden", diese Sitzungsberichte, Bd. 26, 1896, p. 491 ff.

ferner:

$$z_1''' = Az''' + \tfrac{1}{2} C(z-p)^{-1/2} z''' - \tfrac{3}{4} C(z-p)^{-3/2} z' z'' + \tfrac{3}{8} C(z-p)^{-5/2} z'^3,$$

also:

$$V_{31} = z_1''' z' - z_1' z''' = -\tfrac{3}{4} C(z-p)^{-3/2} z'^2 z'' + \tfrac{3}{8} C(z-p)^{-5/2} z'^4 = \frac{dV_{21}}{dZ}$$

und folglich:

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{z''}{z'} - \tfrac{3}{2}(z-p)^{-1} z'. \tag{27}$$

Diese Funktion hat also an der Stelle P einen Pol erster Ordnung und (da sie reell auf dem Rande ist, indem sie sich bei Vertauschung von z mit z_1, d. i. von $X + iY$ mit $X - iY$, nicht ändert) an der konjugierten Stelle P_1 ebenfalls einen Pol erster Ordnung. Es wird ferner:

$$V_{32} = z_1''' z'' - z_1'' z''' = \tfrac{1}{4} C(z-p)^{-3/2} (z'^2 z''' - 3 z' z''^2) + \tfrac{3}{8} C(z-p)^{-5/2} z'^3 z'',$$

$$\frac{V_{32}}{V_{21}} = -z'^{-2}(z' z''' - 3 z''^2) - \tfrac{3}{2}(z-p)^{-1} z''. \tag{28}$$

Auch diese Funktion hat also in den Punkten P und P_1 je einen Pol erster Ordnung. Entsprechend findet man, daß die Funktion $\frac{V_{41}}{V_{21}}$ an diesen Stellen einen Pol zweiter Ordnung haben muß.

Zur genaueren Kenntnis der durch die Gleichung (24) vermittelten „Spiegelung“ an der Parabel (23) dienen noch die folgenden Überlegungen. Man hat in dieser Gleichung (24)

$$z_1 = \xi - i\eta$$

zu setzen; dann ordnet sie jedem Punkte x, y (gegeben durch $z = x + iy$) zwei Punkte ξ, η zu; und wenn x, y auf der Parabel (23) liegt, wird $\xi = x$, $\eta = y$. Liegt der Brennpunkt im Innern des gegebenen Parabelpolygons, so werden die beiden Blätter der durch die Quadratwurzel über der z-Ebene ausgebreiteten zweiblättrigen Fläche, jedes Blatt begrenzt durch das

Parabelpolygon (das aus n Parabelbögen bestehen möge), abgebildet auf ein aus $2n$ algebraischer Kurven begrenztes geschlossenes Polygon, das sich nur in dem einen (etwa dem oberen) Blatte der Riemannschen Fläche ausbreitet, in dem die Parabel (23) und das gegebene Polygon gezeichnet gedacht werden. Um die Gleichung der Kurve zu finden, die einem der gegebenen Parabelbögen entspricht, hat man in folgender Weise zu verfahren. Die Parabel, an welcher gespiegelt wird, habe die Gleichung

$$f(z, z_1) = 0 \tag{29}$$

wie in (23). Ein anderer Parabelbogen sei durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{30}$$

in rechtwinkligen Koordinaten gegeben. Ersetzt man in f z_1 durch $\xi - i\eta$, so wird $f = u(x, y, \xi, \eta) + iv(x, y, \xi, \eta)$; man hat dann aus den drei Gleichungen:

$$u(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad v(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

x, y zu eliminieren, um die gesuchte Begrenzungskurve des durch Spiegelung erzeugten Polygons zu finden.

Eine Seite des letzteren wird durch die gegebene Parabel (29) geliefert, eine andere Seite derselben erhält man, indem man letztere als im unteren Blatte der Riemannschen Fläche gelegen betrachtet und demgemäß die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ durch $f(x + iy, x - iy) = 0$ ersetzt.

Jede Transformation zwischen $x + iy$ und $\xi - i\eta$ kann aufgefaßt werden als eine Transformation der Strahlen, die von den beiden imaginären Kreispunkten der Ebene ausgehen; aus jedem Strahle wird ein anderer oder werden mehrere andere. Der Punkt x, y (bzw. ξ, η) ist der eine reelle Punkt eines solchen imaginären Strahls[1]). Die Brennpunkte einer Kurve sind die reellen Punkte der von einem Kreispunkte ausgehen-

[1]) Vgl. meine Darstellung einer solchen Interpretation der komplexen Ebene in dem meiner Bearbeitung von Clebschs Vorlesungen über Geometrie, Bd. II, S. 621 ff., 1891 oder eine entsprechende Darstellung am Schlusse der neuen Auflage des ersten Bandes.

den Tangenten. Eine von einem Kreispunkte ausgehende Tangente der Kurve $\varphi = 0$ geht in eine ebensolche Tangente der neuen Kurve über; dem Brennpunkt der Parabel $\varphi = 0$ (falls er im Innern des betrachteten Polygons liegt) entsprechen daher zwei Brennpunkte der transformierten Kurve, die sich im Innern des durch „Spiegelung" erhaltenen Polygons befinden.

Vorstehendes gilt, wenn der Brennpunkt der gegebenen Parabel $f = 0$ im Innern des gegebenen Polygons liegt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Polygon im oberen Blatte der Riemannschen Fläche schon geschlossen, und die Spiegelung gibt ein Polygon, das ebenfalls durch n Kurvenbögen (nicht $2n$) begrenzt wird.

Liegt der Brennpunkt der Parabel (23), d. h. der Verzweigungspunkt der betrachteten Riemannschen Fläche, nicht innerhalb des gegebenen Parabelpolygons, so kommt letzteres nur insofern in Betracht, als es im oberen Blatte der Fläche sich befindet, und durch die Spiegelung an der Parabel (23) entsteht wieder ein von n Kurvenbögen begrenztes Flächenstück, denn für das Innere des Polygons ist jetzt die Transformation eindeutig.

§ 4. Die Brennpunkte als scheinbar singuläre Punkte.

Auf Grund der Formeln (25), (27) und (28) und auf Grund der daran geknüpften Darlegungen lassen sich Konstante β, β', β'', γ so bestimmen, daß die Funktionen

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} - \frac{\beta_1}{Z-P_1} - \frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}}, \quad \frac{V_{32}}{V_{21}} - \frac{\beta_1'}{Z-P_1} - \frac{\beta_{11}'}{Z-P_{11}},$$

$$\frac{V_{41}}{V_{21}} - \frac{\beta_1''}{Z-P_1} - \frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2} - \frac{\beta_1''}{Z-P_{11}} - \frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2}$$

als Funktionen von z auf derjenigen zweiblättrigen Fläche, welche entsteht, wenn man z_1 entsprechend der Gleichung (26) als Funktion von z auffaßt, im Innern des Parabelpolygons nicht mehr singulär sind. Dabei ist $Z = P_1$ derjenige Punkt der Halbebene $Y > 0$, welcher dem Brennpunkt der Parabel (23)

entsprechen soll, P_{11} der konjugiert imaginäre Punkt, und β_1, β_1', β_1'', γ_1 sind Konstante, die nur dann von Null verschieden sind, wenn der bezeichnete Brennpunkt im Innern des gegebenen Polygons liegt, während β_{11}, β_{11}', β_{11}'', γ_{11} die konjugiert imaginären Konstanten bedeuten.

Haben für eine zweite von den begrenzenden Parabeln die Konstanten P_2, P_{21}, β_2, β_{21}, β_2', β_{21}', β_2'', β_{21}'', γ_2, γ_{21} die entsprechende Bedeutung, so werden die Funktionen

$$(31)\quad \begin{aligned} &\frac{V_{31}}{V_{21}} - \frac{\beta_1}{Z-P_1} - \frac{\beta_2}{Z-P_2} - \frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}} - \frac{\beta_{21}}{Z-P_{21}},\\ &\frac{V_{32}}{V_{21}} - \frac{\beta_1'}{Z-P_1} - \frac{\beta_2'}{Z-P_2} - \frac{\beta_{11}'}{Z-P_{11}} - \frac{\beta_{21}'}{Z-P_{21}},\\ &\frac{V_{41}}{V_{21}} - \frac{\beta_1''}{Z-P_1} - \frac{\beta_{11}''}{Z-P_{11}} - \frac{\beta_2''}{Z-P_2} - \frac{\beta_{21}''}{Z-P_{21}}\\ &- \frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2} - \frac{\gamma_2}{(Z-P_2)^2} - \frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2} - \frac{\gamma_{21}}{(Z-P_{21})^2} \end{aligned}$$

weder auf der zur ersten Parabel gehörigen Riemannschen Fläche in deren Brennpunkten, noch auf der zur zweiten Parabel gehörigen zweiblättrigen Fläche im Brennpunkte dieser zweiten Parabel singulär.

Die obige Gleichung (29) zeigt aber, daß der Quotient $V_{31}:V_{21}$ eine eindeutige Funktion in der Umgebung des Brennpunktes p ist. Es ist deshalb die Betrachtung der beiden Blätter der Riemannschen Flächen nicht weiter notwendig; und jener Quotient ist auch eine eindeutige Funktion von z in der Umgebung eines jeden Brennpunktes, der sich im Innern des Parabelpolygons befindet, folglich auch in der Halbebene $Y > 0$. In jedem solchen Brennpunkte hat der Quotient einen Pol erster Ordnung, und er ist reell auf dem Rande; in der Z-Ebene hat er folglich an dem entsprechenden Punkte P einen Pol erster Ordnung, ebenso aber auch an dem konjugiert imaginären Punkte P_1 der Halbebene $Y < 0$. Man kommt so zu dem Schluß, daß die Funktionen

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta_s}{Z - P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z - P_{s1}} \right), \quad \frac{V_{32}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta'_s}{Z - P_s} + \frac{\beta'_{s1}}{Z - P_{s1}} \right),$$

$$\frac{V_{41}}{V_{21}} - \sum_s \left(\frac{\beta''_s}{Z - P_s} + \frac{\beta''_{s1}}{Z - P_{s1}} + \frac{\gamma_s}{(Z - P_s)^2} + \frac{\gamma_{s1}}{(Z - P_{s1})^2} \right), \tag{32}$$

wo sich die Summen über alle im Innern des Polygons liegenden Brennpunkte der begrenzenden Parabeln erstrecken, im Innern der oberen Halbebene keine Singularität mehr besitzen; aber auch in der unteren Halbebene ($Y < 0$) verhalten sie sich überall regulär; nur auf der reellen Axe liegen die singulären Stellen, die den Ecken des Polygons entsprechen.

§ 5. Aufstellung der Differentialgleichung.

Die in der Differentialgleichung (15) auftretenden Koeffizienten P und Q sind durch vorstehende Untersuchungen bis auf Konstante bestimmt, denn andere als die in den §§ 2 und 4 besprochenen singulären Punkte können nicht vorkommen. Bis auf stets konvergente Potenzreihen setzen sich also die Funktionen P, Q aus den Summen zusammen, die für die Quotienten $V_{31} : V_{21}$, $V_{32} : V_{21}$ und $V_{41} : V_{21}$ in den Gleichungen (22a) und (32) aufgestellt wurden.

Damit kein singulärer Punkt im Unendlichen auftritt, muß die lineare homogene Differentialgleichung (15) zu der sogenannten Fuchsschen Klasse gehören, d. h. die betreffenden Potenzreihen müssen sich auf Null reduzieren. Wegen der Identitäten

$$\frac{dV_{21}}{dZ} = V_{31}, \quad \frac{dV_{31}}{dZ} = V_{41} + V_{32}$$

genügen die oben eingeführten Konstanten α, β, β', β'' und γ gewissen leicht aufzustellenden Bedingungen; die vollständige Aufstellung derselben würde die Entwicklung des Quadrates des Quotienten $V_{31} : V_{21}$ in Partialbrüche verlangen. Schließlich wird somit das Problem der Abbildung des Parabelpolygons der z-Ebene auf die Halbebene $Y > 0$ der Z-Ebene durch die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$z''' + Pz'' + Qz' = 0 \tag{33}$$

vermittelt, worin

$$P = -\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\sum_{s=1}^{n}\left(1-\frac{\lambda_s}{\pi}\right)\frac{1}{Z-A_s} - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\beta_s}{Z-P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z-P_{s1}}\right)$$

$$Q = \frac{5}{9}\left(\frac{V_{31}}{V_{21}}\right)^2 - \frac{1}{3}\frac{V_{32}+V_{41}}{V_{21}} = \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{2\lambda_s}{\pi}-1\right)\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{(Z-A_s)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{a_s}{Z-A_s}\right] + \frac{5}{9}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\beta_s}{Z-P_s} + \frac{\beta_{s1}}{Z-P_{s1}}\right)^2 - \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\delta_s}{Z-P_s}\right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{s1}}{Z-P_{s1}} + \frac{\gamma_s}{(Z-P_s)^2} + \frac{\gamma_{s1}}{(Z-P_{s1})^2}\right]. \tag{34}$$

Hierbei haben die Konstanten β, γ, P die frühere Bedeutung, und es ist $\delta_s = \beta_s' + \beta_s''$, $\delta_{s1} = \beta_{s1}' + \beta_{s1}''$ gesetzt; mit A_s sind die reellen Punkte der X-Axe bezeichnet, welche den n Ecken des Parabelpolygons entsprechen sollen, a_s sind zugehörige reelle Konstanten, λ_s sind die Winkel des Polygons an diesen Ecken. Die Konstanten β, γ, δ sind nur für diejenigen Werte des Index s von Null verschieden, für welche der dem Punkte P_s entsprechende Parabelbrennpunkt im Innern des gegebenen Polygons liegt.

Die Punkte P sind zwar singuläre Punkte der Differentialgleichung (33), aber nicht singuläre Punkte der Abbildung. Für jeden solchen Punkt muß also eine Wurzel der zugehörigen determinierenden Fundamentalgleichung gleich Null sein; da in (33) das Glied mit z' fehlt, ist diese Bedingung von selbst erfüllt. Es muß ferner die analytische Fortsetzung des so zu einem Punkte P gehörigen eindeutigen Fundamentalintegrals übergehen in das zu einem anderen Punkte P in gleicher Weise gehörige eindeutige Fundamentalintegral.

Als ein erstes Integral der Differentialgleichung (33) kann die zu (27) analoge Gleichung

$$\frac{V_{31}}{V_{21}} = 3\frac{z''}{z'} - \frac{3}{2}\frac{z'}{z-C} \tag{35}$$

betrachtet werden, in welcher C eine Integrationskonstante bedeutet; in der Tat ergibt sich durch Differentiation und Eli-

mination von C wieder die Gleichung (15) bzw. (21). Die linke Seite ist dabei durch die in (34) angegebene Funktion $-P$ von Z zu ersetzen.

§ 6. Beispiele.

Es handle sich erstens um die Abbildung des Innern einer einzelnen Parabel. Dieselbe läßt sich auf eine Gleichung von der Form[1])

$$\frac{dz}{\sqrt{z-p}} = C\frac{dZ}{\sqrt{1+Z^2}}$$

zurückführen, wo p den Brennpunkt der Parabel bezeichnet, welchem der Punkt $Z=i$ entsprechen soll, und C eine Konstante bedeutet. Also:

$$z' = C\sqrt{\frac{z-p}{1+Z^2}},\quad z'' = \tfrac{1}{2}C\frac{z'}{\sqrt{z-p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+Z^2}} - C\frac{Z\sqrt{z-p}}{(1+Z^2)^{3/2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}C^2\frac{1}{1+Z^2} - \frac{Z\cdot z'}{1+Z^2},$$

$$z''' = -\frac{C^2 Z}{(1+Z^2)^2} - \frac{z'}{1+Z^2} - \frac{Zz''}{1+Z^2} + 2\frac{Z^2\cdot z'}{(1+Z^2)^2}$$

$$= -\frac{2\cdot Z}{1+Z^2}\left(z'' + \frac{Zz'}{1+Z^2}\right) - \frac{z'}{1+Z^2} - \frac{z''Z}{1+Z^2} + \frac{2Z^2 z'}{(1+Z^2)^2}.$$

In der Tat besteht also die lineare Gleichung dritter Ordnung

$$z''' + 3\frac{Z}{1+Z^2}z'' + \frac{1}{1+Z^2}z' = 0,$$

wie es nach § 5 sein soll. Hier ist

$$\frac{\beta_1}{Z-P_1} + \frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}} = -\frac{3Z}{1+Z^2},$$

$$P_1 = -P_{11} = i,\quad \beta_1 = \beta_{11} = -\tfrac{3}{2},$$

---

[1]) Vgl. meine Abhandlung: Die Abbildung der Halbebene auf ein Polygon, das von Bögen konfokaler Kegelschnitte begrenzt wird, Bd. XXV dieser Sitzungsberichte, 1895, p. 219 ff.

$$\frac{5}{9}\left(\frac{\beta_1}{Z-P_1}+\frac{\beta_{11}}{Z-P_{11}}\right)^2 4-\frac{1}{3}\left(\frac{\delta_1}{Z-P_1}+\frac{\delta_{11}}{Z-P_{11}}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma_1}{(Z-P_1)^2}+\frac{\gamma_{11}}{(Z-P_{11})^2}\right)=\frac{1}{1+Z^2},$$

also: $$\gamma_1=\gamma_{11}=\tfrac{5}{4},\quad \delta_1=-\delta_{11}=i\tfrac{9}{2}.$$

Die Konstanten werden hiermit durch das Verhalten im Unendlichen bestimmt, da sich das Innere der Parabel ins Unendliche erstreckt, was bei den oben behandelten Parabelpolygonen nicht vorkommt.

Es handle sich zweitens um ein Parabelpolygon, in dessen Innern sich kein Brennpunkt der begrenzenden Parabeln befindet. Dann sind alle Konstanten β, γ und δ in den Formeln (34) gleich Null.

Ein solches Polygon entsteht aus einem geradlinigen Polygon der ζ-Ebene durch die Abbildung[1])

(36) $$z=\zeta^2.$$

Nach dem Christoffelschen Resultate ist dann

$$\zeta'=C\cdot\prod_{s=1}^{n}(Z-A_s)^{\frac{\lambda_s}{\pi}-1},$$

wo C eine Konstante bedeutet; und

$$\frac{\zeta''}{\zeta'}=\sum_s\left(\frac{\lambda_s}{\pi}-1\right)\frac{1}{Z-A_s}=R$$

ist reell auf dem Rande (d. h. für $Y=0$, $Z=X$).

Hier wird:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}+\frac{\zeta''}{\zeta'}=\frac{z''}{z'}$$

$$\frac{\zeta''}{\zeta}-\frac{\zeta'^2}{\zeta^2}=\frac{z'''}{z'}-\left(\frac{z''}{z'}\right)^2-R'$$

oder:

---

[1]) Vgl. z. B. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, Leipzig 1882, S. 122 ff.

$$\frac{\zeta''}{\zeta'}\left(\frac{z''}{z'}-R\right)-\left(\frac{z''}{z'}-R\right)^2=\frac{z'''}{z'}-\left(\frac{z''}{z'}\right)^2-R'$$

und schließlich:

$$z'''-3Rz''+(2R^2-R)z'=0, \tag{37}$$

in Übereinstimmung mit den obigen Gleichungen (33) und (34), wie man mittelst der Identität

$$2\left(\frac{\lambda}{\pi}-1\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\pi}-1\right)=\left(\frac{\lambda}{\pi}-1\right)\left(2\frac{\lambda}{\pi}-1\right)$$

leicht bestätigt. Die determinierende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung (37) für den singulären Punkt A lautet:

$$\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)+3\varrho(\varrho-1)\left(1-\frac{\lambda}{\pi}\right)+\varrho\left(\frac{\lambda}{\pi}-1\right)\left(2\frac{\lambda}{\pi}-1\right)=0.$$

Sie hat die Wurzeln

$$\varrho=\frac{\lambda}{\pi},\quad \varrho=2\frac{\lambda}{\pi}\ \text{und}\ \varrho=0,$$

was mit der Relation (36) in Übereinstimmung ist.

Das Reichenhaller Einsturzbeben vom 19. November 1910.

Von H. Gießberger.

Mit einer Kartenskizze und einem Anhang: Literatur zur Erdbebenkunde von Bayern.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 4. Mai 1918.

I. Frühere Erdbeben in und um Reichenhall.

Am 19. November 1910 bebte in Reichenhall um 12 Uhr 20 Minuten mittags die Erde. Es war nicht das erstemal, daß der Boden der seit alters berühmten Salzstätte in Schwingungen geriet. Schon aus ziemlich frühen Zeiten besitzen wir Nachrichten über seismische Vorkommnisse in dieser Gegend. Wir wollen sie kurz zusammenstellen.

1389.

„Erdbeben in Reichenhall.“ [1])

1390.

„1390 beängstigte in der Nacht vom 16. Oktober ein Erdbeben die Einwohner von Reichenhall und Berchtesgaden.“ [2])

„Am 31. Oktober abends 7 Uhr des Jahres 1390 ein Erdbeben.“ [3])

„Erdbeben in Reichenhall am 17. November 1390.“ [4])

---

[1]) H. Hermann, Topograph. Gesch. d. Stadt Reichenhall und ihrer Umgebung (Oberb. Arch. f. vaterl. Gesch. 19, 101, München 1858—1860). — [2]) J. E. v. Koch Sternfeld, Gesch. d. Fürstenthums Berchtesgaden und seiner Salzwerke 2, 36, München 1815. — [3]) Aus der „Reichenhaller Chronik“, mitget. v. Benefiziat J. Bauer in Reichenhall. — [4]) H. Hermann, a. a. O.

„1390 wurde die Gegend von einem Erdbeben heimgesucht.“ [1])

„1390 fand in Reichenhall ein Erdbeben statt.“ [2])

1415.

„Am 10. Juni 1415 Erdbeben in Reichenhall.“ [3])

1667.

„Am 30. Juni zwei leichte Erdstöße zu Salzburg und Reichenhall.“ [4])

1821.

„Am 23. Dezember spürte man mehrere Erdstöße zu Reichenhall.“ [5]) Dieses Beben fand um 1 Uhr nach Mitternacht statt. Die wiederholten Stöße waren so heftig, daß sich viele Leute, nur notdürftig bekleidet, auf die Straße flüchteten (Reichenhaller Chronik).

1834.

„Erderschütterungen wurden häufig beobachtet, so am 28. Februar in Reichenhall.“ [6])

„28. Februar 1834 Erdstöße zu Reichenhall.“ [7])

1843.

„1843, 29 juillet, tremblement à Reichenhall en Bavière (Quételet, Annales de l'Obs. de Bruxelles 4, 230).“ [8])

---

[1]) E. Heß, Reichenhall mit seiner Saline, seinen Bädern und Umgebungen. Reichenhall 1856, 12. — [2]) B. M. Lersch, Hydrophysik, Berlin 1865, 154. — W. Götz, Geogr.-histor. Handb. v. Bayern 1, 232, München 1895. — [3]) H. Hermann, a, a. O. — [4]) J. Reindl, Ergänzungen und Nachträge zu v. Gümbels Erdbebenkatalog (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 35, 41, 1905) Reindl verweist auf eine „Chronik von Reichenhall.“ — [5]) F. Schnurrer, Chronik der Seuchen in Verbindung mit den gleichzeitigen Vorgängen in der phys. Welt und in der Gesch. d. Menschen 2, 586, Tübingen 1825. — [6]) G. Lammert, Volksmedizin und medizin. Aberglaube in Bayern. Würzburg 1869, 70. — [7]) Ex donat. Molliana (Kollektaneenheft des bekannten Frhrn. v. Moll), Cod. germ. 6116, Moll. 301 d. K. Hof- und Staatsbibl. in München. Über Karl Marie Ehrenbert Freiherrn v. Moll vgl. die Würdigung v. Gümbels in der Allgem. Deutschen Biographie 22, 111, 1885 und die dort angeg. Lit. — [8]) A. Perrey,

1844.

Am 6. Januar 1844 früh 6 Uhr wurde eine bedeutende Erderschütterung, welche aus Südwesten kam, wahrgenommen (Reichenhaller Chronik).

Zwischen 1847 und 1860.

„Durch Erdbeben wurden Reichenhalls Bewohner in den Jahren 1389, 1390 und 1415 erschreckt. Wahrscheinlich hatten diese Erdbeben dieselbe für Reichenhall gar nicht gefährliche Ursache wie die seit elf Jahren mehrmals daselbst vorgekommenen einzelnen Erdstöße.“ [1])

Nach der „Reichenhaller Chronik“ wurde am 27. Juni 1851 früh $6^1/_2$ Uhr eine so heftige Erschütterung gespürt, daß „Steine“ von den Dächern fielen.

1876.

„Am 7. Mai abends 8,30 U. starkes Beben in Reichenhall.“ [2])

1896.

„Von Reichenhall wird gemeldet, daß am 15. September Früh 7 Uhr einige 3—4 Sekunden andauernde, senkrecht gerichtete Erdstöße von solcher Stärke gespürt wurden, daß die Schläfer aufgeweckt wurden.“ [3])

1904.

„10. März Nachts 10^h 5^m trafen Erdbebenstöße Partenkirchen, Rosenheim und Reichenhall.“

„30. Mai. Von den registrierenden Instrumenten des Bogenhauser Observatoriums wurde abends 10^h 12^m ein schwaches

---

Mémoire sur les tremblements de terre dans le bassin du Danube (Annales des sciences physiques et naturelles, d'agriculture et d'industrie 9, 411, 1846).

[1]) H. Hermann, a. a. O., München 1858—1860. Diese Beben fallen vermutlich zwischen die Jahre 1847 und 1858 bzw. 1849 und 1860. — [2]) C. W. v. Gümbel, Das Erdbeben vom 22. Febr. 1889 in der Umgegend von Neuburg a. D. (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 19, 102, 1889). — [3]) C. W. v. Gümbel, Über die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 28, 7, 1898).

Beben aufgezeichnet, jedenfalls von einem größeren Einsturzbeben aus der Gegend von Reichenhall herstammend."

„Erdstöße wurden am 8. Dezember in Reichenhall, Berchtesgaden und Marquartstein verspürt." [1])

1906.

„13. Juni. 8 Uhr 55 Min. Erdbeben in Bad Reichenhall, obere Stadt, bei St. Zeno, Stärke III bis IV. In Hintersee wurde gleichzeitig aus einer Quelle ein Wasserstrahl emporgeschleudert, aber keine Erschütterung bemerkt. Negative Nachrichten liegen vor aus: Reichenhall, untere Stadt, Traunstein, Siegsdorf, Berchtesgaden, Stadt und Bergwerk. Dagegen war im Salzbergwerk am 12. Juni morgens 3 Uhr gänzlich unerwartet ein sehr bedeutender Sinkwerksniederbruch erfolgt, bei dem die Mitwirkung eines Erdbebens nicht ganz ausgeschlossen erscheint. Das zuerst erwähnte Beben wurde nicht nur in München (7 Uhr 54 Min. 18 Sek.), sondern auch in Göttingen registriert, obgleich es nur ganz lokalen Charakter hatte." [2])

1907.

„13. Mai früh 3^{40} in Bad Reichenhall dumpfer Stoß mit ziemlich starker Erschütterung von kürzester Dauer." [3])

1910.

Das Erdbeben im Mieminger Gebirge der Nordtiroler Kalkalpen vom 13. Juli 1910, 9 Uhr 33 Min. vormittags, das in ganz Südbayern gefühlt wurde, ist im Stärkegrad 4 der zwölfteiligen Intensitätsskala von Mercalli-Sieberg auch in Bad Reichenhall wahrgenommen worden. [4])

Das Erdbeben vom 19. November 1910, das die Veranlassung zu vorliegender Abhandlung war und im 6. Abschnitt eingehender untersucht werden soll.

---

[1]) J. Reindl, a. a. O., S. 65, 66 und 68. — [2]) J. B. Messerschmitt, Die Erdbeben in Bayern 1905 bis 1907. „Die Erdbebenwarte" 6, 95, 1906/07. — [3]) Mitget. v. Rechtspraktikant C. Hauch in Reichenhall am 14. 5. 1907. Dieses Beben wurde vom Seismographen in München nicht aufgezeichnet. — [4]) Nach dem amtlichen Beobachtungsmaterial der K. Erdbebenwarte München.

Der Vollständigkeit wegen fügen wir noch die nach 1910 in Reichenhall und Umgebung gefühlten Erdbeben an.[1])

1911.

Zunächst ist das mitteleuropäische Beben vom 16. November 1911 mit dem Herde in der Rauhen Alb zu erwähnen. Die wesentlichen Wahrnehmungen in Reichenhall waren folgende: 3 Stöße, von denen der dritte schwächer war. Fußböden und Zimmerwände zitterten, Kästen und Bilder wankten, Wandgeschirr klapperte, Türen krachten, Vorhänge bewegten sich, Hängelampen schwangen hin und her, Uhren blieben stehen. Man hörte unterirdisches Geräusch, dem Schnarchen ähnlich. (Nach den amtl. Erhebungen der K. Erdbebenwarte in München.)

1917.

Am 10. November 1917 wurde in Weißbach, Inzell und Karlstein nachts 11 Uhr 45 Min. ein Erdstoß gefühlt. (Nach den amtl. Erhebungen der K. Erdbebenwarte München.)[2])

---

[1]) Das Beben vom 20. Juli 1913, das in einem großen Teile Bayerns um 1 Uhr 7 Min. nachm. gefühlt wurde, ist allem Anscheine nach in Reichenhall und Umgebung nicht mehr wahrgenommen worden. Trotz zahlreicher in das Gebiet der Stadt entsandter Fragebogen kam kein einziger mit bejahender Antwort zurück. In Traunstein wurde die Erschütterung von einigen wenigen noch verspürt. Zwischen Traunstein und Reichenhall jedoch scheinen die Bodenschwingungen die Grenze ihrer Fühlbarkeit erreicht zu haben. (Nach den amtlichen Erhebungen der K. Erdbebenwarte München.)

[2]) In das Jahr 1917 fielen auch einige Erschütterungen Reichenhalls und seiner Umgebung, die aber in Wirklichkeit nichts mit einem Erdbeben zu tun hatten.

Die Ursache waren in einem Falle Explosionen von Munitionslagern in Wöllersdorf bei Wien am 17. Juni 1917 (1^{35}, 1^{38} und 2^{00} vorm.). Die dadurch hervorgerufenen mechanischen Wirkungen des Schalls wurden übrigens im ganzen südostbayerischen Grenzgebiet bis zum Bayer. Wald verspürt. (Nach den amtl. Erhebungen der K. Erdbebenwarte München. — Vgl. a. „Reichenhaller Grenzbote" Nr. 138 vom 19. Juni 1917.)

In einem andern Falle flog das Mischwerk einer Pulverstampfe bei Salzburg am 7. November 1917 früh 4^{45} in die Luft. Das Rollen, das im Zusammenhange damit in Piding und Marzoll wahrgenommen wurde,

Es ist nicht anzunehmen, daß die soeben angeführten Erschütterungen die einzigen gewesen sind, die im Laufe der Jahrhunderte die Reichenhaller Lande beunruhigten. Die eine oder die andere schwächere Bodenerzitterung dürfte der Bevölkerung entgangen oder ihres geringen Stärkegrades wegen einer Aufzeichnung nicht für würdig befunden worden sein. Noch andere verspürte seismische Bewegungen wurden möglicherweise verbucht; ihre Aufzeichnung blieb aber, weil im Verborgenen schlummernd, der wissenschaftlichen Verwertung bis jetzt vielleicht unzugänglich. In die Reihe der durch Schriftstellen für Reichenhall nicht belegbaren Krustenschwankungen dürfen wir wohl ohne Bedenken auch einige derjenigen heftigeren Bebenerscheinungen stellen, die uns aus der unmittelbaren Nachbarschaft des Ortes gemeldet werden, oder die infolge ihrer Stärke den ganzen Nordfuß der Alpen in größerem oder geringerem Maße in Mitleidenschaft gezogen haben.

Im Zusammenhange mit dem eben Gesagten wäre etwa zu erinnern:

1. an das große Erdbeben des Jahres 1117, das sich besonders über Süddeutschland, die Alpen und Oberitalien verbreitete und vielfach, wie z. B. in Bamberg,[1]) Zerstörungen im Gefolge hatte. Eine gründliche Untersuchung der geschichtlichen Quellen dieses Naturereignisses verdanken wir J. Zeller.[2]) Er kannte jedoch anscheinend das Chronicon Urspergensis ad annum 1117, aus dem J. E. v. Koch Sternfeld eine auf Berchtesgaden bezügliche Bebennachricht schöpfte,[3]) nicht. Sie lautet: „Vom 3. Jäner Nachts (1117) bis zum 4. Abends erbebte die Erde in heftigen Stößen, daß die Gebirge

war so stark, daß die Bewohner teilweise aus dem Schlafe geweckt wurden. (Nach den amtl. Erhebungen der K. Erdbebenwarte München. — Vgl. a. „Reichenhaller Grenzbote“ Nr. 258 vom 9. Nov. 17 und Nr. 263 vom 15. Nov. 17.)

[1]) Vgl. H. Gießberger, Beiträge zur Erdbebenkunde von Oberfranken. „Heimatbilder aus Oberfranken“ 4, 87, 1916. — [2]) Das Erdbeben vom 3. Januar 1117 (S.-A. a. d. Württemberg. Vierteljahrsheften für Landesgeschichte. N. F. 22, 1913). — [3]) Gesch. d. Fürstenthums Berchtesgaden und seiner Salzwerke 1, 41, Salzburg 1815.

erzitterten, Felsen donnernd in die Thäler stürzten und die Wände der Bergseen brachen.“ [1]) Es ist demnach wohl nicht zu gewagt, wenn wir annehmen, daß das fragliche Erdbeben auch im Raume von Reichenhall wahrgenommen wurde. Noch ein anderer zuverlässiger Forscher, der oben bereits erwähnte Frhr. v. Moll, hinterließ eine Zeller ebenfalls unbekannt gebliebene auf Berchtesgaden Bezug nehmende Bebenmeldung aus dem Jahre 1117.[2]) „Heftige Erdbeben in Berchtesgaden und sonst in Deutschland.“ Es ist wahrscheinlich, daß dieser ohne nähere Tages- und Monatsangabe gemachte Bebenvermerk sich auf die Erschütterung vom 3. Januar bezieht.

2. an die kräftigen Bodenschwankungen von 1183 und 1201 im Berchtesgadener Gebiet. Wir besitzen darüber folgende Meldungen: „Gerhard, 7. Propst, Jahr 1201. Er wurde aus einem andern Chorstifte nach Berchtesgaden gewählt; verließ aber in demselben Jahre, das wie jenes von 1183 durch gewaltige Erdbeben bezeichnet wurde, die Propstey wieder.“ [3]) „3. bis 4. Januar 1183 heftige Erdbeben in Berchtesgaden.“ [4]) „1201 heftige Erdbeben in Berchtesgaden und sonst in Deutschland.“ [5]) Was das Jahr 1183 betrifft, so bestätigen zeitgenössische Quellen, wie die Annales S. Stephani Frisingenses[6]) und die Annales Hermanni Abbatis Altahensis[7]) das Auftreten von Bodenbewegungen im genannten Jahre, führen aber im Gegensatz zu Moll als Tag des Ereignisses den 2. Mai an. Bezüglich des Jahres 1201 ziehen wir als Belege an: die erwähnten Altaicher Jahrbücher,[8]) die Annales St. Rudberti Salisburgenses[9]) und das Chronicon Generale Joannis Staindelii Presbyteri Pata-

[1]) Vgl. a. Frz. Mayer, Geologisch-mineralogische Studien aus dem Berchtesgadener Land (Geognost. Jahreshefte 25, 1912, 147), wo eine einschlägige Stelle aus dem „Libellus vetustissimus perthersgadensis saeculi XII“ nach M. Schmidhammer (Die Gründung des Stiftes Berchtesgaden. Berchtesgaden 1898, 20) angeführt ist. — [2]) Ex donat. Molliana, a. a. O. — [3]) J. E. v. Koch Sternfeld, a. a. O., S. 89. — [4]) Ex donat. Molliana, a. a. O. — [5]) Ebenda. — [6]) G. H. Pertz, Monum. Germ. hist. Script. 13, 54. Hannover 1881. — [7]) Rerum Boicarum Scriptores 1, 663, Augsburg 1763. — [8]) A. a. O., S. 665. — [9]) G. H. Pertz, Mon. Germ. hist. Script. 9, 779. Hannover 1851.

vensis.[1]) Vorausgesetzt, daß die Erschütterungen in Berchtesgaden wirklich so kräftig waren, wie unsere Quellenschriften aussagen, dürfte Reichenhall von den Bodenschwingungen nicht unberührt geblieben sein.[2])

3. an die bedeutenden Krustenbewegungen des Jahres 1198 in Bayern und im Salzburgischen, die an Reichenhall vermutlich nicht spurlos vorübergegangen sind. Wir verweisen zur Bekräftigung des Gesagten auf J. Rasch,[3]) C. Lycosthenes,[4]) Terra tremens[5]) und F. Schnurrer.[6])

4. an die gewaltigen Erschütterungen von 1348 in Oberdeutschland und angrenzenden Gebieten. Wir berufen uns auf S. Günther und J. Reindl[7]) und eine Bemerkung J. E. v. Koch Sternfelds in seiner schon wiederholt genannten „Geschichte des Fürstenthums Berchtesgaden."[8])

Wenn nun auch, wie bereits andeutungsweise vorausgeschickt wurde, bezüglich der soeben unter Ziffer 1 bis 4 namhaft gemachten Beben eine ausdrückliche Erwähnung Reichenhalls bis jetzt nirgends festgestellt werden konnte, so ist doch nach Lage der Dinge mehr als wahrscheinlich, daß die in Frage kommenden seismischen Vorgänge die genannte Örtlichkeit jeweils in Mitleidenschaft gezogen haben. Legen wir den

---

[1]) Rerum Boicarum Script. 1, 499, Augsburg 1763. — [2]) Das Beben von 1201 hatte übrigens ein ausgedehntes Schüttergebiet. J. Schorn (Die Erdbeben von Tirol und Vorarlberg. Ztschr. d. Ferdinandeums, 3. F., 46. H., 110. S.) schreibt darüber: „Das am 4. Mai 1201 von Obersteiermark und dem angrenzenden Salzburg aus über einen großen Teil Österreichs verbreitete Erdbeben dürfte nach Stärke seiner Wirkung sicher das östliche Tirol berührt haben, wenn auch sein Erschütterungsgebiet mehr nach Westen, Bayern, und Norden, Böhmen, Polen, sich erstreckt hat." — [3]) Erdbidem Chronic nach Art eines Calenders. Wien 1591. Ohne Seitenzahlen. — [4]) Prodigiorum ac ostentorum Chronicon. Basel 1557, 427. Allerdings oft ziemlich unkritisch. — [5]) Die zitterend- oder bebende Erde von M. P. S. A. C. Nürnberg 1670. Ohne Seitenzahlen. Gibt als Quellen f. d. fragl. Jahr „Herolds Wunderbuch" und „Sachsen Keyser Chron. 4 Th." an. — [6]) Chronik der Seuchen usw. 1, 261. Stützt sich auf „Aventin. Chron. p. 459." — [7]) Seismolog. Untersuchungen. 1. Die beiden großen Erdbeben des 14. Jahrh. (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 33, 637, 1904). — [8]) A. a. O., 2, 18, München 1815.

Nachdruck nicht so sehr auf den Ort Reichenhall als vielmehr auf seine Umgebung, so dürfen wir, auch ohne daß wir auf die eingangs mitgeteilten und durch Schriftstellen bezeugten Bebenereignisse zurückzugreifen brauchen, die Behauptung aufstellen, daß die Lande um den alten Salzort nie völlig gegen Bodenerschütterungen gefeit waren. Wir wissen aber, daß Reichenhall erwähntermaßen selber öfters Erdschwankungen unterworfen war und können somit den Satz aussprechen: Die Gegend von Reichenhall gehört zu denjenigen Gebieten Bayerns, in denen sich die seismischen Kräfte dann und wann besonders fühlbar machen.

Um uns über die Art dieser verborgenen Gewalten klar zu werden, müssen wir ihre Entstehung und Wirkungsweise näher zu bestimmen versuchen. Diese Aufgabe können wir aber nur dann lösen, wenn wir uns zunächst mit den Grundzügen im geologischen Aufbau der Reichenhaller Landschaft näher befassen.

2. Grundzüge der geognostischen Verhältnisse.

Das Gestein unseres Gebietes gehört größtenteils der Triasgruppe an, deren Glieder die Namen Buntsandstein, Muschelkalk und Keuper führen. Die unterste und älteste Stufe des Buntsandsteins und damit der ostalpinen Trias überhaupt bildet der nach dem Salzachorte Werfen benannte sandig-glimmerige, rote oder graue Tonschiefer, der reichlich von mehr oder minder mächtigen Steinsalznestern und Gipslinsen erfüllt ist, während umfangreichere, zusammenhängende Steinsalzlager hinsichtlich ihres Vorkommens darin eine mehr untergeordnete Rolle spielen. Für solche in Gesellschaft von Steinsalz-, Gips- und Anhydritmassen auftretende Tone ist in den nordöstlichen Alpen die Bezeichnung Haselgebirge üblich geworden. Auch in der obersten Abteilung des Buntsandsteins, im Röth, finden sich häufig Gips- und Steinsalzmengen stockartig eingeschaltet.

Auf derartige oder ähnliche geognostische Verhältnisse gründet sich der Ruf vieler Salzorte, so der von Aussee, Ischl,

Hallstatt, Hallein und Berchtesgaden. „Auch im Becken von Reichenhall umschließt der Buntsandstein Niederlagen von Salz und die Natur hat selbst den Dienst des Bergmanns übernommen, indem sie aus der Tiefe das aufgelöste Salz gleich in Form von Solquellen zu Tage fördert.“ [1]) Ebensowenig fehlt es in der Umgebung Reichenhalls an Gipslagern, wie die Brüche bei Gmain, im Kirchholz und bei Jettenberg beweisen.[2]) Doch sind die Massen des Buntsandsteins in unserem Gebiete dem Auge fast durchweg entrückt und außer an den eben erwähnten Örtlichkeiten stehen nur noch an wenigen Stellen seine Schollen an.[3])

Über dem Buntsandstein, der sozusagen als Grundgebirge unserer Gegend betrachtet werden darf, erhebt sich der Alpenmuschelkalk, der namentlich im Nordwesten des Reichenhaller Bergkranzes, in der mächtigen Staufengruppe, zu herrschender Bedeutung gelangt ist. Seinen Aufschlüssen begegnet man ferner bei Schneizelreuth, von wo sie sich nordostwärts bis in die Talebene von Reichenhall erstrecken. Dort setzt dieser Kalk „die Felswand an dem Sudhaus, den Gruttenstein, Achselmannstein und das Felsriff gegen St. Zeno“ [4]) zusammen.

Die Muschelkalkschichten werden vom alpinen Keuper überlagert. Der untere Keuperkalk, auch Hallstätter oder Wettersteinkalk genannt, läßt sich am Hohenstaufen nachweisen, von wo er westwärts über den Falkenberg, Kienberg, Rauschberg weiterzieht. Der untere, jüngere Alpenmuschelkeuper tritt u. a. am Lattengebirge, „dem unerschöpflichen

---

[1]) C. W. v. Gümbel, Die geognost. Verhältnisse der bayer. Alpen und der Donau-Hochebene. (Bavaria 1, 18, 1860.) Auf seine Darstellung haben wir uns im folgenden geolog. Überblick vielfach gestützt. — Vgl. a. F. A. Fürer, Salzbergbau und Salinenkunde. Braunschweig 1900, 215 u. f. — [2]) Vgl. E. Heß, Reichenhall mit seiner Saline, seinen Bädern und Umgebungen. Reichenhall 1856, 98. — S. Goldschmidt, Der Kurort Bad Reichenhall und seine Umgebung. Wien und Leipzig 1892, 27. — W. Götz, Geogr.-histor. Handb. v. Bayern 1, 136, München 1895. — [3]) Vgl. C. W. v. Gümbel, a. a. O. und R. Lepsius, Geolog. Karte d. Deutschen Reichs, Blatt 27: München. — [4]) C. W. v. Gümbel, a. a. O., S. 20.

Salzborn des Reichenhaller Tals“,[1]) und am Südhang des Staufen auf. Ihm folgt der Hauptdolomit, dessen Vorkommen „am Fuß des Untersberges, des Lattengebirgs und rings um das Reutalpgebirg“ bekannt ist. „Westlich der Saalach und im Gebiet der Traun erhebt er sich zum dominierenden Gestein, welches von dem Fuß des Hohenstaufen und des Rauschenberges bis zu den Grenzbergen zieht und hier im Augenstein, im Sonntagshorn und Dürrnbachhorn zu kühn ausgezackten Felsspitzen ausläuft. Die Straße von Reichenhall nach Inzell ist ihrer großen Länge nach in dieses Gestein eingesprengt.“[2])

Die obersten Abteilungen des Alpenkeupers, oberer Muschelkeuper und Dachsteinkalk, setzen große Teile des Reiteralp- und Lattengebirges sowie des Untersberges zusammen.

Dieses nur in Umrissen entworfene Bild der geognostischen Verhältnisse Reichenhalls und seiner Umgebung dürfte vorerst für unsere Zwecke genügen. Wir wollen aber vorausschicken, daß wir später gezwungen sein werden, geologisch und geophysikalisch einige weitere Umstände näher ins Auge zu fassen.

3. Arten der in der Reichenhaller Gegend möglichen Beben.

Wir haben oben gehört, daß sich im Gebiete von Reichenhall im Laufe der Zeiten dann und wann Erderschütterungen haben verspüren lassen. Wenn wir bezüglich der Einordnung dieser Bodenschwankungen die von R. Hörnes in die Wissenschaft eingeführte und auch heute noch im großen und ganzen[3]) anerkannte Dreiteilung der Erdbeben zugrunde legen, so können

[1]) M. v. Chlingensperg, Die römisch. Brandgräber bei Reichenhall in Oberbayern. Braunschweig 1896, 2. — [2]) C. W. v. Gümbel, a. a. O., S. 28. — [3]) Über besondere Zwischen- oder Mischformen berichtet eingehend S. Günther in zwei Aufsätzen: „Pseudo- und kryptovulkanische Erdbeben“ (S.-A. a. d. „Scientia“ 14, 1913, N. XXX—4) und „Über die Notwendigkeit, Zwischenformen neben den bekannten drei Hauptformen der Erdbeben zu postulieren“ (S.-A. a. d. Verh. d. 19. deutschen Geographentages zu Straßburg i. Els. 1914). Vgl. a. W. Branca, Über die Bedeutung der magmat. Erdbeben gegenüber den tektonischen. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Preuß. Akad. d. Wiss. 28, 1917, 380—399.

wir von allem Anfang an die vulkanischen Beben aus dem Kreise unserer Betrachtung ausschließen, da der Vulkanismus in der fraglichen Landschaft zu den unbekannten Erscheinungen gehört.[1]) Es bleiben somit nur die tektonischen und die Einsturzbeben zu berücksichtigen.

Daß tektonische, auf Spannungserscheinungen und Spannungsausgleiche im Gebirgsbau zurückzuführende Erzitterungen des Bodens mitunter in Reichenhall wahrgenommen worden sein konnten, darf nicht in Abrede gestellt werden. Namentlich muß in diesem Zusammenhange an jene Erdzuckungen gedacht werden, die nicht bloß Reichenhall allein, sondern weite benachbarte Landgebiete zum Mitschwingen veranlaßt haben. Der Herd dieser Beben dürfte sich aber stets in bedeutenderer Entfernung von Reichenhall, wohl nie am genannten Orte selbst befunden haben — wenigstens ist bis jetzt für die gegenteilige Behauptung noch kein Nachweis erbracht worden, — wenn auch keineswegs damit gesagt werden soll, daß ein Dislokationsbeben mit dem Ursprungsorte im Reichenhaller Gebiet außerhalb des Bereiches der Möglichkeit stünde. Bis heute freilich konnte in diesem Teile des bayerischen Alpenraumes ein selbständiger seismischer Herd im Sinne der zuletzt bezeichneten Erdbebenart, wie gesagt, nicht nachgewiesen werden.

Anders hingegen verhält es sich bezüglich Reichenhalls mit der noch übrigen Klasse von Erdbebenerscheinungen, den sogenannten Einsturzbeben. Diese scheinen dort sehr heimisch zu sein. Darunter versteht man solche Krustenschwankungen, welche durch den Zusammenbruch unterirdischer Hohlräume veranlaßt werden. Sie sind häufig in höhlenreichen, mehr oder weniger verkarsteten Landstrichen, wie z. B. in Dalmatien, und vornehmlich dadurch gekennzeichnet, daß sich die seis-

[1]) Zwar sind nach A. Penck am Sillberg bei Berchtesgaden und unweit Golling Laven nachweisbar, doch ist dies für unsere Untersuchung belanglos. Vgl. A. Penck und E. Richter, Das Land Berchtesgaden (Ztschr. d. D. und Oe. A.-V. 16, 227, 1885). — Vgl. in diesem Zusammenhange auch Frz. Mayer, Geolog.-mineralog. Studien a. d. Berchtesgadener Land, a. a. O., S. 146 u. f.

mische Kraft meist mit einem heftigen Ruck oder Stoß erschöpft. Eine weitere Eigentümlichkeit ihres Auftretens liegt noch darin, daß die Wirkung, die sie ausüben, örtlich enge begrenzt ist.

Diese Einsturzbeben knüpfen ihr Vorkommen aber nicht nur an die Karstlandschaften schlechthin, sondern sie können sich auch in anderen der unterirdischen Auswaschung zugänglichen Gebieten vollziehen. Und hier betätigen sie sich mit Vorliebe in solchen Teilen der Erdrinde, die Steinsalz bergen. Gelangt das versitzende Tagewasser im Haselgebirge an ein Salznest, so wird dieses im Laufe der Zeit aufgelöst. Es entsteht allmählich ein Hohlraum, dessen Erweiterung Schritt hält mit der Menge der auslaugenden Flüssigkeit und des vorhandenen Salzstoffes. An die Stelle der ehemaligen Salzlinse oder des einstigen Salzstockes tritt nach beendigter Auslaugung durch das Wasser eine entsprechend geformte Höhle, wobei nicht zu vergessen ist, daß wohl selbst nach vollständiger Ausräumung der löslichen Bestandteile die abtragende Tätigkeit des Wassers nicht gänzlich ruht, sondern mit größerem oder geringerem Erfolg die Höhlenwandungen angreift und dort nach Maßgabe der vorliegenden Gesteinsverhältnisse an der Vergrößerung der Grotte mechanisch weiterschafft. Größe und Lage der Höhle sind meist entscheidend für einen Einsturz. Je umfangreicher nämlich der hohle Raum und je stärker die Pressung ist, desto leichter kann sich ein Einbruch vollziehen. Unter Umständen wird einmal der Augenblick kommen, wo das Deckengewölbe infolge zu schwach gewordener Stützen nicht mehr getragen werden kann und in die Tiefe geht. Ein solcher Vorgang bewirkt natürlich eine, wenn auch oft nur schwache Erschütterung der das Einsturzgebiet umgebenden Erdrindenstücke. Und diese Erschütterung fühlen wir Menschen, wenn sie stark genug war, als Erdstoß, als ein Einsturzbeben. Erfolgt der Zusammenbruch plötzlich, was in der Regel der Fall ist, so bewirkt er ein kurzes Beben; geht jedoch die Decke stückweise in zeitlichen Abständen in Trümmer, so ist es möglich, daß wiederholte Stöße wahrgenommen

werden. In beiden Fällen aber ist der erschütterte Krustenteil nur von geringer Ausdehnung, wenn auch nicht verschwiegen werden soll, daß namentlich in reinen Karstlandschaften ein plötzlicher Deckeneinsturz mitunter verheerende Wirkungen zur Folge haben kann.

4. Von den Reichenhaller Solquellen.

Es ist vielleicht nicht ganz ohne Belang, ein paar Worte darüber zu sagen, welch gewaltige Mengen von Baustoff das im Innern der Erdrinde verlaufende Wasser manchen Gebirgen zu entziehen imstande ist. Der Timavo im Görzer Karst z. B. bewirkt durch die unterirdischen Gerinne innerhalb seines Zuzugsgebietes, daß sich dort jedes Jahr Hohlräume bilden, die dem Inhalte eines Würfels von 43 m Kantenlänge gleichkommen.[1]) Die Pader entzieht ihrem Hinterlande jährlich eine so große Menge kohlensauren Kalks, daß man daraus einen Würfel von nahezu 93 Fuß Seite errichten könnte.[2]) Durch die Wiesent werden Jahr für Jahr der Fränkischen Alb Gesteinsteile im Gesamtbetrage von rund 43000 cbm entzogen, die einem Würfel von etwa 35 m Seitenlänge entsprechen.[3]) Der dem Gebirge zugefügte Massenverlust läßt sich folgendermaßen noch etwas deutlicher veranschaulichen: Die Wiesent führt der Rednitz jährlich eine Wassermenge von rund 523000000 cbm zu. Ein Kubikmeter enthält etwa 240,0 g gelöstes Kalkgestein. Im Jahre also nehmen die Wasser der Wiesent durchschnittlich 125000000 kg Magnesium- und Calciumcarbonat in gelöstem Zustande aus der Fränkischen Schweiz mit hinaus. Die Größe der verfrachteten Kalkmasse wird deutlich, wenn man bedenkt, daß man daraus einen Felsblock vom Umfange des bekannten Markgrafenschlosses in Erlangen errichten könnte.[4])

---

[1]) W. v. Knebel, Höhlenkunde. Braunschweig 1906, 28. — [2]) G. Bischof, Lehrb. d. chem. u. physikal. Geologie. Bonn 1, 25, 1847. — [3]) A. Neischl, Die Höhlen d. Fränk. Schweiz. Nürnberg 1904, 42. — [4]) Die angegebenen Zahlen verdanke ich Herrn Univ.-Prof. Dr. Lenk in Erlangen.

„Die Solquelle zu Artern führt jährlich etwa $1^1/_4$ Mill. Zentner Rohsalz der Unstrut zu und spült so in 1 Jahre eine Höhlung von 100 Kubikfuß aus. Der Bülow-Brunnen zu Neusalzwerk und die nahe Sole zu Salzuffeln schaffen sich jährlich den Raum eines Würfels von 92 Fuß Seite durch die Auflösung des Salzes.“ [1])

Auch das Gebirge um Reichenhall erleidet ständig Einbuße an Baustoff. Das beweisen unbestreitbar die dort dem Boden entströmenden Solquellen, deren Zuflüsse das von Steinsalzkörpern erfüllte Haselgebirge auf verborgenen Wegen durchziehen, um später mit Salzlösung beladen im Becken von Reichenhall zutagezutreten. Diese Quellen sind es, die dem oft schwer heimgesuchten Ort[2]) immer wieder die Kraft zu neuem Wachstum und zu neuer Blüte gaben und seinen heutigen Ruhm als Bade- und Kurort begründeten.[3]) Es dürfte sich in mehrfacher Hinsicht verlohnen, auf diese Lebensadern Reichenhalls näher einzugehen, zumal da wir durch das freundliche Entgegenkommen des Vorstandes des K. Salinenamts Reichenhall in der Lage sind, verbürgte Angaben zu machen.[4])

Reichenhall besitzt neunzehn Solquellen, neun fließende und zehn gestaute. Von den fließenden sind zwei siedewürdig und sieben nichtsiedewürdig.

Zu den siedewürdigen Quellen gehören die Edelquelle und die Karl Theodor-Quelle.

Die nichtsiedewürdigen Quellen heißen: Plattenfuß, Kläuselquelle, Gute Schachtquelle, Gutes Stockröhrl, Schlechtes Stockröhrl, Klammquelle und Stollenwässer.

Die gestauten Quellen im Reichenhaller Quellenbau sind folgende: Törringquelle, Josephquelle, Rechts- und Linksquellen, Quelle Nr. 3, Nr. 4, Nr. 5, Nr. 6, Nr. 7, Nr. 8 und Nr. 9.

---

[1]) B. M. Lersch, Hydrophysik. Berlin 1865, 115 u. f. — [2]) J. Osterhammer, Topographie und Geschichte d. Königl. Baier. Salinenstadt Reichenhall und deren Umgebung. Landshut 1825, 18 u. f. — [3]) Vgl. G. v. Liebig, Reichenhall, sein Klima und seine Heilmittel. Reichenhall 1889. — [4]) Es sei mir gestattet, Herrn K. Bergrat M. Fischer auch an diesem Orte wärmstens zu danken.

Über die jährliche Schüttung und den durchschnittlichen Salzgehalt der zur K. Saline gehörenden fließenden Quellen sowie über die in Tonnen ausgedrückte Menge des anfallenden Salzes und die mutmaßliche Größe des durch Auslaugung im Erdinnern entstehenden Hohlraumes möge nachstehende übersichtliche Zusammenfassung Auskunft erteilen. Die Aufstellung begreift die Jahre 1901 bis 1915.[1])

1. Die beiden siedewürdigen Quellen.

Jahr	Schüttung in Röhrl[2])	Salzgehalt in Prozenten	Anfallendes Salz in Tonnen	Mutmaßl. Größe des im Erdinnern entstand. Hohlraumes in Kubikmetern
1901	1523,3	23,63	8524,6	3374,8
1902	1607,8	23,99	9157,4	4162,5
1903	1607,3	24,16	9230,4	4195,6
1904	1536,8	23,95	8737,0	3971,4
1905	1779,3	24,29	10282,5	4673,9
1906	1812,9	24,13	10396,0	4725,5
1907	2031,7	23,76	11442,5	5201,1
1908	1708,3	23,49	9493,9	4315,4
1909	1399,8	23,63	7833,4	3560,6
1910	2324,6	23,35	12829,6	5831,6
1911	2039,0	21,20	10065,2	4575,1
1912	2115,2	22,49	11176,7	5080,3
1913	1459,5	23,90	8276,4	3762,0
1914	1693,9	23,98	9643,1	4383,2
1915	1491,1	23,86	8439,1	3836,0

[1]) Ich verweise bei dieser Gelegenheit auch auf die beachtenswerten Bemerkungen des K. Oberbergrats Frz. Mayer über die Solquellen von Bad Reichenhall in seinen „Geolog.-mineralog. Studien a. d. Berchtesgadener Lande“ (a. a. O., S. 154 u. f.). Der Verfasser kommt dort zu dem Schlusse, daß die Reichenhaller Solquellen „zum Teil juvenilen, zum Teil vadosen Ursprungs sind, wobei erstere (Karl Theodor- und Edelquelle) die letzten Reste postvulkanischer Erscheinungen darstellen, während die letzteren (die ärmeren Solquellen) der Auslaugung des Salzgebirgs ihr Dasein verdanken.“ — [2]) 1 Röhrl = 20 cbm in 24 Stunden.

2. Die sieben nichtsiedewürdigen Quellen.

Jahr	Schüttung in Röhrl	Salzgehalt in Prozenten	Anfallendes Salz in Tonnen	Mutmaßl. Größe des im Erdinnern entstand. Hohlraumes in Kubikmetern
1901	15848,0	4,42	14478,5	6581,1
1902	16452,8	4,69	17749,3	8067,9
1903	16244,2	4,46	14979,1	6808,7
1904	15770,3	4,26	13869,3	6304,2
1905	17193,4	5,07	18103,6	8228,9
1906	16570,4	5,37	18520,4	8418,2
1907	16540,3	5,21	17914,8	8143,1
1908	16600,9	4,28	14670,5	6668,4
1909	16302,3	4,03	13540,4	6154,7
1910	18666,9	4,95	19173,1	8715,0
1911	15563,8	3,79	12135,7	5516,2
1912	18534,6	5,19	19995,1	9088,7
1913	18081,7	5,48	20639,9	9381,8
1914	18878,3	5,95	23477,8	10671,7
1915	16965,9	5,19	18302,8	8319,5

Im Durchschnitt ergibt sich demnach bei einem spezifischen Gewicht von 2,2 für Salz ein Stoffverlust des Erdinnern von 4410 cbm + 7805 cbm = 12215 cbm im Jahr.

Dieser Betrag verhält sich zu der von der Wiesent z. B. dem Gebirge entzogenen Masse (43000 cbm) etwa wie 1 : 3,5. Unter Berücksichtigung der viel größeren Wassermenge dieses Flusses jedoch übertreffen die fraglichen Reichenhaller Solquellen hinsichtlich ihrer Menge an aufgelöster Substanz jene Wiesentmasse um ein beträchtliches. Sie entnehmen also ihrem Durchzugsgebiet verhältnismäßig mehr Stoff als die Wiesentwasser dem ihrigen, wobei immer im Auge zu behalten ist, daß es sich bei unserem Vergleich lediglich um die neun laufenden Reichenhaller Salzquellen handelt. Denken wir uns die von ihnen in einem Jahre dem Boden entnommene Zahl von Kubikmetern für die Zeit von Jahrhunderten entsprechend erhöht, so dürfen wir mit gutem Grunde annehmen, daß im

Gebiete von Reichenhall der Boden von Höhlengebilden der verschiedensten Größe ebensosehr durchsetzt ist wie in der Fränkischen Schweiz.[1]) Wir haben dort an der Saalach eine Landschaft vor uns, die, entsprechend den unterhöhlten Karstländern, unterirdischen Zusammenbrüchen ein geeignetes Feld bietet und infolgedessen dem Auftreten von Einsturzbeben besonders günstig ist.

5. Schlotten und Pingen in ursächlichem Zusammenhang mit Einsturzbeben.

Andere Erscheinungen in der Gegend von Reichenhall lassen den aufmerksamen Beobachter nicht nur schließen, sondern sogar erkennen, daß das Gebirge dort in seinem Innern bereits erhebliche Masseneinbußen erlitten hat. Es sind dies die sogenannten Pingen.[2]) Darunter versteht man meist trichterförmig gestaltete Einsenkungen im Boden von unterschiedlichem Durchmesser und wechselnder Tiefe. Sie sind namentlich jenen Landschaftsformen eigentümlich, die in höherem oder geringerem Grade verkarstet sind und im Zusammenhange damit einen höhlen- und klüftereichen Untergrund aufweisen. Sie finden sich auch in Bergwerksdistrikten und sind dort die Folge von zusammengebrochenen Stollen und Sinkwerken.[3])

Ihre natürliche, vom Menschen unbeeinflußte Entstehung führt man vielfach auf einen Einsturz zurück, der dadurch hervorgerufen wird, daß Wasser z. B. eine Kalkmasse auflöst und an die Stelle der ausgelaugten Gesteinsteile ein Hohlraum tritt, dessen Dach schließlich von seinen Stützen nicht mehr getragen werden kann und in sich zusammenstürzt.

---

[1]) Die Gegend Reichenhall-Berchtesgaden gehört ganz abgesehen von dem bisher Gesagten an und für sich schon zu den Höhlengebieten Bayerns. (Vgl. C. W. v. Gümbels Höhlenkarte von Bayern in den Veröffentlichungen der Münchener Ges. f. Anthropologie und Urgeschichte Bayerns 2, 4. H., 1879). — [2]) Manche Geologen verwenden diesen Ausdruck nur für trichterförmige Einbrüche in Bergwerksbetrieben. — [3]) Vgl. S. Günther, Handbuch d. Geophysik 1, 482, Stuttgart 1897, wo von den „Erdfällen oder Pingen, die man im Erzgebirge häufig antrifft", die Rede ist.

Solche Pingen treten ferner in Gips- und Salzgebirgen auf und hier ist die eben beschriebene Art der Bildung eine ganz allgemein verbreitete.[1]) „Mehrere seit Jahrhunderten bekannte Salzquellen sind am Ausgehenden von Salzstöcken. Neben dem Steinsalze findet sich mehr oder minder gesalzener Anhydrit und Salzthon, welche durch die Wasser allmählich ausgelaugt und fortgeführt werden; daher kommen die mächtigen Erdfälle, welche in Südwestdeutschland das Ausgehende des Muschelkalks begleiten, die Erdfälle, Schlotten und Seelöcher im Mansfeldischen.“[2]) Schlotten heißen die z. B. in einem Salz- oder Gipsgebiet auf die angedeutete Weise entstandenen unterirdischen Hohlräume.[3]) Es kommt nun oft vor, daß die Lage solcher Schlotten eine der Außenseite der Erdkruste ziemlich benachbarte ist und die sie von dieser noch trennende Gesteinsdecke allmählich zu schwach wird, den wirkenden Druck- und Zugkräften zu widerstehen. Die Decke zerbricht und reißt die möglicherweise darüber lagernde Verwitterungsschicht mit in die Tiefe, wo sich eine trichter-, manchmal auch kesselähnliche Einsackung bildet. Eine Pinge ist entstanden.[4]) Daß es dabei zu Erzitterungen des Bodens kommen muß, ist selbstverständlich.

In der Umgebung Reichenhalls sind sieben Pingen bekannt. Sie liegen in Gmain und im sogenannten Kirchholz, wo Gipsbrüche vorkommen und Salzlager vermutet werden. Ihre Durchmesser betragen oben am Rande 100, 80, 50, 40, 30, 25 und 20 m; die entsprechenden Tiefen belaufen sich auf 22, 20, 15, 10, 8, 8 und 5 m.[5]) Ihr Vorhandensein verdanken sie wie die

[1]) Vgl. W. v. Knebel, Höhlenkunde, Braunschweig 1906, 144. — [2]) F. v. Alberti, Halurgische Geologie, 1, 33, Stuttgart und Tübingen 1852. — [3]) „Eine Gipsschlotte ist beispielsweise die Barbarossa-Höhle im Kyffhäusergebirge (E. Haase, Die Erdrinde, Leipzig 1913, 80), die Krausgrotte bei Gams in Obersteiermark sowie die bekannte Marienglashöhle bei Reinhardsbrunn am Nordhang des Thüringer Waldes.“ (L. Lämmermayr, Die Höhle, Leipzig o. J., S. 25). — [4]) Vgl. K. F. E. v. Schafhäutl, Geognostische Untersuchungen des südbayerischen Alpengebirges, München 1851, 162 (Anhang). — [5]) Ich verdanke diese durch Schätzung gewonnenen Zahlen Herrn Bergrat M. Fischer.

in der Schönau südlich von Berchtesgaden und beim Forsthause Schappach an der Straße nach Ramsau gelegenen höchstwahrscheinlich dem Salzvorkommen in der betreffenden Gegend. M. v. Chlingensperg erwähnt,[1]) daß sich an den nördlichen Abstürzen des Klosterholzes und Kirchholzes alte Salzquellen befänden, die zwar jetzt verlassen seien, deren Betriebe aber „weit in die beurkundete Geschichte des Mittelalters hinabreichen." Er weist hin auf eine Urkunde vom Stift Nonnberg, von St. Zeno in den M. B.,[2]) im Chron. noviss. St. Petri usf. Dominic. codex und bemerkt dann wörtlich: „Im Hofe des Klosters St. Zeno, am Fuße des Kirchholzes, im Klosterholze, im Umfange einer Stunde von Reichenhall lassen sich die Spuren verfolgen." Auch S. Goldschmidt[3]) hebt die „uralten Salzquellen" in der Nähe des Kirchholzes hervor, zu deren Verteidigung und Schutz ein die Kirchholzhöhe krönender Ringwall gedient habe. Huber sagt in seiner Agrikultur-Statistik des landwirtschaftlichen Distrikts Reichenhall: „Man nimmt mit Wahrscheinlichkeit an, daß der Salzgebirgsstock unter der Anhöhe von Gmain, Höfen und Kirchholz liegt."[4]) E. Heß erwähnt neben den Trichtergruben im Kirchholz solche auf dem Streitbühl und gedenkt besonders einer „im Felde des früheren Reichenbachlehens", welche in den dreißiger Jahren erst plötzlich entstanden ist. Er fährt wörtlich fort: „Sie verraten die in der Tiefe befindlichen Salzlager, deren Auslaugung durch das als Sole zu Tage gehende Wasser den Einsturz ihrer Decken und damit die Entstehung jener Gruben veranlaßt hat."[5]) Heß gibt zwar nicht an, ob man bei der Entstehung des fraglichen Trichters eine Erschütterung des Bodens wahrgenommen hat; möglicherweise hängt aber dessen Geburt mit den früher bereits angeführten, am 28. Februar 1834 in Reichenhall gefühlten Erdstößen zusammen. Das Alter dieser Pinge wäre

[1]) Das Gräberfeld von Reichenhall in Oberbayern. Reichenhall 1890, 20. — [2]) Vermutlich Monumenta Boica. — [3]) Der Kurort Bad Reichenhall und seine Umgebung. Wien und Leipzig 1892, 32. — [4]) Bei E. Heß, Reichenhall mit seiner Saline, seinen Bädern und Umgebungen. Reichenhall 1856, 28 (Fußnote). — [5]) A. a. O., S. 97 u. f.

dann annähernd festzustellen, während wir bei den übrigen lediglich auf Vermutungen angewiesen sind.

Auch eine einschlägige Bemerkung C. W. v. Gümbels möge hier nicht unberücksichtigt bleiben. Er schreibt in seiner „Geologie von Bayern" (Kassel 1894, 212): „In den Werfener Schichten des Buntsandsteins stellen sich am Pechler zunächst bei Reichenhall ausgedehnte Gipsstöcke ein. Sie sind mit Steinsalzablagerungen vergesellschaftet. Damit stehen auch das Hervorbrechen hochedler Salzquellen bei Reichenhall und die tiefen kesselförmigen Einbrüche neben den über die Fläche von Groß-Gmain weiter fortziehenden Gipsvorkommnissen in unmittelbarem Zusammenhang."

Noch möchten wir darauf aufmerksam machen, daß sich solche auf ausgelaugte Salzlager zurückzuführende Erdfälle später manchmal mit Wasser füllen und dann kleine, stille „Seen" bilden, wie sie nach J. Walther[1]) am Harz und in Thüringen anzutreffen sind. Auf derartige Wasseransammlungen bezieht sich der oben gebrauchte Ausdruck „Seelöcher".[2])

Wir haben im Abschnitt 1 behauptet, daß das Reichenhaller Land zu denjenigen Strichen Bayerns zu zählen ist, deren Boden erdbebenverdächtig ist. Auf Grund unserer weiteren Betrachtungen können wir sagen, daß von den bekannten Bebenarten, soweit unser Untersuchungsgebiet in Frage kommt, nur mit Dislokations- oder mit Einsturzbeben zu rechnen ist. Nach Lage der geologischen und morphologischen, der hydrophysikalischen und hydrochemischen Verhältnisse des Reichenhaller Beckens dürfen wir sogar noch einen Schritt weiter gehen und die Vermutung aussprechen, daß an der erwähnten Örtlichkeit die Einsturzbeben die Regel, die Dislokations- oder tektonischen Beben dagegen die Ausnahme bilden.

---

[1]) Vorschule der Geologie. Jena 1910, 87 u. f. — Vgl. a. A. v. Lasaulx, Die Quellen. (Kenngotts Handwörterbuch der Mineralogie, Geologie und Paläontologie 3, 134). — [2]) G. H. Behrens beschreibt in seiner Hercynia curiosa (Nürnberg und Altdorf 1720, 84—101) eine Reihe solcher „wässeriger Erdfälle" aus der Harzgegend.

Daß wir mit unserer Annahme auf der richtigen Fährte sind, das beweisen Ansichten von wissenschaftlich gebildeten Männern, die als Kenner Reichenhalls und seiner Umgebung anerkannt sind und daher Glauben verdienen.

So schreibt H. Hermann in seiner grundlegenden topographischen Geschichte der Stadt Reichenhall: „Durch Erdbeben wurden Reichenhalls Bewohner in den Jahren 1389, am 17. November 1390 und am 10. Juni 1415 erschreckt. Wahrscheinlich hatten diese Erdbeben dieselbe für Reichenhall gar nicht gefährliche Ursache wie die seit elf Jahren mehrmals daselbst vorgekommenen einzelnen Erdstöße, nämlich das Einstürzen von ausgelaugten Salzhöhlen im Lattengebirge und Untersberg, woher sich auch die starken Einsenkungen an diesen Bergen erklären,[1]) welche sich bis gegen das Kirchholz in geringerer Größe, aber ziemlich regelmäßiger Trichterform erstrecken.“[2])

Hermann nimmt somit als Ursache der von ihm angeführten Reichenhaller Erdbeben Einsturzvorgänge an und stellt diese Erschütterungen wohl mit Recht in die Reihe der Einsturzbeben.

Auch S. Goldschmidt sieht sich in seinem schon einmal genannten Buche „Der Kurort Bad Reichenhall und seine Umgebung“ veranlaßt, mit wenigen Worten von örtlichen Bebenerscheinungen zu sprechen. Er sagt:[3]) „Erderschütterungen kommen öfters vor. Sie sind niemals vulkanischen Ursprungs und entstehen lediglich infolge Einsturzes eines ausgelaugten Salzlagers. Dafür sprechen einzelne trichterförmige Vertiefungen im Quellengebiete der Stadt, wie wir z. B. eine solche in der Nähe der Villa Panorama und vor der schönen Aussicht bei der Meierei Hessing wahrnehmen können.“ Und an einer anderen Stelle behauptet er:[4])

[1]) Vgl. a. F. v. Richthofen, Führer f. Forschungsreisende. Hannover 1901, 103, wo manche Kesselbildungen in den Salzburger Alpen auf ausgelaugte Steinsalzlager und eingebrochene Hohlräume zurückgeführt werden. Ferner: K. Keilhack, Grundwasser- und Quellenkunde. Berlin 1912, 54. — [2]) Oberb. Archiv f. vaterl. Gesch. 19, 101, München 1858—1860. — [3]) Wien und Leipzig 1892, 45. — [4]) A. a. O., S. 27.

„Mehrere trichterförmige Gruben, die plötzlich entstanden sind und ein Erdbeben vortäuschten, sind auf den Einsturz ausgelaugter Salzhöhlen zu beziehen."

Wie Hermann so bringt auch Goldschmidt die bekannten Einbruchserscheinungen in ursächlichen Zusammenhang mit Krustenerzitterungen Reichenhalls.

Eine allerdings wenig Neues bietende Bemerkung des „Reichenhaller Grenzboten" (Nr. 140, 1910) anläßlich seiner Berichterstattung über das Erdbeben vom 19. November 1910 kann ebenfalls in diesen Zusammenhang miteinbezogen werden. Er schreibt nämlich, daß in der Mitte des vorigen Jahrhunderts die trichterförmigen Offnungen im Kirchholz und bei der Schönen Aussicht in Verbindung mit Erderschütterungen entstanden seien.

„Solche Erscheinungen", sagt R. Hörnes,[1]) „sind in Salzlagerstätten keineswegs befremdend, mögen dieselben nun durch die Hand des Menschen abgebaut oder durch die lösende Kraft des Wassers ausgewaschen werden. Mit Recht wendet daher v. Lasaulx die Annahme unterirdischer Einstürze auf Gegenden an, in welchen größere Hohlräume durch die Auslaugung von Salzlagerstätten entstehen müssen."

Und daß man nicht nur im Reichenhaller Gebiet, sondern auch in anderen Gegenden, deren Boden Salz birgt, Erderschütterungen nicht mit Unrecht auf unterirdische Zusammenbrüche zurückführt, das beweisen folgende Sätze, die leicht vermehrt werden könnten: „14. Dez. 1880 morgens wurde Leopoldshall und Staßfurth wieder von einer starken Erschütterung betroffen, deren Ursache allgemein in einem neuen Einsturz des Salzwerkes gesucht wird." „29. Mai 1883. Heftiges Erdbeben in Staßfurth. Die Ursache dieser Erscheinung sind die seit 2 Jahren im Salzwerk von Leopoldshall zuweilen eintretenden Niedergänge."[2])

[1]) Erdbebenkunde. Leipzig 1893, 319. — [2]) Die beiden Belege sind entnommen: C. W. C. Fuchs, Statistik der Erdbeben von 1865—1885 (Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. d. K. Akad. d. Wiss. in Wien 92, 309 und 312, 1885).

6. Die Erschütterung vom 19. November 1910.

Nicht jedes Einsturzbeben der Reichenhaller Gegend dürfte aber durch eine plötzlich im Landschaftsbilde auftauchende Pinge seine Bescheinigung als solches erhalten haben;[1]) manches, wie Goldschmidt erwähnt, allerdings. Und auch die Bildung einer Pinge muß sich nicht unter allen Umständen in Begleitung eines Erdbebens vollziehen. Wahrscheinlich ist, daß Einstürze im Erdinnern, verbunden mit leichten, ungefährlichen Erschütterungen manchmal auch ohne sichtliche Änderung der Erdoberfläche stattgefunden haben und weiterhin stattfinden werden. Zu Besorgnissen ist indes kein Anlaß gegeben, da diese Beben in unserem Erdstrich erfahrungsgemäß ganz harmloser Natur sind.

Das Erdbeben vom 19. November 1910, dessen nähere Umstände wir nach der bisherigen allgemeinen Betrachtung aufgrund des bei der K. Erdbebenwarte München spärlich eingelaufenen Beobachtungsstoffes nun untersuchen wollen, trat, soweit bekannt ist, ohne Pingenbildung in die Erscheinung. Ein Grund, es in die Reihe der Einsturzbeben zu verweisen, liegt vorerst nicht vor.

Die Erschütterung nahm man, wie eingangs bereits erwähnt wurde, 20 Minuten nach Mittag wahr.[2]) In dieser Angabe stimmen fast alle Meldungen überein. Eine instrumentelle Aufzeichnung über den zeitlichen Verlauf und die Stärke des Bebens liegt nicht vor, obgleich manche Zeitung[3]) ihren Lesern mitteilte, die Krustenbewegung sei auf der K. Erdbebenwarte München seismographisch vermerkt worden.

Die Beobachter in Reichenhall befanden sich zumeist in ihren Wohnräumen und waren mit der Einnahme des Mittags-

[1]) „Es ist nicht erforderlich, daß es totale Deckeneinbrüche sein müssen, denn auch partielle, die keine Bodensenkungen hervorrufen, genügen, um Erschütterungen hervorzurufen." (F. Kraus, Höhlenkunde. Wien 1894, 105.) — [2]) Der Tag war ein Samstag. — [3]) Z. B. die „Landshuter Zeitung" vom 21. November 1910 in einer Meldung aus Berchtesgaden.

mahles beschäftigt, als die Naturerscheinung auftrat. Sechs von ihnen hielten sich im zweiten und vier im ersten Stockwerke auf; einer weilte im Freien. Ihre Niederschriften hinsichtlich der Art, Zahl und Stärke der Erdstöße weichen ziemlich voneinander ab.

Befassen wir uns zunächst mit den Mitteilungen der Bewohner von zweiten Stockwerken. Der eine Teil fühlte einen einzigen, starken Stoß, der manchen erschrocken auffahren ließ; der andere Teil glaubte nur einen schwachen Ruck, der eigentlich nicht so sehr als ein Stoß, sondern vielmehr als ein kurzes Rütteln wahrgenommen wurde, verspürt zu haben. Auch hinsichtlich der Dauer der Bewegung herrscht in den Angaben keine Einmütigkeit, doch übersteigt keine den Zeitraum von fünf Sekunden.

Von den ein Stockwerk tiefer Wohnenden wurden ein, zwei, ja sogar vier bis sechs Stöße gezählt; die Erschütterung war nach ihrer Meinung entschieden kräftig. Ihre Aufzeichnungen über die Dauer der Bodenschwankung bewegen sich in den Grenzen von 1 bis 4 Sekunden, wobei zu bemerken ist, daß ein Beobachter (Ludwigstr. Hs.-Nr. 2), der zwei Stöße wahrgenommen haben will, jedem Stoß eine Dauer von 4 Sekunden zuschreibt.

Der Beobachter im Freien hörte ein zeitlich nicht näher bestimmtes Rollen.

Lassen sich aufgrund obiger Angaben keine besonders zuverlässigen Anhaltspunkte über die Stärke des Bebens gewinnen, so wird dies eher möglich sein, wenn wir den Wirkungen, die die Krustenschwankung ausübte, nachgehen. Übereinstimmend wird von allen Beobachtern ausgesagt, daß kleinere und größere Gegenstände in den betreffenden Zimmern erzitterten. Es klirrten die Fenster sowie durch die Bodenbewegung aneinandergestoßene Geschirrstücke. Türen und Kästen wurden gerüttelt. Irgendwo fiel eine Schüssel vom Nagel. Dort war es, als schwanke das ganze Zimmer, und hier meinte ein ruhig auf seinem Schlafsessel sitzender Beobachter, die Wände stürzten ein. Die Schwankung derselben sei so stark gewesen, daß er

erschrocken aufgesprungen sei. Der Betreffende, der ein im ersten Stockwerk gelegenes Eckzimmer der Ludwigstraße (Hs.-Nr. 2) bewohnte, hat überhaupt das Beben am heftigsten empfunden, während seine Frau und Tochter, die sich zurzeit der Erschütterung in der Küche aufhielten, auffallenderweise nichts bemerkten, was sie hätte auf einen Erdstoß schließen lassen. Im Erdgeschoß sowie im zweiten Stockwerk des gleichen Hauses hingegen wurden von anderen Personen Erdbebenerscheinungen wahrgenommen. Endlich wäre noch anzuführen, daß in einem allerdings nicht besonders gut gebauten Landhause eine Mauer einen Riß bekam.

Dies wären die hauptsächlichsten Wertmesser für die Beurteilung der Stärke des Bebens, das von den allermeisten Einwohnern der Stadt Reichenhall, namentlich soweit sie sich in ihren Wohnungen aufhielten, gefühlt wurde. Viele Bewohner der Ludwigstraße liefen im ersten Schrecken ins Freie und fragten ihre Nachbarn nach der Ursache des ungewöhnlichen Vorgangs. Ziehen wir ferner in Betracht, daß mancher Beobachter gleichzeitig die Empfindung hatte, als stürze im Stockwerk über ihm ein schwerer Kasten um oder es falle eine größere Masse Schnee vom Hausdache auf den Erdboden, oder als fahre mit dumpfem Rollen und Poltern ein Lastautomobil auf der Straße am Hause vorüber, so dürften wir der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn wir behaupten: Das Reichenhaller Erdbeben vom 19. November 1910 erreichte in seiner Stärke den Grad 4 und griff teilweise noch auf den Grad 5 der zwölfteiligen Intensitätsskala von Mercalli-Sieberg[1]) über. Mit andern Worten ausgedrückt heißt dies: Die Erschütterung war mäßig bis ziemlich stark.

Was die Ausbreitung der Bewegung betrifft, so läßt sich darüber folgendes sagen. Außer im Stadtgebiet von Reichenhall wurde sie nur noch in St. Zeno bis zur Staufenbrücke, in Nonn und Karlstein gefühlt, während man in den

[1]) Vgl. A. Sieberg, Über die makroseismische Bestimmung der Erdbebenstärke (S.-A. a. Gerlands Beiträgen zur Geophysik 11, 1912).

Siedelungen Gmain, Großgmain, Thumsee, Hallturm, Jettenberg, Marzoll und Hammerau keine Wahrnehmungen machte. Auch aus den entfernter gelegenen Ortschaften, wie Bischofswiesen, Berchtesgaden,[1]) Teisendorf, Inzell, Siegsdorf und Ruhpolding liefen nur verneinende Antworten ein.

Das Beben verbreitete sich demnach nur über ein örtlich eng begrenztes Gebiet, nämlich über die Talebene von Reichenhall und deren allernächste Umrahmung. Durch diese Feststellung haben wir zugleich einen wichtigen Anhaltspunkt für die Erkennung der Art des Erdbebens gewonnen. Räumlich beschränkte Schüttergebiete kommen nur den vulkanischen und Einsturzbeben zu. Da die erstgenannte Klasse von Bodenerschütterungen mangels eines tätigen Vulkans in unserem Bezirke ausgeschlossen ist, kann es sich im vorliegenden Falle nur um die zuletzt angeführte handeln.

Die in früheren Abschnitten erörterten Untergrundverhältnisse Reichenhalls ließen deutlich erkennen, daß wir es mit einem durch unterirdische Auswaschungen zerfressenen und infolgedessen klüfte- und höhlenreich gewordenen Erdrindenstück zu tun haben. Derart beschaffene Krustenteile können aber in ihrem physikalischen Verhalten den Zustand der Ruhe auf die Dauer nicht bewahren. Niederbrüche und Zertrümmerungen in ihrem Innern müssen die Folge sein. Die dabei auftretenden Bodenerzitterungen gehören zur Klasse der Einsturzbeben. Nun hat sich zwar, wie bereits bemerkt wurde, an der Erdoberfläche in zeitlicher Übereinstimmung mit der fraglichen Erschütterung kein Erdfall gebildet, was auch gar nicht notwendig ist; wir dürfen aber trotzdem daran festhalten, daß in unserem Falle ein Einsturzbeben inmitte liegt, da ein weiteres Kennzeichen für diese Art seismischer Erscheinung gegeben ist. Die Anzahl der dabei auftretenden Stöße ist nämlich in der Regel eine sehr geringe und wie wir gehört haben, hat sich das in Frage stehende Beben mit ganz wenigen Rucken

[1]) „Weder über Tag noch in der Grube wurde irgendwelche Beobachtung gemacht", schrieb das dortige K. Berg- und Salinenamt.

erschöpft. Der zusammengebrochene Hohlraum lag wohl der Außenseite unserer Erde zu entfernt, als daß sich oberflächlich noch Wirkungen des Einsturzes hätten bemerkbar machen können, wie es denn überhaupt als außergewöhnliche Seltenheit zu gelten hat, daß eine Bodenerschütterung durch einen gleichzeitig entstandenen Erdfall ihrer Ursache und ihrem Wesen nach sofort durch die Natur selbst erklärt wird. K. Sapper war es während eines Aufenthalts in Mittelamerika einmal vergönnt, die Natur bei der Bildung eines Erdtrichters „auf frischer Tat" zu ertappen und zeitlich damit zusammenfallend das dadurch ausgelöste Erdbeben wahrzunehmen.[1]) Möglicherweise sind aber, wieder auf unsern Fall bezogen, nur Teile des mutmaßlichen Hohlraumes zusammengestürzt und es bleibt vielleicht erst einer späteren Zeit vorbehalten, den vollständigen Einsturz und die Entstehung eines Erdfalls zu erleben.

Für einen örtlich beschränkten Zusammenbruch spricht weiter der Umstand, daß eine Beeinflussung der süßen und sauren Quellen in Reichenhall und Umgebung, soweit dies nach menschlichem Ermessen beurteilt werden kann, nicht beobachtet wurde. Weder in ihren Temperaturverhältnissen noch in ihrer Schüttung wurden sie von dem bewußten Beben berührt. Ebensowenig wurde eine Trübung ihrer Wasser festgestellt. Auch unter früheren Erdbeben, das sei nebenbei bemerkt, sollen die Quellen „niemals gelitten"[2]) haben. Entspräche diese Mitteilung wirklich den Tatsachen — und es ist kein Grund vorhanden, sie anzuzweifeln, — so wäre sie eine Stütze unserer früher geäußerten Ansicht, daß in der Gegend

---

[1]) S. Günther, Handb. d. Geophysik 1, 483, Stuttgart 1897. — Vgl. a. F. v. Hochstetter, Über Erdbeben (Beil. z. d. Monatsblättern d. wissenschaftl. Klubs. Wien 1880, 9). Ferner darf das Erdbeben von Ebersklingen bei Würzburg 1607 zum Vergleiche herangezogen werden. Darüber kann Näheres nachgelesen werden in: Terra tremens, die zitterend- oder bebende Erde von M. P. S. A. C. Nürnberg 1670, ohne Seitenzahlen; M. J. A. W., Chronica oder Sammlung alter und neuer Nachrichten von denen merkwürdigsten Erdbeben. Frankf. a. M. 1756, 38; J. Bögner, Das Erdbeben. Frankf. a. M. 1847, 104. — [2]) Mitgeteilt v. Benefiziat J. Bauer in Reichenhall.

von Reichenhall den Einsturzbeben in erheblichem Abstande der Vorrang vor den Dislokationsbeben gebührt.

Unser Beben war, wie der „Reichenhaller Grenzbote“ berichtet,[1]) die bedeutendste Erschütterung der Stadt seit langen Jahren; gleichwohl hat sie sich auf einem Raume abgespielt, dessen äußerste Begrenzungslinie nur 10 bis 14 Kilometer mißt und der eine Fläche von etwa ebensovielen Quadratkilometern bedeckt. Diese Fläche umfaßt hauptsächlich den Talboden des Gebirgskessels von Reichenhall zu beiden Seiten der Saalach. Er besteht in seinen höheren Schichten aus Alluvialgebilden, angeschwemmtem Geröll u. dgl., in den tieferen aus tonigem Kalk. Die oberste Decke wird aus einer Lage Dammerde von 30—60 cm Mächtigkeit gebildet. Diese lockere Beschaffenheit des Untergrunds war wohl mit daran schuld, daß das Beben überall im Tale verspürt wurde, während die seismische Kraft beim Eintritt in den felsigen Gebirgsrahmen, wenn auch nicht sofort, so doch rasch erlosch. Aus der beigegebenen Kartenskizze, die vom Verfasser nach einer dem bekannten „Bühlerführer“[2]) beigegebenen „Karte der Reichenhaller, Berchtesgadener und Loferer Berge“ gezeichnet worden ist, kann die Lage und ungefähre Ausdehnung des Schüttergebietes — es ist durch den innerhalb der rot gestrichelten Linie gelegenen Bezirk angedeutet — unschwer entnommen werden.

Sehr schwierig dürfte sich dagegen der Versuch gestalten, die Lage des Epizentrums näher zu bestimmen. Nach den eingezogenen Erkundigungen wurde das Beben in jedem Stadtteile gefühlt, am heftigsten allem Anscheine nach jedoch in der Ludwigstraße, deren Anwohner zum Teil bestürzt auf die Straße liefen, um sich, wie oben bereits mitgeteilt wurde, über die „ungewöhnlich starke Erschütterung“ Aufklärung zu verschaffen. Aus der genannten Straße (Hs.-Nr. 2) liegt auch die einzige Meldung vor, nach welcher die Erdbewegung „sehr

[1]) Nr. 140, 1910. — [2]) A. Bühler, Führer für Bad Reichenhall, Berchtesgaden, Salzburg und Lofer. 24. Aufl. Bad Reichenhall 1912.

kräftig" war. Der betreffende Beobachter hielt sich noch dazu im 1. Stockwerke auf, während eine Reihe von anderen Beobachtern — allerdings nicht desselben Hauses — die eine Stiege höher wohnten, das Beben „schwach" empfand. Und doch ist die Regel, daß in höher gelegenen Stockwerken die Bebenempfindung eine gesteigerte ist. Allein die Beurteilung eines Erdbebenstoßes durch den Laien ist meist nur der gefühlsmäßige Ausdruck persönlichen Empfindens, wobei wichtige Umstände, wie die Bauart des betreffenden Hauses, seine Untergrundverhältnisse usf. von den Beobachtern in ihren Stärkeangaben gewöhnlich unberücksichtigt gelassen werden. Wir können daher mangels der nötigen Unterlagen über den Ort der stärksten Erschütterung nur soviel sagen, daß die Ludwigstraße, die mit ihrer südwestlichen Fortsetzung, der Salinenstraße, und ihrer nordöstlichen Weiterführung, der Salzburgerstraße, die Stadt ungefähr in ihrer Mitte von Südwest nach Nordost durchzieht, vielleicht als Epizentralgebiet in Betracht kommen könnte. Im übrigen müssen wir diese Frage als eine offene bestehen lassen.

Aus demselben Grunde können auch über die Stoßrichtung keine näheren Mitteilungen gemacht werden. Nur ein Beobachter (Ludwigstraße, Hs.-Nr. 2) beantwortete die einschlägige Frage, indem er bemerkte: „Von Ost nach West."

Noch wollen wir zwei Wahrnehmungen, die angeblich im Anschluß an unser Beben gemacht wurden, anführen,[1]) obwohl es einleuchtet, daß sie, weil völlig vereinzelt dastehend, noch kein Beweis sind für das, was sie aussagen. Sie können auf recht wohl begreiflicher Selbsttäuschung beruhen, nachdem die um Mittag erfolgte und allgemein verspürte Bodenbewegung die Gemüter etwas erregt hatte.

Ein Beobachter will am Tage des Bebens, also am Samstag den 19. November, nachts 11 Uhr 15 Minuten neuerdings eine Erschütterung verspürt haben. Und ein ans Krankenbett gefesselter, im Erdgeschoß eines Hauses wohnender Herr be-

[1]) Nach dem „Reichenhaller Grenzboten" Nr. 140, 1910.

hauptet, am Sonntag den 20. November vormittags 8 Uhr 22 Minuten das Gefühl gehabt zu haben, als schwirre tief unter ihm durch den Erdboden eine Kanonenkugel. Die Empfindung habe 2 Sekunden lang gedauert und es habe dabei geschienen, als ob ein unbestimmtes Etwas an die 4 Wände des Zimmers drücke.

Nach Lage der Dinge wäre es immerhin möglich, daß Nachbrüche im Innern der Erde stattgefunden und die eben mitgeteilten Wahrnehmungen veranlaßt haben. Doch sind diese beiden Einzelbeobachtungen viel zu wenig belegt, als daß es sich lohnte, weiter darauf einzugehen.

Wir ziehen den Schlußstrich unter unsere Abhandlung. Das am 19. November 1910 in Reichenhall verspürte Erdbeben darf mit größter Wahrscheinlichkeit als ein Einsturz- oder Auswaschungsbeben angesprochen werden und zwar aus folgenden Gründen:

1. Ein Herd, der ein tektonisches Beben auszulösen imstande wäre, ist für die Gegend von Reichenhall unbekannt, was jedoch nicht ausschlösse, daß ein solcher im vorliegenden Falle in Betracht kommen könnte. Aber für ein Dislokationsbeben war die am 19. November 1910 erschütterte Bodenfläche viel zu klein. Auch fehlten andere bei tektonischen Erdbeben im Epizentralgebiet mit Vorliebe auftretende Erscheinungen, wie Nachstöße, Geländeverschiebungen usf. Wenn selten wirklich einmal ein tektonisches Beben für Reichenhall in Betracht kam, so lag der Herd wohl weiter davon entfernt und der Schütterbezirk war ein über größere Landstriche hin ausgedehnter. Daß von keinem tektonischen Beben die Rede sein kann, wird endlich auch dadurch sehr wahrscheinlich, daß weder die süßen noch die sauren Quellen der Landschaft irgendwie beeinflußt wurden.

2. Die Landschaft, in der Reichenhall liegt, verliert unausgesetzt gewaltige Mengen von Baustoff durch die im Innern des Gebirgs verlaufenden und zum Teil als Solquellen zutage tretenden Wasser. Das Erdinnere erleidet dadurch eine erhebliche Störung seines Gleichgewichts, indem sich Hohlräume der

verschiedensten Größe bilden, durch die unterirdischen Zusammenbrüchen ein günstiges Feld bereitet wird. Derartige Einstürze sind imstande, ihre Umgebung zu erschüttern.

3. Auch das Vorkommen von Erdfällen oder Pingen spricht für innere Stoffverluste und Einbrüche und im Zusammenhange damit für die Möglichkeit von Einsturzbeben.

4. Von Kennern der Stadt Reichenhall und ihrer Umgebung wurden die meisten früher dort gefühlten Erdstöße unterirdischen, auf der Auslaugung von Salzlagern beruhenden Einstürzen zugeschrieben. Und das waren Erschütterungen, die mit dem in Rede stehenden Beben viel Ähnlichkeit hatten.

5. Auf unser Vorkommnis lassen sich ungezwungen die unterscheidenden Kennzeichen der Einsturzbeben anwenden: Es war von sehr kurzer Dauer, erschöpfte sich gleichsam in einer einzigen Kraftäußerung, vollzog sich in einem unterhöhlten Erdrindenstück und war wohl zweifellos das Schlußergebnis eines unterirdischen Auslaugungsvorgangs. Da es ein räumlich sehr eng begrenztes Schüttergebiet aufwies, trug es das Gepräge einer rein örtlichen Erscheinung.

Wir haben die Bearbeitung des vorliegenden Naturereignisses auf einer etwas breiteren Grundlage aufgebaut, als sie diesem seiner Bedeutung nach eigentlich zukommt. Doch wird man uns das nicht verargen in Anbetracht der Tatsache, daß die in Frage stehende Erscheinung kennzeichnend für Reichenhall ist und früher noch niemals der Versuch gemacht wurde, ein Reichenhaller Einsturzbeben einer näheren Untersuchung zu unterziehen.

Anhang.

Literatur zur Erdbebenkunde von Bayern.

Zusammengestellt von H. Gießberger.

1. A. G. Ertl, Relationes Curiosae Bavaricae, Augsburg 1715. Der 7. Abschnitt dieses Werkes ist betitelt: Merckwürdiger Bayerischer Erdbidem und dessen ungemeiner Würckung.
2. P. Joh. Evang. Reichmayrs Benediktiners und Professors der Gottesgelehrtheit im fürstlichen Reichsstifte zu St. Emmeram in Regensburg und Pfarrvikarius in Schwabelweis Beobachtungen über die Erschütterung der Berge in selbiger Gegend am 13. May 1783. Vgl. dazu: Beytrag zu den Beobachtungen d. H. Professors Reichmayr ü. d. Erschütterung der Berge in der Gegend von Schwäbelweis 1783. (Anonym.)
3. R. Ludwig, Das Erdbeben in der Umgebung von Darmstadt und Groß-Gerau. Darmstadt 1869.
4. J. J. Nöggerath, Die Erdbeben im Rheingebiet in den Jahren 1868—1870. Verh. d. naturhist. Ver. d. preuß. Rheinlande und Westfalens. 27, 1870, Bonn.
5. Das rheinisch-schwäbische Erdbeben am 24. Januar 1880. Dargestellt von der Erdbebenkommission des Naturwiss. Ver. in Karlsruhe. Dessen Verhandlungen 8, 1881. [Herd: Kandel, Rheinpfalz.]
6. C. W. v. Gümbel, Das Erdbeben vom 22. Februar 1889 in der Umgegend von Neuburg a. D. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 19, 1. H., 79, 1889.
7. S. Günther, Münchener Erdbeben- und Prodigienliteratur in älterer Zeit. Jahrb. f. Münchener Gesch. 4, 233—256, 1890.
8. R. Langenbeck, Die Erdbebenerscheinungen in der Oberrhein. Tiefebene und ihrer Umgebung. Geogr. Abh. a. d. Reichslanden Elsaß-Lothringen 1, 1892.
9. F. Becke, Ber. über das Erdbeben vom 5. Jänner 1897 im südl. Böhmerwald. Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. der Kaiserl. Akad. d. Wiss. in Wien 106, 3. H., 103—116, 1897.
10. C. W. v. Gümbel, Über die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbebeu. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 28, 1. H., 3, 1898.

11. S. Günther, Das bayerisch-böhmische Erdbeben vom Jahre 1329. 17. Jahresber. d. Geograph. Ges. in München für 1896 und 1897. München 1898, 76.
12. H. Credner, Die sächs. Erdbeben während der Jahre 1889 bis 1897, insbesondere das sächsisch-böhmische Erdbeben vom 24. Oktober bis 29. November 1897. Abh. d. math.-phys Kl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 24, 1898, Nr. 4.
13. S. Günther, Die seismischen Verhältnisse Bayerns. Ber. d. 1. internat. seismolog. Konferenz 1901, 138—143. Vgl. a. „Die Erdbebenwarte" 2, 75, 1902/03 und Gerlands Beiträge zur Geophysik. Ergänzungsband 1, 138, 1902.
14. J. Reindl, Das Böhmerwald-Erdbeben vom 26. November 1902. „Das Bayerland" 14, 226, 1903.
15. J. Reindl, Das bayer. Ries und seine Erdbeben. „Das Bayerland" 14, 321, 1903. Vgl. a. „Naturwiss. Wochenschr.", N. F. 6, 698—701, 1907.
16. J. Reindl, Beiträge zur Erdbebenkunde von Bayern. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 33, 1. H., 171, 1903.
17. S. Günther und J. Reindl, Seismologische Untersuchungen. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 33, 4. H., 631, 1903. Diese Schrift enthält:
    a) Die beiden großen Erdbeben des 14. Jahrh. [1348 und 1356].
    b) Die Seismizität der Riesmulde.
    c) Zur Physik der Bodenknalle.
18. J. Reindl, Die Erdbeben im Königreich Bayern in histor. Zeit. „Der Sammler" 72, Nr. 43, 3—6, 1903. Auch abgedruckt unter der Überschrift: „Die Erdbeben d. geschichtl. Zeit im Königreiche Bayern" in der „Erdbebenwarte" 2, 235, 1902/03.
19. J. Reindl, Die Erdbeben Bayerns im Jahre 1903 und ihre Ursachen. „Die Erdbebenwarte" 3, 202, 1903/04. Auch abgedruckt in den „Geognost. Jahresheften" 16, 69, 1903; ferner in der „Beil. z. Allgem. Ztg." Nr. 296, 1903. Vgl. außerdem: „Gaea" 40, 613, 1904 und ein Referat Dr. Binders in der „Erdbebenwarte" 4, 67, 1904/05.
20. J. Reindl, Das Erdbeben am 5. und 6. März 1903 im Erz- und Fichtelgebirge mit Böhmerwald und das Erdbeben am 22. März 1903 in der Rheinpfalz. „Geognost. Jahreshefte" 16, 1 u. f., 1903. Vgl. a. „Gaea" 40, 312, 1904.
21. A. Brunhuber, Zwei Erdbeben im Gebiete der Oberpfalz [26. Nov. 1902 und 5. und 6. März 1903]. Ber. d. naturwiss. Ver. zu Regensburg, 9. H. f. d. Jahre 1901 und 1902. Regensburg 1903.
22. J. Knett, Mitt. d. Erdbebenkomm. in Wien, Nr. 16, N. F. Wien 1903.
23. J. Reindl, Die Erdbeben Bayerns im Jahre 1904, ihre Wirkungen und Ursachen. „Die Erdbebenwarte" 4, 178, 1904/05. Vgl. a. „Beil. z. Allgem. Ztg.", Nr. 202, 1904.

24. J. Reindl, Die Erdbeben des nördlichen Bayern. Unterhaltungsblatt des „Fränk. Kuriers“ 51, 423, 1904.
25. H. Credner, Der vogtländische Erdbebenschwarm vom 13. Februar bis 18. Mai 1903 und seine Registrierung in Leipzig. Abh. d. math.-phys. Kl. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 28, Nr. 6, 1904.
26. J. Reindl, Ergänzungen und Nachträge zu von Gümbels Erdbebenkatalog. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 35, 1. H., 31, 1905.
27. J. B. Messerschmitt, Die Hauptstation für Erdbebenforschung in München. „Die Erdbebenwarte“ 5, 14, 1905/06. Vgl. a. „Schweiz. Bauzeitung“ 51, Nr. 16 und 17, 1905; ferner: „Der Sammler“ 75, Nr. 140, 5 und 6, 1906. Bayer. Industrie- und Gewerbeblatt 40, 31, 1908.
28. J. B. Messerschmitt, Erdbebenregistrierungen im Jahre 1905. Veröffentl. d. Erdmagnet. Observat. und d. Kgl. Erdbebenhauptstation b. d. Kgl. Sternwarte in München. 2. Heft, S. 38, München 1909.
29. J. Reindl, Die Erdbeben Münchens. „Die Erdbebenwarte 5, 38, 1905/06. Auch im „Bayer. Kurier“ vom 7. Juli 1910 erschienen. Vgl. a. „Münch. Neueste Nachr.“ Nr. 371, 1905.
30. J. Reindl, Die Erdbeben Nordbayerns. Abh. d. Naturhist. Ges. in Nürnberg 15, 3. H., 1905. [Mit einer Karte: Bruch- und Schütterlinien in Nordbayern.]
31. H. Leutz, Die süddeutschen Erdbeben im Frühjahr 1903. [Herd: Kandel, Rheinpfalz.] Verh. des Naturwiss. Ver. in Karlsruhe 18, 205–225, 1905.
32. S. Günther, Ein kulturhistor. Beitrag zur Erdbebenlehre. Mitt. d. Geograph. Gesellschaft in München 1, 4. H., 1906. [Behandelt das Schwabelweiser Einsturzbeben vom 13. Mai 1783 auf Grund der Schrift unter Nr. 2.]
33. J. B. Messerschmitt, Die Erdbeben in Bayern 1905 bis 1907. „Die Erdbebenwarte“ 6, 94, 1906/07.
34. J. Reindl, Die Erdbeben Nordbayerns. Festschr z. 16. Deutschen Geographentag in Nürnberg 1907. Nürnberg 1907, 143.
35. J. B. Messerschmitt, Die Registrierungen der letzten großen Erdbebenkatastrophen auf der Erdbebenstation München. Mitteil. d. Geogr. Ges. in München 2, 2. H., 197—203, 1907.
36. C. Regelmann, Erdbebenherde und Herdlinien in Südwestdeutschland. Jahreshefte des Ver. f. vaterländ. Naturkunde in Württemberg, Jahrg. 1907. Stuttgart 1907, 152—158: „Die Erdbebenherde in der Schwäb. Alb, im Hegau, im Ries und im Fränk. Jura.“
37. J. B. Messerschmitt, Die Erdbebentätigkeit in Bayern während der beiden Jahre 1905 und 1906. „Beil. z. Allgem. Ztg.“ Nr. 128, 36, 1907.

38. A. Zoellner, Die Erdbeben im Fichtelgebirge und ihre Ursache. „Selber Tagblatt" 39, Nr. 250, 1908.
39. J. B. Messerschmitt, Erdbebenapparate. „Natur und Kultur" 6, 359–365, 1909.
40. H. Ditzel, Die vogtländischen Oktoberbeben. „Geogr. Anzeiger" 10, 39–42, 1909.
41. J. B. Messerschmitt, Registrierungen einiger südeurop. Erdbeben auf der Münchener Erdbebenstation. 1909.
42. A. Brunhuber und J. B. Messerschmitt, Die Beobachtungen der beiden sächsich-böhmischen Erdbebenschwärme vom Oktober und November 1908 im nordöstlichen Bayern und die Registrierung auf der Münchener Erdbebenstation. Ber. d. naturwiss. Ver. zu Regensburg, 12. H. f. d. Jahre 1907 u. 1908, Regensburg 1910. [Mit 1 Karte und 8 Diagrammen.]
43. K. G. St., Frühere Erdstöße in Nürnberg. „Fränkischer Kurier" 78, Nr. 364, 1910.
44. C. C. Hoßeus, Zu dem Erdbeben bei Bad Reichenhall. „Fränk. Kurier" Nr. 612 vom 30. November 1910.
45. Erderschütterungen in Nürnberg und ihre Ursachen. „Fränkischer Kurier" 79, Nr. 592, 1911.
46. J. B. Messerschmitt, Über die neu errichtete Erdbebenwarte in Nördlingen. „Nördlinger Anzeigeblatt" vom 29. Juni 1911.
47. J. B. Messerschmitt, Die Erdbebenwarten in Nördlingen und Hof. „Wissenschaftl. Rundschau" d. „Münchn. Neuesten Nachr." Nr. 445, 1911.
48. C. Botzong, Über die Erdbeben Südwestdeutschlands, insbesondere über die der Rheinpfalz. S.-A. a. d. „Pfälz. Heimatkunde" 1912. Kaiserslautern 1912.
49. C. W. Lutz, Johann Baptist Messerschmitt. Mitt. d. Geogr. Ges. in München 7, 3. H., 432–437, 1912.
50. A. Brunhuber, Über die in der Oberpfalz in den Jahren 1910 und 1911 beobachteten Erdbeben. Ber. d. naturwiss. Ver. zu Regensburg, 13. H. f. d. Jahre 1910 und 1911. Regensburg 1912.
51. H. Gießberger, Erdbeben-Erinnerungen aus dem Ries. „Fränkischer Kurier" vom 3. Februar 1913, Nr. 34 des Unterhaltungsblatts.
52. D. Häberle, Nachrichten aus der Rheinpfalz über das Erdbeben vom 20. Juli 1913. „Pfälz. Heimatkunde" 9, 133–137, 1913.
53. S. Günther, Pseudo- und kryptovulkanische Erdbeben. „Scientia" 14, N. XXX–4, Jahr 7, 1913.
54. K. Rudel, Zum Julibeben [20. Juli 1913]. „Fränkischer Kurier" 81, Nr. 204, 209 und 219 des Unterhaltungsblatts, 1913.
55. C. Mehlis, Erdstoß in der Vorderpfalz. Petermanns Mitteilungen 61, 68, 1915. Derselbe: Wirkungen des Erdbebens vom 13. Jan. 1915 am Pechsteinkopf b. Forst. „Pfälz. Heimatkunde" 11, 26, 1915.

56. S. Günther, Über die Notwendigkeit, Zwischenformen neben den bekannten drei Hauptformen der Erdbeben zu postulieren. S.-A. a. d. Verh. d. 19. Deutschen Geographentages zu Straßburg im Els. 1914. Berlin 1915.
57. S. Günther, Kosmo- und geophysikalische Anschauungen eines vergessenen bayerischen Gelehrten. München 1914. Vgl. dazu: H. Gießbergers Referat „Ein vergessener bayerischer Gelehrter" im „Fränk Kurier" 83, Nr. 463, 1915.
58. H. Gießberger, Der Gasseldorfer Bergrutsch von 1625. „Heimatbilder aus Oberfranken" 3, 174—185, 1915.
59. H. Gießberger, Beiträge zur Erdbebenkunde von Oberfranken. „Heimatbilder aus Oberfranken" 4, 86—96, 1916.
60. H. Gießberger, Ein merkwürdiger Berg der Fränk. Alb. „Die Fränk Alb" 2, 4—5, 1916.
61. A. Brunhuber, Über die in der Oberpfalz und in Regensburg in den Jahren 1913, 1914 und 1915 beobachteten Erdbeben. (Berichte des naturwiss. Ver. zu Regensburg, H. 15 f. d. Jahre 1913, 1914, 1915, 1916. Regensburg 1917.)
62. H. Gießberger, Das Reichenhaller Einsturzbeben vom 19. Nov. 1910. Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. 1918, 221—252.
63. Beobachtungen der meteorologischen Stationen in Bayern. Die Bände 1—13 (1879—1891), ausgenommen die Jahre 1884 und 1888, in denen keine Bebenmeldungen einliefen, enthalten Erdbebenberichte über in Bayern gefühlte Bodenerschütterungen. Vom Jahre 1892 (Bd. 14) an fehlen diese Erdbebenvermerke.
64. H. Gießberger, Reichenhaller Erdbeben. „Der Sammler" 87, 1918, Nr. 105.

Inhaltsübersicht.

	Seite
1. Frühere Erdbeben in und um Reichenhall	221—229
2. Grundzüge der geognostischen Verhältnisse	229—231
3. Arten der in der Reichenhaller Gegend möglichen Beben	231—234
4. Von den Reichenhaller Solquellen	234—238
5. Schlotten und Pingen in ursächlichem Zusammenhang mit Einsturzbeben	238—244
6. Die Erschütterung vom 19. November 1910	244—252
Anhang: Literatur zur Erdbebenkunde von Bayern . . .	253—257

Das Schüttergebiet ist in der Kartenskizze nicht, wie im Text S. 249 bemerkt wurde, durch eine rot, sondern durch eine schwarz gestrichelte Umrahmung angedeutet.

Der Verlauf des Winters 1916/17 im sächsisch-bayerischen Grenzgebiete.

Von **F. Klengel**, Plauen.

Mit einer Kartenskizze und fünf Figuren.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 4. Mai 1918.

Der dritte Kriegswinter unterschied sich durch ungewöhnliche Strenge und lange Dauer in solchem Maße von den beiden auffallend milden vorangehenden, daß er dem Fachmeteorologen wie auch dem Laien schon überreichlich Stoff zu Betrachtungen und Erörterungen geboten hat. Können wir uns doch kaum eines früheren Winters entsinnen, der sich in seinen physiologischen Wirkungen dem Einzelnen wie dem ganzen Volks- und Wirtschaftsleben in solchem Maße fühlbar gemacht hätte, wie der Winter des Jahres 1917. Es ist hier nicht der Raum, den Ursachen dieser Erscheinung weiter nachzuspüren und zu zeigen, wie eine ganze Summe von Faktoren sich zu einer Gesamtwirkung vereinigte, die uns unvergeßlich bleiben wird. Die gänzlich veränderte Kriegsernährung, der Mangel an Fett und Zucker, die Kohlennot, hervorgerufen durch Stockungen und Schwierigkeiten im Eisenbahnverkehr ließen die Härte des Winters besonders empfinden. Der mitten im Winter einsetzende, verschärfte Unterseebootkrieg bedeutete mittelbar eine weitere Steigerung der einheimischen Kohlennot, insofern Deutschland nunmehr auch den Kohlenbedarf des neutralen Auslands mit zu decken hatte. Schließung von Theatern und Konzertsälen, von öffentlichen Versammlungen, von Universitäten und Schulen aller Gattungen, das sind die Schlagworte,

die die denkwürdigen Monate Januar und Februar 1917 kennzeichneten. Die unfreiwillige Muße der Kälteferien ist es auch gewesen, die dem Verfasser Gelegenheit bot, für kurze Zeit einmal vom Gymnasialdienst zu der früher so gern geübten Beschäftigung mit meteorologischen Fragen zurückzukehren und den Verlauf des Winters im sächsischen Vogtland und den angrenzenden Teilen Nordbayerns einer Untersuchung zu unterziehen.

Dem glücklichen Umstande, daß die Stadt Plauen eine aus staatlichen wie städtischen Mitteln wohl ausgerüstete und gut geleitete Wetterwarte besitzt, ist es zuzuschreiben, daß die notwendigen Unterlagen dem Verfasser zur Verfügung standen. Dem freundlichen Entgegenkommen der Kgl. Bayer. Landeswetterwarte in München und ihrem stellvertretenden Leiter, Herrn Dr. Alt, verdankt er die Überlassung der noch nicht veröffentlichten Beobachtungen von Hof, Alexandersbad und Bayreuth. Die Wahl des sächsisch-bayerischen Grenzgebietes für die nachstehenden Untersuchungen hatte aber nicht nur den soeben erwähnten praktischen Grund, sondern auch noch einen sachlichen, insofern, als in diesen Landesteilen der Winter besonders streng auftrat und der Witterungscharakter von dem der weiteren Umgebung, wie später zu zeigen sein wird, mehrfach recht wesentlich abwich.

Wir lassen nunmehr eine Zusammenfassung der Beobachtungen der Wetterwarte Plauen folgen und fügen später vergleichsweise die Ergebnisse der drei Stationen Nordbayerns, Hof, Alexandersbad und Bayreuth hinzu. Die Lage der Station Plauen wird durch die folgenden Koordinaten bestimmt:

$$\varphi = 50^{0}\ 30',\ \lambda = 12^{0}\ 8'\ \text{ö. v. Gr.},\ h = 369\ \text{m}.$$

Sie besteht seit Dezember 1863 als Station 2. Ordnung des sächsischen Beobachtungssystems. Für die nachstehenden Vergleiche konnte jedoch nur der Zeitraum von 1876—1917 herangezogen werden.

Während der erste Wintermonat, der Dezember 1916, mit einer Durchschnittswärme von $+ 1{,}6^{0}$ um etwa 2^{0} übernormal

war, im übrigen aber keinerlei meteorologisches Interesse beanspruchte, verliefen Januar wie Februar bedeutend zu kalt. Der Januar hatte einen Durchschnitt von — 4,2°, der Februar einen solchen von — 4,5°. Ersterer war für Plauen um 2,4°, letzterer um 4,5° zu kalt. Die Durchschnittstemperatur des Winters 1916/17 betrug daher — 2,4° und weist einen Fehlbetrag von 1,7° gegen das langjährige Mittel auf.

Seit 1876 hatte Plauen folgende kalte oder ähnlich kalte Winter:

1879/80	— 3,5°	1890/91	— 3,4°
1885/86	— 2,4	1892/93	— 2,7
1886/87	— 2,5	1894/95	— 3,8
1887/88	— 2,7		
1888/89	— 2,6		

Es gab also in dem 42jährigen Zeitraum 1876—1917 3 bedeutend kältere und 5 annähernd ebenso kalte oder nur wenig kältere Winter. Der letzte bedeutend kältere, zugleich der kälteste der ganzen Reihe liegt 22 Jahre zurück. Von 1896 an hatten wir im allgemeinen milde Winter, von denen nur der von 1900/1901 mit zwei sehr kalten Monaten, Januar — 4,7°, Februar — 4,1° und einem Mittel von — 1,9° eine Ausnahme bildet. Außerdem hatten noch einige andere je einen sehr kalten Monat:

Januar 1908	— 3,0°
Januar 1914	— 4,8

ohne daß das normale Wintermittel von — 0,7° erreicht worden wäre.

Für Sachsen war also, wie sich hieraus ergibt, der Winter 1916/17 keineswegs der kälteste seit 40 Jahren. Das scheint auch für ganz Mitteldeutschland zutreffend zu sein. Mit Recht hebt R. Hennig (Libau) in einem Aufsatz der Leipz. N. N. hervor, daß der ungewöhnliche Charakter des Winters sich in der Richtung von Ost nach West noch wesentlich verschärft habe. Während man für den größten Teil Ostdeutschlands den Winter 1916/17 nur als den kältesten aller der letzten 5 Jahre bezeichnen könne, müsse man in Mitteldeutschland schon volle 24 Jahre, bis auf den berüchtigten Winter von 1892/93 zurück-

greifen, um eine ähnliche Kälte wieder zu finden. Verhältnismäßig am strengsten aber sei der Winter im Westen, etwa jenseits des Westens und im Süden Deutschlands sowie auch in den angrenzenden Ländern Holland, Belgien, Frankreich, ja selbst in Oberitalien und in den Balkanländern aufgetreten, wo „die endgültigen, statistischen Zahlen vermutlich den Nachweis liefern werden, daß etwa seit den 30er oder 40er Jahren des vorigen Jahrhunderts, z. T. wohl sogar seit dem beispiellos harten und langen Winter 1829/30 keiu Winter mehr so große Strenge wie der letzte aufzuweisen hatte.“ [1])

Erscheinen hiernach für Sachsen die allgemeinen Schilderungen von der furchtbaren Kälte des vorletzten Winters, wie sie die Spalten der Tagespresse im Februar füllten, zum mindesten stark übertrieben, so würde doch andererseits die Durchschnittszahl von — 2,4° für die 3 Monate, Dezember bis Februar, nur eine unklare oder falsche Vorstellung von dem wahren Verlauf des Winters geben, da dieser zu einem besonderen Typ mit überaus starken Temperaturschwankungen und einer großen, lang andauernden Kältewelle gehörte. Um seine Eigenart richtig zu erfassen, ist es erforderlich, kleinere Zeiträume, wie Dekaden und Pentaden zur Mittelbildung heranzuziehen.

Ebenso wie der ganze Dezember 1916, so verlief auch der Januar 1917 in den ersten Tagen noch bedeutend zu warm. Der 2. und 3. hatten Mittagswerte von fast 10° und ihre Tagesmittel lagen fast 9° zu hoch. Die ganze erste Dekade war mit + 2,2° noch um rund 4° übernormal. Am 6. setzte leichter Frost ein, der unter geringen Schwankungen bis zum 18. ziemlich unverändert anhielt. Am 19. kündete sich die große, von Osten herannahende Kältewelle durch stetiges, langsames Sinken der Temperatur, auch während der Mittagsstunden, an. Am 20. hatten wir einen Tagesdurchschnitt von — 7,1°, am folgenden Tag einen solchen von — 11° und am 22. wurde mit

[1]) Dr. R. Hennig: Strenge Winter und warme Sommer. Leipz. N. N. Nr. 111, 4. Beil., S. 17, 24. April 1917.

— 15,3° das niedrigste Tagesmittel des ganzen Winters erreicht, dem allerdings noch verschiedene nachfolgende fast gleichkamen. An diesem Tage sank auch zum ersten Male das Minimum unter — 20°. Diese strenge Kälte hielt — abgesehen von einer geringen, vorübergehenden Milderung am 27. — bis zum 10. Februar an, so daß die dritte Januardekade mit — 11,1° und die erste Februardekade mit — 12,4° eine einzige große, zusammenhängende Kälteperiode bilden. In dieser Zeit sank nachts die Temperatur mit einer einzigen Ausnahme stets unter — 10° (Winternächte), 14 mal lag sie tiefer als — 15°, 6 mal tiefer als — 20° und ein Mal sogar noch unter — 25°. Als absolutes Minimum gibt die Wetterwarte — 25,5° am 9. Februar morgens 6h an. Doch dürfte an diesem Tage an freier gelegenen Punkten wohl mehrfach eine um 2 bis 3° tiefere Temperatur gemessen worden sein, da der Verfasser am gleichen Tage an seinem eigenen Thermometer — 27° abgelesen hat und verschiedentlich noch tiefere Werte aus der Umgebung von Plauen gemeldet bekam. Die amtliche Feststellung über das absolute Minimum in ganz Sachsen ist uns zwar noch nicht bekannt geworden, doch wird man schätzen können, daß es an — 30° nahe heranreicht. Sollte doch, nach Zeitungsmeldungen, selbst in der Dresdener Gegend, an einzelnen Stellen des Elbtales, die Temperatur bis zu diesem Punkt herabgegangen sein. Das würde ja auch mit den sehr tiefen Temperaturen, die wenige Tage zuvor, vom 5. Februar aus Thüringen (Erfurt — 29,5) sowie aus der Mark (Potsdam — 33°) gemeldet wurden, ungefähr übereinstimmen.

Selbstverständlich blieb in dieser kalten Zeit auch mittags die Temperatur andauernd beträchtlich unter Null (Eistage), 15 mal unter — 5° und 2 mal sogar noch unter — 10°, so daß selbst die direkte Sonnenbestrahlung kaum eine Spur der obersten Eis- und Schneeschicht aufzutauen vermochte.

Es sei an dieser Stelle hinzugefügt, daß die tiefsten, in Plauen seit 1864 gemessenen Minimaltemperaturen jedoch noch wesentlich unter obigen Wert von — 25,5° herabreichen. Sie betrugen — 32,5° im Februar 1871 und — 29,0° im Januar 1881.

Fast ebenso kalt wie 1917 wurde es im Januar 1908 (— 25,2°), während im Januar 1893 noch — 24,5 und im März 1886 — 24,1 abgelesen wurden. Innerhalb der letzten 6 Jahre, seit 1911, sank im übrigen die Temperatur nur ein einziges Mal unter — 20° (Februar 1912 — 20,6°), alle anderen Monatsminima blieben oberhalb dieser Grenze. In den 6 Jahren 1883—1888 trat dagegen dieser Fall jedes Jahr ein, wie sich ja überhaupt dieser ganze Zeitraum durch auffällig kalte Winter auszeichnete.

Im Hinblick auf die angesammelten, bedeutenden Schneemengen mußte es als ein wahres Glück bezeichnet werden, daß die große Periode strenger Kälte nicht unmittelbar von Tauwetter abgelöst wurde, wie es doch sonst häufig zu geschehen pflegt. Vielmehr lagen auch vom 11. bis 16. Februar die Tagesmittel noch andauernd unter Null. Rechnet man diese Tage als Nachläufer und andererseits die im Januar vorangehenden mit leichtem Frost hinzu, so kommt für Plauen eine ununterbrochene Reihe von 42 Tagen mit negativen Mittelwerten heraus. In dieser langen Zeit wurde nur 9 mal mittags der Nullpunkt erreicht und etwas überschritten — Maximum + 4° — 33 mal blieb das Maximum unter dem Gefrierpunkt.

In der Zeit vom 6. bis 10. Januar bildete sich infolge andauernder Schneefälle eine Schneedecke, die schon am 12. Januar eine Stärke von 18 cm, eine Woche später von $^1/_4$ m und Anfang Februar von reichlich $^1/_3$ m erreicht hatte. Die Schneebedeckung erhielt sich durch den ganzen Februar hindurch bis weit in den März hinein. Unter ihrer Einwirkung konnte sich an klaren Tagen die nächtliche Ausstrahlung zu ungewöhnlicher Intensität steigern. Ihr verdanken wir die oben erwähnte, große Zahl sehr tiefer Minimaltemperaturen.

Wir wenden uns nun zu den gleichzeitigen Beobachtungen im bayerischen Grenzgebiet. Die nachfolgende Übersicht enthält zunächst die Monatsmittel Dezember bis März für Hof, Alexandersbad und Bayreuth und nebenstehend die 30jährigen Mittelwerte, 1881—1910, die wir der vortrefflichen Arbeit von

E. Alt[1]) entnommen haben. Die entsprechenden Werte für Plauen fügen wir noch einmal hinzu:

	Hof $\varphi = 50^0\ 19'$ $\lambda = 11^0\ 55'$ $h = 476$ m		Alexandersbad $\varphi = 50^0\ 01'$ $\lambda = 12^0\ 01'$ $h = 590$ m		Bayreuth $\varphi = 49^0\ 57'$ $\lambda = 11^0\ 34'$ $h = 363$ m		Plauen $\varphi = 50^0\ 30'$ $\lambda = 12^0\ 08'$ $h = 369$ m	
	1916/17	1881/1910	1916/17	1881/1910	1916/17	1881/1910	1916/17	1881/1910
Dez.	+ 0,8°	— 2,1°	+ 0,0°	— 1,9°	+ 2,0°	— 1,6°	+ 1,6°	— 0,3°
Jan.	— 5,0	— 3,5	— 4,8	— 2,8	— 2,9	— 2,0	— 4,2	— 1,7
Febr.	— 5,9	— 1,7	— 5,7	— 1,3	— 3,6	— 0,3	— 4,5	— 0,2
März	— 1,6	+ 1,2	— 2,2	+ 1,1	+ 0,4	+ 2,7	— 0,8	+ 2,7
Winter	— 3,4	— 2,4	— 3,5	— 2,0	— 1,5	— 1,3	— 2,4	— 0,7

Hof und Alexandersbad hatten trotz eines Höhenunterschiedes von über 100 m den gleichen Mittelwert, daher scheint der Winter in Hof verhältnismäßig am strengsten aufgetreten zu sein. Auch gegen den Durchschnitt von Plauen ergibt sich noch ein Unterschied von 1°, der größer ist, als man nach dem Höhenunterschied von 100 m beider Orte erwarten sollte. Wesentlich milder ist er dagegen in Bayreuth verlaufen, wo der jahreszeitliche Durchschnittswert bei gleicher Höhenlage um fast 1° höher lag wie in Plauen. Die beigesetzten langjährigen Mittelwerte lassen erkennen, daß der Winter 1916/17 im Vogtland und im Fichtelgebirge um 1,5 bis 1,7° zu kalt war, während er im Maingebiet nur ganz wenig vom Normalwert abwich. Für Hof sind die Abweichungen vom langjährigen Mittel etwas zu klein, da für diese Station nur die rohen Mittel, gebildet aus Maximum und Minimum, verwendet werden konnten, die etwa 0,5° zu tief liegen.

Von den einzelnen Monaten war überall der Februar bei weitem am kältesten. Er war im Vogtland und im Fichtelgebirge um 4,2 bis 4,4° zu kalt, im Maingebiet dagegen nur

[1]) E. Alt: Temperaturmittel von Süddeutschland. Klimatologie von Süddeutschland, II. Teil. Sonderabdruck aus: Beob d. met. Stat. des Königr. Bayern 1912, Bd. XXXIV.

um 3,3°. Daß die Hofer Gegend, das „bayerische Sibirien", ganz besonders unter der Strenge des Winters zu leiden hatte, geht auch noch aus einigen Betrachtungen über die Minimaltemperaturen und die kältesten Tage hervor. In Hof sank die Temperatur im Januar und Februar nachts 15 mal unter — 15° und noch 8 mal unter — 20°, in Alexandersbad war sie 13 mal tiefer als — 15°, aber nur ein Mal tiefer als — 20°, und in Bayreuth gab es vollends nur an 11 Tagen Minima unter — 15° und an einem Tag ein solches von mehr als — 20°. Die absoluten Minima waren in Hof — 29°, in Alexandersbad — 23,0°, und in Bayreuth — 20,7° am 5. Februar. Zwischen Hof und Plauen bestand auch in dieser Beziehung eine weitgehende Ähnlichkeit, jedoch war es in Hof noch etwas kälter. In Hof zählte man 5 mal Tagesmittel unter — 15°, der kälteste Tag (5. Februar) hatte — 16,6° im Durchschnitt. Die zusammenhängende Frostperiode — Tage mit negativem Mittel — umfaßte 43 Tage, vom 5. Januar bis 17. Februar, und vom 15. Januar bis 11. Februar blieb auch der höchste Tageswert unter Null. In Bayreuth umfaßte die Kälteperiode nur 37 Tage, während an 23 Tagen das Maximum tiefer als Null war. In Alexandersbad hatte der kälteste Tag jedoch nur — 14,1°, und in Bayreuth (der 30. Januar) vollends nur — 12,8°. Vom 9. Januar an beobachtete Hof eine dauernde Schneedecke, die bis Ende des Monats auf 30 cm Stärke anwuchs und sich bis Mitte März erhielt. In Alexandersbad bestand die Schneebedeckung dauernd vom 6. Januar bis in den April hinein und erreichte Mitte Januar eine Höhe von 40 cm, in Bayreuth wurden Schneehöhen nur bis 18 cm gemessen, der Schnee blieb dort vom 6. Januar bis 23. Februar liegen.

Mit dem Februar hatte der letzte Winter aber keineswegs schon sein Ende erreicht, er übte vielmehr im Vogtland wie im Fichtelgebirge sein strenges Regiment auch noch bis in die letzten Tage des März aus. Sein Monatsmittel war ebenfalls negativ und lag überall weit unter dem normalen. In diesem Monat kannte man in Plauen wie in Nordbayern deutlich zwei längere Kälteperioden, vom 2. bis 10. und vom 21.

bis 25., sowie noch einen zwar nur 2 tägigen, aber ganz plötzlich einsetzenden Kälterückfall am 15. und 16. unterscheiden. Frostfrei verliefen nur 8 Tage, dagegen lag das nächtliche Minimum in Plauen 15 mal unter — 5° und noch 4 mal unter — 10°. Tiefster Wert überhaupt — 12° am 10. Frühlingsmäßige Mittagstemperaturen fehlten. Das Thermometer stieg nur am 18. ein Mal bis 9,2°. Somit läßt sich zusammenfassend über diesen Monat sagen, daß er mit seinen überreichen Schneefällen und einer 22 Tage anhaltenden Schneedecke einen durchaus winterlichen Charakter hatte und für Plauen einen normalen Februar an Kälte bei weitem übertraf. — In welcher Weise haben nun die verschiedenen meteorologischen Faktoren zusammengewirkt, um in ganz Mitteleuropa einen so außerordentlich strengen und lang andauernden Winter herbei zu führen? Eine Prüfung der täglichen Wetterkarten lehrt Folgendes: Wohl selten hat der so oft gebrauchte, von den Amerikanern entlehnte Ausdruck „Kältewelle“ eine solche Berechtigung gehabt wie diesmal. Denn eine breite und starke Welle kalter Luftmassen war es, die nach einer Reihe von normalen Wintertagen mit leichtem Frost am 17. Januar von Osten und Nordosten heranflutete. An diesem Tage und den beiden folgenden bewegte sie sich langsam über Ost- und Westpreußen, gleichzeitig auch nach Süden an Raum gewinnend. Am 20. Januar hatte sie Mitteldeutschland und damit unser engeres Witterungsgebiet erfaßt. Bis zum 22. hatte sie sich bereits westwärts bis nach Flandern ausgedehnt und unsere Westfront erreicht. Sie bedeckte vermutlich zu dieser Zeit schon einen beträchtlichen Teil Frankreichs. Hervorgerufen wurde diese fortschreitende kalte Welle durch die Ausbreitung eines ungewöhnlich starken Hochdruckgebiets über Skandinavien, dessen Kern längere Zeit über dem mittleren Schweden lagerte und dort zur Entwicklung eines ganz intensiven Kältezentrums Anlaß bot. Durch die Lage dieses Kerns und durch den ganzen Verlauf der Isobaren wurde wochenlang eine kräftige Strömung aus Nord bis Ost ausgelöst, die nur auf kürzere Zeit einmal eine Ablenkung über Nord nach Nordwest erfuhr, nachdem

das Hoch sich vorübergehend von Schweden nach dem Meere zu verschoben hatte. Hierdurch sowie durch flache, unser Gebiet streifende Teilwirbel wurden Ende Januar stärkere Schneefälle bedingt. Andererseits breitete sich im Februar der hohe Druck zeitweise bis über Mitteldeutschland aus. Unter seiner unmittelbaren Einwirkung kam es über der starken, weit ausgedehnten Schneedecke im Norden wie im Süden, im Osten wie im Westen zur Entfaltung von Strahlungskälte, wie wir sie so anhaltend und so durchgreifend seit langem nicht mehr beobachten konnten. Die von Norden und Osten her uns zugeführte Kälte dynamischen Ursprungs erfuhr daher in den ersten Tagen des Februar bei ruhigem, vorwiegend heiterem, allerdings aber auch vielfach nebeligem Wetter eine weitere Steigerung. Würde man die Transportkälte von der Strahlungskälte zu unterscheiden versuchen, so könnte man sagen: Die kalte Luftwelle erreichte Sachsen am 19. Januar. Am 21. trat Aufheiterung ein und unter deren Einwirkung hatten wir zum ersten Male Strahlungskälte von — 18 bis — 22°, die mehrere Tage fast unvermindert anhielt. Darauf folgte Trübung und eine Milderung der Kälte gegen Ende Januar. Am 3. Februar ließen die Schneefälle nach, es trat wiederum Aufheiterung und damit verbunden zum zweiten Male eine bedeutende Strahlungskälte ein, die vom 5. bis 9. ihren Höhenpunkt erreichte und erst am 10. Februar durch eine erneute Trübung vorläufig zum Abschluß kam, aber im März noch mehrere Male in abgeschwächter Form wiederkehrte.

Die ganze Wetterlage war seit Mitte Januar ein Musterbeispiel für eine „Kältelage", wie man es schöner in der Witterungsgeschichte der letzten 50 Jahre kaum wieder finden wird, wir hatten es, um einen Ausdruck von Teisserenc de Bort zu wiederholen, mit einem „Aktionszentrum" erster Ordnung über Skandinavien zu tun, das sich wochenlang fast unvermindert erhielt und selbst dem ersten Frühlingsmonat ein unwillkommenes Erbe hinterließ. Unter solchen Umständen spürt auch Deutschland gelegentlich ein Mal den Eiseshauch aus dem Inneren Rußlands. An dieser Stelle sei darauf hin-

gewiesen, daß wir eine ganz ähnliche Wetterlage mit einem ebenso dauerhaften Aktionszentrum über Skandinavien und dementsprechend einen ähnlich strengen Winter im Januar und Februar 1895 hatten, dessen Temperaturverlauf mit dem des vergangenen Winters auffallende Ähnlichkeit aufweist. Die später zu erwähnenden graphischen Darstellungen werden hierüber näheren Aufschluß geben. — Daß die Strahlungskälte selbst in einem räumlich eng begrenzten Gebiet durch örtliche Verhältnisse, durch vorübergehende Trübung, wie durch starke Nebelbildungen ganz auffallend beeinflußt werden kann, ließ sich während der großen Kälteperiode an den sächsischen Stationen mehrfach feststellen. Es seien zum Beweis hierfür aus den Wetterkarten der Kgl. Sächs. Landeswetterwarte einige besonders bemerkenswerte Fälle aus den gleichzeitigen Morgenbeobachtungen herausgegriffen:

		Morgentemperaturen ° C.					
	Höhe in m	19. Jan.	21. Jan.	24. Jan.	31. Jan.	5. Febr.	9. Febr.
Leipzig	119	−3,6	−13,3	− 4,5	− 8,7	**−22,1**	−23,3
Bautzen	202	−4,2	−13,4	− 5,6	− 8,4	−13,9	−12,9
Zschadraß	220	−2,9	−13,5	− 6,2	− 7,6	−17,8	−13,2
Zittau	245	−4,2	**−18,5**	−11,8	− 8,1	−17,1	−13,4
Wahnsdorf[1])	246	−3,4	−15,0	− 7,0	− 8,5	−17,4	−14,4
Chemnitz	332	−3,4	−13,5	−12,9	− 8,9	−20,9	−11,5
Plauen	369	−3,0	**−17,9**	**−20,7**	**−12,0**	−21,4	**−24,8**
Freiberg	398	−4,3	− 9,9	− 9,5	− 8,3	−15,1	−12,3
Schneeberg	435	−3,6	− 9,9	−10,4	− 9,6	−20,3	−16,7
Elster	500	−2,6	−10,5	−16,0	−11,2	−20,0	−12,0
Annaberg	621	−5,0	−11,0	− 7,5	−10,0	−16,6	−10,0
Allenberg	751	−7,0	−10,6	−10,0	−10,1	−15,1	−10,6
Reitzenhain	772	−6,5	−13,6	− 9,9	−11,0	−18,5	−14,9
Fichtelberg	1213	−8,0	−12,9	−12,1	−13,0	−10,0	−10,3
Hof	476	−3,1	−11,0	−15,8	−11,0	**−28,8**	−21,9
Alexandersbad	590	−2,8	−12,9	−11,5	− 9,7	−22,5	−17,3
Bayreuth	363	−1,5	− 5,7	−11,8	−14,7	−19,1	−16,5

[1]) Landeswetterwarte Wahnsdorf bei Dresden.

Während am Morgen des 19. Januar, kurz vor dem Herannahen der großen Kältewelle, die Verteilung der Temperaturen im Lande entsprechend der Höhenlage noch annähernd normal war, hatten wir am 21. Januar schon höchst auffallende, örtliche Abweichungen. Im Norden Sachsens wurden etwa — 13,5°, im Vogtland bis zu — 18° (Plauen) beobachtet, im Erzgebirge bis hinauf zum Kamm nur — 10 bis — 13½ und am Fichtelberg selbst — 13°. Die Inversionsschicht reichte also bis etwa auf 500 m hinab. Sehr merkwürdig bleibt aber die sehr tiefe Temperatur von Plauen gegenüber derjenigen von Bad Elster (— 10,5°), dessen Entfernung in Luftlinie kaum 30 km beträgt. Noch weit unregelmäßiger gestaltete sich die Temperaturverteilung am 24. Januar, an welchem Tage sich über dem Vogtland ein kleines, mit starker Kälteentwicklung verbundenes „Teilhoch" erhalten hatte, während der ganze Norden Sachsens ebenso wie das bayerische Grenzgebiet ein wesentliches Nachlassen der strengen Kälte meldete.

Wie die Kartenskizze auf Fig. I zeigt, bestand zwischen Plauen und Leipzig ein Temperaturunterschied von reichlich 16° bei einer direkten Entfernung von wenig mehr als 100 km; zwischen Plauen und Hof noch ein solcher von 5°. Plauen genoß an diesem Tage den zweifelhaften Ruhm, unter sämtlichen deutschen und außerdeutschen Wetterstationen weitaus die kälteste zu sein, selbst Haparanda und Kobylnik eingerechnet. Bis zum Ende des Monats glichen sich diese Anomalien nach Eintritt von Trübung größtenteils wieder aus, um erst im Februar bei Wiedereinsetzen der Strahlungskälte erneut in die Erscheinung zu treten. Als Beispiele wurden der 5. und 9. Februar gewählt. Am 5. Februar konnte man ein Kältegebiet mit mehr als — 20° im Norden von einem zweiten von gleicher Intensität über dem Vogtland, dem Erzgebirgsfuß und Nordbayern (Plauen-Chemnitz-Hof) unterscheiden, die beide durch eine etwas weniger kalte Zone getrennt waren. Hof meldete an diesem Tag — 29°, eine Kälte, die von keiner andern bayerischen Station in diesem Winter erreicht wurde. Der Erzgebirgskamm und der Gipfel hatten wieder starke Tem-

peraturumkehr. Am 9. Februar endlich gab es 2 Kälteinseln um Leipzig und um Plauen-Hof mit — 23 bzw. — 25°, während alle anderen Stationen bedeutend, z. T. bis zu 15° wärmer waren. Die stärkste Inversion kam allerdings erst am folgenden Tag, an dem der Fichtelberg + 2,2°, Plauen aber noch — 18,7° beobachtete, so daß der Unterschied fast 21° betrug. Die Fälle von Temperaturumkehr am Fichtelberg und an den Kammstationen des Erzgebirgs waren während der großen Kälteperiode sehr häufig; sie alle aufzuführen, würde zuviel Raum beanspruchen, doch sei nur kurz bemerkt, daß die Erscheinung regelmäßig dann auftritt, wenn der Kern des Hochdruckgebiets über Sachsen selbst oder im Südosten, über dem benachbarten Böhmen liegt. Dann stellt sie sich aber auch mit solcher Pünktlichkeit ein, daß sie aus den Wetterkarten abzulesen bzw. vorauszusagen ist. Für Gebirgsfreunde, die dem Wintersport obliegen, ist das insofern von Bedeutung, als zu den Zeiten einer solchen Temperaturinversion meist eine besonders schöne Fernsicht vom Gipfel sich darbietet.

Die soeben erwähnte Umkehr vom 10. Februar kommt auch in den Beobachtungen des aëronautischen Observatoriums Lindenberg recht scharf zum Ausdruck. An diesem Tage wurden gemessen: Unten in 122 m Höhe — 4,8°, in 500 m — 0,8°, in 1000 m + 0,8°, in 1500 m + 3,0°, in 2000 m + 1,5°, in 3000 m — 4,7°. Erst in der Höhe der Zugspitze wurde also die Temperatur der Bodenstation wieder erreicht und ihre größte Intensität hatte die Erscheinung in einer Höhenlage ungefähr zwischen Fichtelberg und Schneekoppe.[1]) — Um den Verlauf der Temperatur übersichtlich darzustellen, geben wir zum Schluß für das sächsisch-bayerische Grenzgebiet die Pentadenmittel der 3 Wintermonate, denen wir den November als Vorwinter und den März als Nachwinter anfügen. Diesen Werten stellen wir die 30 jährigen Pentadenmittel 1876/1905

[1]) Auch in den bayerischen Alpen machte sich diese Temperaturumkehr sehr deutlich bemerkbar. Am Morgen des 10. Februar hatte München, 520 m, — 13,8°, Partenkirchen, 720 m, — 11,0°, Zugspitze, 2962 m, — 7,0°.

für Plauen vergleichsweise gegenüber und greifen aus den früheren Wintern noch den von 1894/95 heraus, dessen Verlauf, wie schon erwähnt, in vieler Beziehung mit dem verflossenen Ähnlichkeit zeigt.

Pentadenmittel vom 2. November bis 31. März

	Plauen			Hof	Alexandersbad	Bayreuth
	1916/17	30 j. Mittel 1876/1905	1894/95	1916/17	1916/17	1916/17
2.—6. Nov.	8,5°	4,9°	6,8°	7,5°	6,8°	8,6°
7.—11. „	7,8	4,2	5,9	6,3	5,7	7,3
12.—16. „	3,7	3,1	6,9	2,3	1,6	3,4
17.—21. „	− 0,2	2,2	5,5	− 1,0	− 1,6	0,7
22.—26. „	3,5	1,7	0,6	+ 2,2	+ 1,2	2,1
27.—1. Dez.	0,0	1,2	0,3	− 0,8	− 1,5	0,5
2.—6. „	2,9	0,4	0,9	+ 2,8	+ 2,3	+ 3,8
7.—11. „	1,4	− 0,2	− 0,1	+ 1,3	+ 0,4	+ 1,0
12.—16. „	+ 1,2	+ 0,2	− 1,8	+ 0,3	− 0,9	+ 1,0
17.—21. „	− 1,8	− 0,4	+ 0,8	− 4,0	− 4,9	− 1,3
22.—26. „	+ 2,8	− 1,4	+ 0,2	+ 2,4	+ 1,6	+ 4,1
27.—31. „	+ 3,6	− 1,0	− 0,7	+ 2,6	+ 2,1	+ 4,1
1.—5. Jan.	+ 5,4	− 1,8	− 4,7	+ 4,7	+ 3,9	+ 6,0
6.—10. „	− 1,1	− 2,1	− 7,3	− 1,8	− 2,4	− 0,4
11.—15. „	− 2,8	− 2,9	− 2,5	− 3,8	− 3,8	− 2,2
16.—20. „	− 3,6	− 2,2	+ 2,5	− 4,0	− 4,1	− 2,5
21.—25. „	− 12,6	− 1,4	− 1,0	− 12,7	− 11,0	− 7,8
26.—30. „	− 9,6	− 0,9	− 8,8	− 11,5	− 10,8	− 9,5
31. Jan.— 4. Febr.	− 11,3	− 0,4	− 6,7	− 11,3	− 11,2	− 9,0
5.— 9. „	− 13,7	− 0,7	− 13,0	− 14,8	− 12,3	− 8,6
10.—14. „	− 3,3	− 0,5	− 11,7	− 3,6	− 4,7	− 3,9
15.—19. „	− 0,2	+ 0,1	− 5,2	− 2,9	− 2,2	− 0,7
20.—24. „	− 1,1	+ 0,7	− 1,3	− 2,4	− 3,3	− 1,0
25. Febr.—1. März	+ 0,8	+ 1,1	− 1,9	+ 0,4	− 0,4	+ 1,4
2.—6. „	− 3,7	+ 0,7	− 4,7	− 4,5	− 5,6	− 2,2
7.—11. „	− 3,2	+ 1,8	− 2,0	− 3,7	− 3,7	− 1,0
12.—16. „	+ 0,7	+ 1,8	+ 0,8	− 0,4	− 1,0	+ 1,8
17.—21. „	+ 2,0	+ 3,1	+ 2,2	+ 0,8	+ 0,3	+ 2,7
22.—26. „	− 2,5	+ 3,1	+ 5,0	− 2,9	− 3,7	− 1,5
27.—31. „	+ 1,8	+ 5,1	+ 5,8	+ 0,9	− 0,2	+ 2,6

Aus dieser Zusammenstellung und der daraus abgeleiteten Pentadentafel Fig. II—V ist zunächst eine weitgehende Übereinstimmung im Temperaturverlauf zwischen Plauen, Hof und Alexandersbad zu erkennen. Die große Kälteperiode von Mitte Januar bis Mitte Februar zeigt im Vogtland wie im Fichtel-

gebirge gleiche Dauer und Intensität. Die vorhergehende kleine Kältewelle im Dezember ist dagegen im Fichtelgebirge schärfer ausgeprägt, dasselbe gilt auch vom Nachwinter im März mit seinen zwei Kälterückfällen im ersten und letzten Drittel des Monats. Die Kurve von Bayreuth weist dagegen sowohl für die große Kältewelle wie auch für die vorangehenden und nachfolgenden kleinen Frostperioden nicht unwesentliche Milderungen auf. — Die Tabelle lehrt ferner, daß im Vogtland den beiden Wintern 1916/17 und 1894/95 das Hauptmerkmal, nämlich eine zusammenhängende große Kälteperiode im Januar und Februar mit fast den gleichen tiefen Werten gemeinsam ist. In beiden Fällen ging dieser großen Kältewelle eine kleinere voraus, die allerdings im vergangenen Winter nur geringe Bedeutung hatte und auf eine Pentade um die Mitte des Dezember beschränkt blieb. 1894/95 gab es sowohl Anfang Januar wie auch schon vor Mitte Dezember Kältewellen, von denen die erstere recht beträchtliche tiefe Werte von — 7,3° aufwies. In beiden Wintern war der Temperaturverlauf von November bis März durch sehr große Schwankungen gekennzeichnet. Sie erreichen im letzten Winter in den Pentadenmitteln für Plauen 22,2° und 1894/95 noch 19,9°. Ganz auffallend sind jedoch im vergangenen Winter die Schwankungen vom 1. Januar bis 10. Februar, die in den Fünftagsmitteln noch über 19° ausmachen, während 1894/95 die Temperatur in dieser Zeit nur 15,5° Abweichungen der Pentaden ergab. Um diese Schwankungen noch mehr hervortreten zu lassen, haben wir für Januar und Februar 1917 auch noch die Kurve der Tagesmittel für Plauen dargestellt (Fig. VI). Die ausgeglichene Pentadenkurve erscheint dadurch in eine größere Anzahl kleinerer Wellen aufgelöst. Die Unterschiede in den Tagesmitteln betragen im Januar allein über 23°.

Endlich ist noch auf ein gemeinsames Merkmal im März hinzuweisen, der sowohl 1895 wie 1917 noch durchaus winterlichen Charakter hatte. Während aber der März 1917 von 2 deutlich erkennbaren Kältewellen, die sich von denen des eigentlichen Winters abheben, heimgesucht war, hatte der März 1895

nur noch eine solche aufzuweisen, die in das erste Drittel des Monats fiel. Von da an erfolgte eine gleichmäßige Zunahme der Temperatur bis zum Monatsschluß.

Im langjährigen Mittel gleichen sich diese beträchtlichen Schwankungen, wie man sieht, bis auf kleine Reste aus. Jedoch bleibt im ersten Drittel des Dezember eine kleine Kälteperiode angedeutet, die von der Hauptkältewelle des Januar durch einen Temperaturanstieg getrennt wird. Auch im Februar und März sind noch kleinere Schwankungen als Reste besonders häufig auftretender Wellen wahrnehmbar.

Im Hinblick auf die Ähnlichkeit, die zwischen der Temperaturkurve des letzten Winters und der des Winters 1894/95 zweifellos vorhanden ist und in Rücksicht auf die Übereinstimmung der meteorologischen Faktoren, denen die Winterkälte in beiden Fällen zuzuschreiben war, lag es nahe, die Untersuchung noch etwas weiter auszudehnen und die Frage zu berühren, ob auch im weiteren Verlauf des Jahres noch eine größere Ähnlichkeit im Gang der Temperatur sich ergeben würde. Vor allem schien es von Interesse, zu prüfen, welchen Charakter der auf einen so strengen Winter nachfolgende Sommer haben würde.

Auf den Winter 1894/95 folgte ein besonders schöner und warmer Sommer. Der Wärmeausgleich begann bereits im April und von Mai bis September waren alle Monate ausnahmslos zu warm.

Auf Grund dieser Feststellung lag es nahe, auch für den Sommer 1917 einen kräftigen, allerdings unter großen Schwankungen sich vollziehenden Wärmeausgleich anzunehmen, somit also einen warmen und trockenen Sommer vorauszusagen,[1]) während die Mehrzahl aller auf diesen Sommer gerichteten Prophezeiungen auf Grund rein statistischer Erwägungen das Gegenteil, nämlich einen kühlen und feuchten, auf jeden Fall unternormalen Sommer voraussahen. Die Tatsachen haben unsere Vermutung bestätigt. Der Sommer 1917 war nicht nur warm und trocken, sondern einer der wärmsten seit langer Zeit.

Auf den winterlichen März folgte zwar ein wiederum äußerst

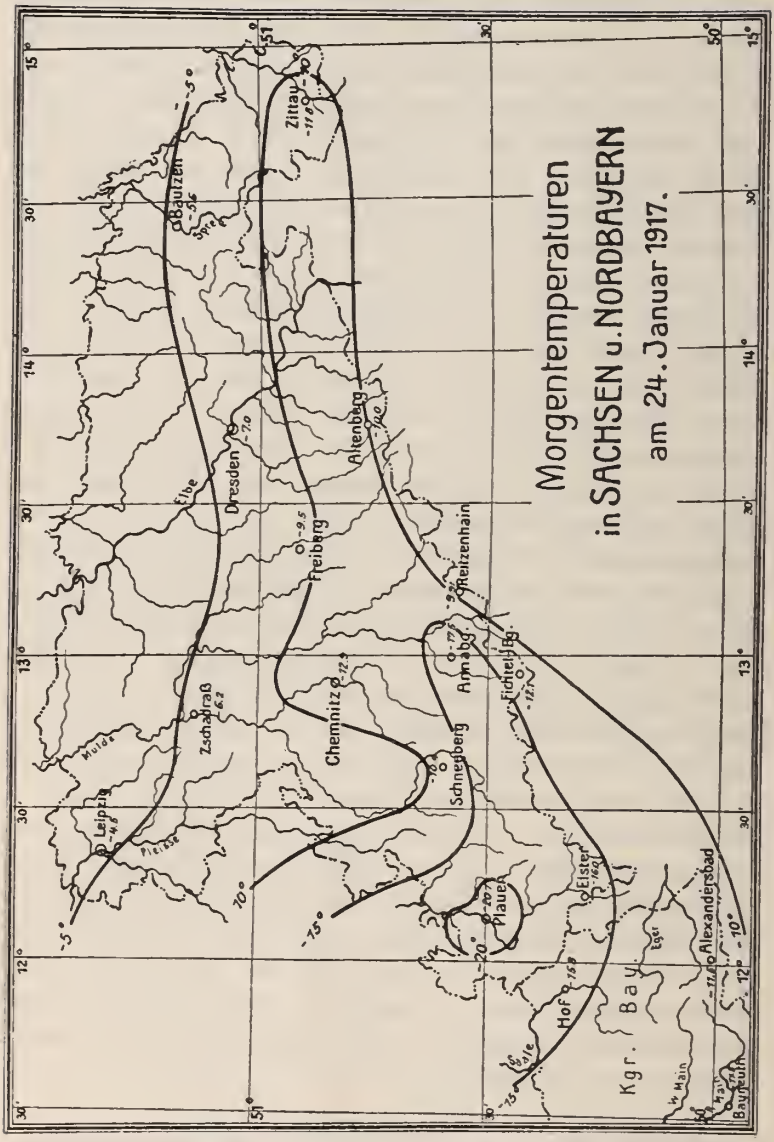
[1]) Vogtl. Anzeiger Nr. 74, 30. März 1917.

unfreundlicher und viel zu kalter April. Dann aber vollzog sich zur Überraschung der ganzen Welt und nicht zum wenigsten auch der meteorologischen Fachkreise ein Wärmeausgleich in ganz unerhörter Schnelligkeit und Stärke, man möchte sagen in geradezu stürmischer Entwicklung. Der Mai war in Plauen einer der wärmsten, die je vorkamen. Sein Wärmeüberschuß betrug $4^1/_2{}^0$. Der Juni vollends war um 5^0 zu warm. Mit **19,6°** Mitteltemperatur war dieser Monat der wärmste Sommermonat, den Plauen seit 54 Jahren, seit Bestehen der meteorologischen Station, überhaupt erlebt hat. Selbst die heißen Monate des unvergeßlichen Jahres 1911, Juli und August bleiben noch um einige Zehntel Grad hinter diesem Wert zurück. Auch der Juli war mit 17,9° noch über 1° zu warm. Zwischen Februar und Juni bestand in den Monatsmitteln also ein Unterschied von rund 24° (normal 15,7°) zwischen dem kältesten Tag des Winters und dem heißesten des darauf folgenden Sommers ein solcher von 41,7° und der Gesamtspielraum der Temperatur von Februar bis Juni, vom absoluten Minimum zum höchsten sommerlichen Mittagswert umfaßte beinahe 58°[1]). Rechnet man noch die höchst auffallenden Unterschiede zwischen den überreichlichen, winterlichen Niederschlägen, den gewaltigen Schneemengen, die noch im März vom Himmel herabkamen und der vielfach beängstigenden Dürre des Juni und Juli hinzu, so drängt sich die eine Tatsache mit Sicherheit schon jetzt hervor, daß das Jahr 1917 mit seinen wohl noch nie in solchem Maße beobachteten Witterungsgegensätzen zu den denkwürdigsten der ganzen Witterungsgeschichte gehören wird. Es liegt nahe, für diese großen Störungen des normalen Witterungsverlaufs außerirdische Ursachen als bestimmend anzunehmen. Ob und inwieweit das Sonnenfleckenmaximum zu Beginn des Jahres 1917 auf den Temperaturverlauf eingewirkt habe, müssen weitere Einzeluntersuchungen nachweisen.

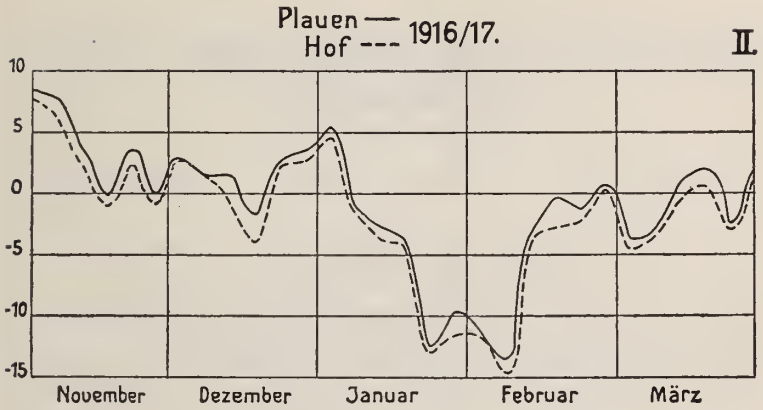
---

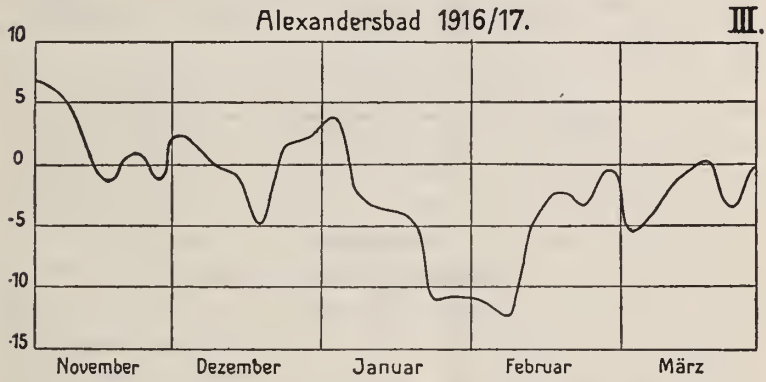
[1]) In Hof war das Maximum 32,6°, so daß ein Unterschied von 61,6° herauskommt.

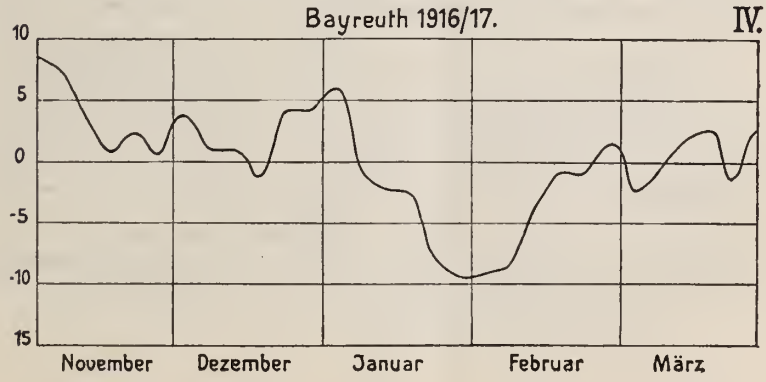
I.


Morgentemperaturen
in SACHSEN u. NORDBAYERN
am 24. Januar 1917.
Bautzen
Zittau
Dresden
Elbe
Altenberg
Freiberg
Reitzenhain
Annabg.
Fichtel-Bg.
Chemnitz
Schneeberg
Zschadraß
Leipzig
Mulde
Pleisse
Plauen
Elster
Hof
Kgr. Bay.
Alexandersbad
Eger
Bayreuth
W. Main
Saale

Pentadentafel





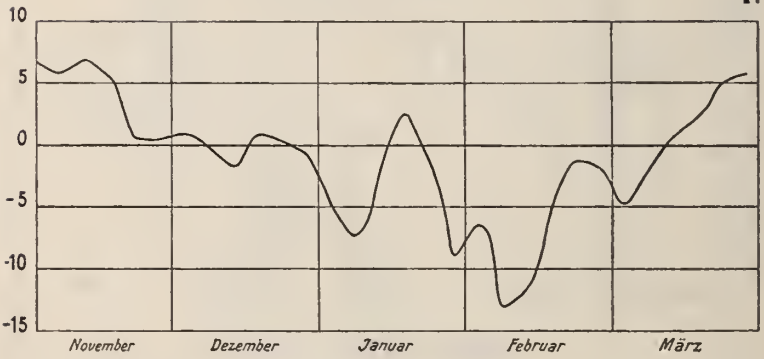


Pentadentafel

Plauen

Temperaturverlauf Nov. 1894 – März 1895.
Pentadenmittel.

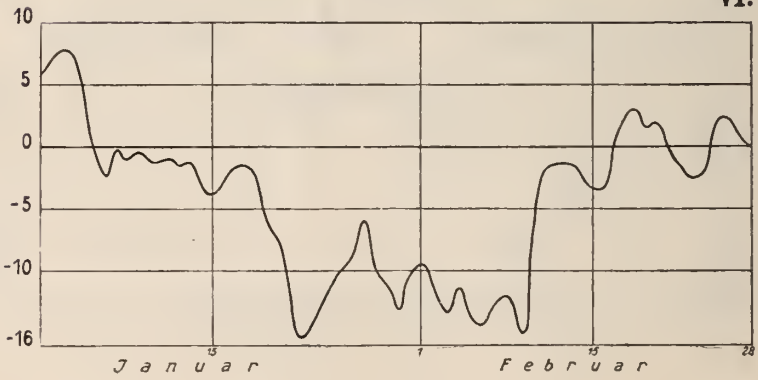
V.



Plauen

Temperaturverlauf Januar u. Februar 1917.
Tagesmittel.

VI.



Optisches Drehungsvermögen und Schraubungsaxen regulärer Kristalle.

Von **A. Johnsen** in Kiel.

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 4. Mai 1918.

I. Entwicklung des Problems.

Die Schraubungsaxen wurden durch L. Sohncke[1]) in die Theorie der Kristallstruktur eingeführt. Die durch solche Axen ausgezeichneten Punktsysteme lassen sich auf zwei Gruppen verteilen. Entweder verläuft parallel jeder Axenschar eine gleichwertige mit entgegengesetztem Windungssinn oder nicht. Im letzteren Falle liegen Punktsysteme vor, die mit ihrem Spiegelbilde nicht kongruent sind und daher Kristallen entsprechen, die keinerlei Spiegelungen oder Drehspiegelungen besitzen; auf derartige Kristalle aber ist erfahrungsgemäß die optische Aktivität beschränkt. Daher hat L. Sohncke[2]) in jenen Schraubungsaxen eine Ursache des Drehungsvermögens aktiver Kristallarten erblickt und diesen den Besitz solcher Axen zugeschrieben; in der Tat konnte er durch Rechnung auf Grund Mallardscher[3]) Ansätze sowie durch Experiment zeigen, daß bestimmte hexagonale, rhomboedische und tetragonale Strukturen ein Drehungsvermögen in Richtung der optischen Axe aufweisen müssen.

Innerhalb des kubischen Kristallsystems sind erfahrungsmäßig tetartoedrische und vermutlich auch plagiedrische Kristallarten einer optischen Aktivität fähig; hier bewies Sohncke, daß gewisse tetartoedrische Strukturen ein Drehungsvermögen

[1]) L. Sohncke, Entwicklung einer Theorie der Kristallstruktur. Leipzig 1879.

[2]) L. Sohncke, Zeitschr. f. Krist. 19. 541. 1891.

[3]) E. Mallard, Traité de cristallographie 2. 262. 1884.

in Richtung ihrer drei zweizähligen Schraubungsaxen ergeben. Die in der Literatur verbreitete Angabe, jener Physiker habe Drehungsvermögen nur für die genannten drei Richtungen nachweisen können, ist mißverständlich. Die Sache liegt nämlich so, daß Sohncke seine Untersuchung lediglich für jene drei Richtungen ausgeführt und ausdrücklich als unvollständig bezeichnet hat. Insonderheit ist bei Sohncke nicht die Rede von den vier dreizähligen Schraubungsaxen der tetartoedrischen Strukturen sowie von den plagiedrischen Aggregatzuständen, in denen außer drei vierzähligen und vier dreizähligen noch sechs zweizählige Schraubungsaxen auftreten.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß man für alle Richtungen eines regulär-tetartoedrischen oder -plagiedrischen Kristalles ein und dasselbe Drehungsvermögen erhält, wenn man eine sehr einfache Voraussetzung macht. Hierzu muß zunächst ein mathematischer Satz mitgeteilt sein, der anscheinend neu ist.

II. „Verallgemeinerter Kosinusquadratsatz."

Die fünf Platonischen Körper (Würfel, Oktaeder, Tetraeder, Ikosaeder und Pentagondodekaeder) unterliegen folgendem Gesetz. Umfaßt irgend eine Symmetrieaxenart n gleichwertige, also durch die Symmetrieoperationen des Polyeders ineinander übergehende Axen und bilden diese mit einer beliebigen Richtung R die n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$, so gilt

$$\sum_{r=1}^{n} \cos^2 \varphi_r = C, \tag{1}$$

wo C eine rationale Konstante darstellt; die Summe der n Kosinusquadrate ist also unabhängig von der Richtung R, was eine Verallgemeinerung des für rechtwinklige Koordinatensysteme bekannten Kosinusquadratsatzes bedeutet.[1])

III. Der skalare Charakter des Drehungsvermögens regulärer Kristalle.

Nehmen wir an, daß die optische Drehung regulärer Kristalle von den Schraubungsaxen ausgeht, so wird die von einer solchen

[1]) Ob (1) auch für gewisse andere Polyeder gilt, bleibt zu unter-

Axe A verursachte Drehung α_φ einer Richtung R um so geringer sein, je mehr sich der Winkel φ zwischen A und dem Lichtstrahl R dem Werte $\frac{\pi}{2}$ nähert, so daß α_φ ein Maximum α für $\varphi = 0$ und gleich Null für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird; wir setzen die Drehung α_φ einer variablen Richtung R gleich dem Produkt aus α und einer jenen Bedingungen genügenden Funktion $f(\varphi)$ des Winkels φ, also

$$\alpha_\varphi = \alpha \cdot f(\varphi). \tag{2}$$

Nun sind aber n untereinander gleichwertige Schraubungsaxen A und somit n Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ vorhanden, so daß man für die Gesamtdrehung der Polarisationsebene des Strahles R erhält

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{\varphi_r} = \alpha \sum_{r=1}^{n} f(\varphi_r). \tag{3}$$

Überdies haben wir im allgemeinsten Fall mehrere Arten von Schraubungsaxen, nämlich drei vierzählige Axen A_w, vier dreizählige Axen A_o und sechs zweizählige Axen A_d, deren jede in ihrer eigenen Richtung die Drehung α_w bzw. α_o bzw. α_d verursacht. Daher geht (3) in folgendes Gleichungstripel über

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{r=1}^{3} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_w \sum_{r=1}^{3} f(\varphi_r) \\ \sum_{r=1}^{4} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_o \sum_{r=1}^{4} f(\varphi_r) \\ \sum_{r=1}^{6} \alpha_{\varphi_r} &= \alpha_d \sum_{r=1}^{6} f(\varphi_r). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Den oben an die Funktion $f(\varphi)$ gestellten Bedingungen wird offenbar genügt, wenn man annimmt

$$f(\varphi_r) = \cos^2 \varphi_r. \tag{5}$$

Setzt man demnach $\cos^2 \varphi_r$ rechtsseitig in (4) ein, so ergibt sich in Übereinstimmung mit (1)

---

suchen. Übrigens fand Herr O. Toeplitz (Kiel), nachdem ihm dieser Satz mitgeteilt war, zwischen C und n die Beziehung $C = \frac{n}{3}$.

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{3} a_{\varphi_r} = a_w \\ \sum_{r=1}^{4} a_{\varphi_r} = {}^4/_3\, a_o \\ \sum_{r=1}^{6} a_{\varphi_r} = 2\, a_d. \end{cases}$$

Die Konstante C von (1) wird hier also gleich 1 bzw. $^4/_3$ bzw. 2.

Die rechten Seiten von (6) sind frei von φ. Folglich ist der Drehungswinkel aktiver regulärer Kristalle unabhängig von der Richtung des Strahles, einerlei, welche und wieviele der verschiedenen Arten von Schraubungsaxen optisch wirksam sind. Dieses Ergebnis folgt aus dem mathematischen Satze (1) und aus der Annahme, daß gemäß (5) die optische Drehung, welche von irgend einer Schraubungsaxe A auf eine beliebige Strahlrichtung R entfällt, proportional dem Quadrate des Kosinus von $\widehat{AR}$ ist. Wieweit diese Voraussetzung (5) physikalisch berechtigt erscheint, müssen künftige Untersuchungen zeigen.[1])

Kiel, den 1. März 1918.

---

[1]) **Anm. während des Druckes.** Herr Seb. Finsterwalder (München) machte mich gütigst auf folgendes aufmerksam. Aus $\Sigma \cos^2\varphi = \text{constans}$ ergibt sich, daß auch $\Sigma \sin^2\varphi$ konstant ist. Nun stellt aber $\Sigma \sin^2\varphi$ das Trägheitsmoment punktförmiger Masseneinheiten, die auf einer Kugel vom Radius Eins liegen, in bezug auf einen beliebigen Kugeldurchmesser dar, welcher mit den nach jenen Massenpunkten verlaufenden Radien die Winkel φ bildet. Liegen nun diese Massenpunkte so wie die Berührungspunkte eines eingeschriebenen oder umgeschriebenen regelmäßigen (Platonischen) oder halbregelmäßigen (Archimedischen) Polyeders, so degeneriert das in bezug auf das Kugelzentrum gebildete Trägheitsellipsoïd zu einer Kugel, d. h. das Trägheitsmoment ist dann unabhängig von der Richtung des als Trägheitsaxe betrachteten Kugeldurchmessers und es wird $\Sigma \sin^2\varphi = \text{constans}$. Mithin gilt auch unser Satz $\Sigma \cos^2\varphi = \text{constans}$ ebenso für die halbregelmäßigen wie für die regelmäßigen Körper.

Zur Theorie der Kurven im Raume.

Von A. Voss.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1918.

Die allgemeine Theorie der Kurven C im Raume beschäftigt sich seit den Untersuchungen von Monge und seinen Schülern wesentlich mit dem Verhalten der abwickelbaren Flächen D, die zu C in einer gewissen Beziehung stehen. Diese Flächen D werden entweder von Ebenen umhüllt, die auf C senkrecht stehen (Polardeveloppabele von C), oder von den rektifizierenden Ebenen von C; endlich werden auch die Filarevoluten von C von Tangentenebenen der C umhüllt, deren Charakteristiken auf C senkrecht stehen.

Dagegen hat sich, soweit mir bekannt ist, die Betrachtung bisher nicht auf die allgemeinen D-Flächen erstreckt, welche von Tangentenebenen der C umhüllt werden. Obwohl diese D einfach durch Enveloppenbildung, aber auch auf anderen Wegen (§ I) entstehen, geben sie doch zu vielen interessanten und, wie ich glaube, neuen Untersuchungen Veranlassung. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei die Bestimmung der Krümmungseigenschaften der D-Flächen in § II, sodann ihr Zusammenhang mit dem allgemeinen Problem der Traktorien. Das letztere wird hier auf zwei verschiedenen Wegen behandelt, von denen der eine, § X, eine neuerdings von Darboux geführte Untersuchung auf die Lösung einer in der einfachsten Weise aus den natürlichen Variabeln ϱ, τ, s der Kurve C gebildeten Riccatischen Gleichung zurückführt, während der andere, den Durchgang durch das Imaginäre vermeidend, die

Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung 3. resp. 4. Ordnung verlangt, und in § IX zur Bestimmung der Huygensschen Traktorien der Helix benutzt ist. Bei diesen Untersuchungen kommt häufig in Betracht, daß die Integration einer Differentialgleichung von scheinbar verwickelter Form von der Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung nächst höherer Ordnung abhängig wird, deren Integrationskonstanten dann nicht mehr willkürlich bleiben. In der Tat läßt sich jede linear-homogene $D_n = 0$ von z auf eine nicht lineare D_{n-1} an σ von allerdings ganz speziellem Charakter durch die Substitution $z' = z\sigma$ reduzieren, und die Koeffizienten der letzteren müssen, wie ich im § VIII zeige, einem System von gleich Null gesetzten Invarianten in Bezug auf Transformationen der abhängigen und unabhängigen Variabeln genügen, welches für die einfachsten Fälle $n = 2$, 3, 4 . . . aufgestellt ist.

In dem letzten Paragraphen sind endlich spezielle Fragen behandelt, die sich sehr viel weiter hätten ausdehnen lassen, von denen hier nur noch die der räumlichen Traktorien des Kreises, und die Bestimmung der durch einen Kreis gelegten Schraubenlinien hervorgehoben sei.

§ I.

Abwickelbare Flächen D durch eine Kurve im Raum.

Es sei C eine willkürliche Kurve im Raum,[1]) deren Punkte $x\,y\,z$ durch P, deren Bogenlänge von einer bestimmten Stelle aus gerechnet mit s, und die Richtung der Tangente bei wachsendem s, sowie die der Haupt- und Binormale durch das System der Richtungscosinus

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

[1]) Im folgenden wird unter einer Kurve im Raum jede ebene oder nicht ebene Kurve verstanden, die im Raum betrachtet wird; eine Raumkurve ist dagegen eine Kurve mit von Null verschiedener Torsion.

mit der Determinante $+1$ (das charakteristische Triëder von C) bestimmt sind, ferner ϱ und τ der Krümmungs- und Torsionsradius ist. Dann gelten die Frenetschen Gleichungen

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma$$

A)
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\zeta}{\varrho}$$

$$\frac{d\xi}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right), \quad \frac{d\eta}{ds} = -\left(\frac{\beta}{\varrho} + \frac{\mu}{\tau}\right), \quad \frac{d\zeta}{ds} = -\left(\frac{\gamma}{\varrho} + \frac{\nu}{\tau}\right).$$

Bei beliebiger Annahme der unabhängigen Variabeln t an Stelle von s ist

B)
$$\varrho = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}$$

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{\Delta \varrho^2}{s'^6},$$

wobei Δ die Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

bedeutet, und in B) alle durch Striche angedeuteten Differentiationen nach t zu nehmen sind.

Legt man durch C irgend eine abwickelbare Fläche, kurz D-Fläche, deren Gratlinie oder Rückkehrkante Γ den zum Punkte P zugehörigen oder entsprechenden Punkt Q enthält und bezeichnet die Koordinaten von Q mit X, Y, Z, so hat man die Gleichungen

1)
$$\frac{dX}{ds} = \Omega(X - x)$$

$$\frac{dY}{ds} = \Omega(Y - y)$$

$$\frac{dZ}{ds} = \Omega(Z - z),$$

in denen Ω als eine willkürliche Funktion von s zu betrachten ist. Denn der zu Q benachbarte Punkt Q_1 hat zu Koordinaten $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$; diese müssen aber von der Form $X + ds\,\Omega(X - x)$, $Y + ds\,\Omega(Y - y)$, $Z + ds\,\Omega(Z - z)$ sein, woraus sich die Gleichungen 1) ergeben.

Setzt man $V = e^{-\int \Omega\, ds}$, so erhält man durch Integration von 1)

$$\begin{aligned} VX &= c_1 - \int \Omega V x\, ds \\ 2) \qquad VY &= c_2 - \int \Omega V y\, ds \\ VZ &= c_3 - \int \Omega V z\, ds, \end{aligned}$$

also für $\Omega = \dfrac{\theta'}{\theta}$, $V = \dfrac{1}{\theta}$,

$$\begin{aligned} X &= \theta\left(c_1 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} x\, ds\right) \\ 2\,a) \qquad Y &= \theta\left(c_2 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} y\, ds\right) \\ Z &= \theta\left(c_3 - \int \frac{\theta'}{\theta^2} z\, ds\right)^{1}). \end{aligned}$$

Für die durch die Gleichungen 2 a) bestimmten Flächen D ergibt sich nun sofort bei ungeändertem Ω oder θ, falls die Integrationskonstanten c_i durch c_i' ersetzt und die zugehörigen Werte der X, Y, Z durch X_1, Y_1, Z_1 bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} X - X_1 &= \theta\,(c_1 - c_1') \\ 3) \qquad Y - Y_1 &= \theta\,(c_2 - c_2') \\ Z - Z_1 &= \theta\,(c_3 - c_3'). \end{aligned}$$

Für je zwei Kurven Γ und Γ', welche zu denselben θ oder Ω gehören, ist die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte Q, Q' einer festen Richtung parallel.

Wird insbesondere

$$(c_1 - c_1')^2 + (c_2 - c_2')^2 + (c_3 - c_3')^2 = a^2$$

gewählt, so folgt:

---

[1]) Da jetzt ohne Beschränkung $\theta = e^{\int \Omega\, ds}$ genommen werden kann, läßt sich θ als positive Zahl voraussetzen, wenn wir uns, wie überall, wo nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, auf die Betrachtung reeller Verhältnisse beziehen.

Zieht man durch die sämtlichen Punkte Q' einer Kurve Γ' Strecken $a\theta$ parallel zu einer willkürlichen Richtung, so bilden die Endpunkte Q dieser Strecken eine neue Kurve Γ, die zu demselben θ gehört, und die sämtlichen Punkte Q, zu denen man auf diese Weise gelangt, liegen dabei jedesmal auf einer mit dem Radius $a\theta$ um Q' beschriebenen Kugel.

Hierdurch wird eine natürliche Zerlegung der Gesamtheit der D-Flächen oder Kurven Γ in ∞^3 den Integrationskonstanten entsprechende, welche zu denselben Werten von θ gehören, herbeigeführt. Insbesondere kann man aus zwei zu demselben θ gehörenden Kurven Q und Q_1, bei denen QQ_1 einer festen Richtung parallel ist, eine neue Kurve Q_2 dadurch herleiten, daß man auf derselben Richtung $QQ_1 : QQ_2 = \text{konst.}$ setzt.

Um diesen Satz zur Konstruktion von beliebig vielen Kurven Q' mittels Q wirklich verwenden zu können, muß man allerdings aus Γ die Funktion θ zuvor bestimmen. Dies geschieht folgendermaßen.

Bezeichnet man mit h die Entfernung PQ, mit i den Winkel der Tangente von C in P mit der Richtung PQ (positiv gemessen im Sinne der Strecke PQ), so ist bei gegebener Kurve Q die Funktion θ durch Quadratur bestimmt. Denn es ist

$$h\cos i = \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z)$$

und aus $h^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2$ folgt durch Differentiation

$$hh' = (X-x)\left(\frac{dX}{ds} - \alpha\right) + (Y-y)\left(\frac{dY}{ds} - \beta\right) + (Z-z)\left(\frac{dZ}{ds} - \gamma\right)$$

$$= \frac{\theta'}{\theta} h^2 - h\cos i$$

oder:

$$\frac{\theta'}{\theta} = \Omega = \frac{h' + \cos i}{h},$$

wie übrigens auch geometrisch unmittelbar erhellt.[1])

[1]) Vgl. darüber z. B. § IV und S. 289.

Man erhält ferner durch partielle Integration aus 2a)

$$X - x = \theta\left(c_1 - \int \frac{\alpha}{\theta}\, ds\right)$$

2b) $$Y - y = \theta\left(c_2 - \int \frac{\beta}{\theta}\, ds\right)$$

$$Z - z = \theta\left(c_3 - \int \frac{\gamma}{\theta}\, ds\right).$$

Die Gleichungen 2b) geben für jeden Punkt Q seine relativen Koordinaten in Bezug auf den Punkt P an. Dividiert man diese letzteren durch θ, so erhält man die Koordinaten eines auf PQ gelegenen Punktes (Q) mit den Koordinaten

$$\Xi = c_1 - \int \frac{\alpha}{\theta}\, ds$$

$$H = c_2 - \int \frac{\beta}{\theta}\, ds$$

$$Z = c_3 - \int \frac{\gamma}{\theta}\, ds.$$

Denkt man sich diese „reduzierten Koordinaten von Q" im Axensystem der x, y, z aufgetragen, so entsteht eine neue Kurve Γ', deren Krümmungsradius $\frac{\varrho}{\theta}$, deren Torsionsradius $-\frac{\tau}{\theta}$, und deren charakteristisches Triëder entgegengesetzt parallel dem der Kurve C ist, die also dieser Kurve als in den kleinsten Teilen ähnlich, aber als entgegengesetzt gewunden bezeichnet werden kann, wie aus der Bestimmung der betreffenden Verhältnisse nach den Formeln A) und B) hervorgeht.

Die Bestimmung der Kurven Γ kann noch auf eine andere Art erfolgen, welche ebenfalls vielfach zur Verwendung im folgenden kommen wird. Von jedem Punkte P gelangt man zum Punkte Q dadurch, daß man, anstatt auf den Axen der x, y, z um $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ fortzuschreiten, auf den Axen des Triëders von P um die relativen Strecken p, q, r fortgeht, wobei

$$
\begin{aligned}
X - x &= \alpha p + \xi q + \lambda r \\
Y - y &= \beta p + \eta q + \mu r \\
Z - z &= \gamma p + \zeta q + \nu r,
\end{aligned}
\qquad 4)
$$

oder

$$
\begin{aligned}
p &= \alpha(X-x) + \beta(Y-y) + \gamma(Z-z) \\
q &= \xi(X-x) + \eta(Y-y) + \zeta(Z-z) \\
r &= \lambda(X-x) + \mu(Y-y) + \nu(Z-z).
\end{aligned}
$$

Aus 4) folgt durch Differentiation nach 1) und A)

$$\Omega(\alpha p + \xi q + \lambda a) - a = \frac{\xi p}{\varrho} - \left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) q + \frac{\xi}{\tau} r + \alpha p' + \xi q' + \lambda r' \text{ [1]}$$

nebst den analogen Gleichungen, wenn man α, ξ, λ durch β, η, μ; γ, ζ, ν ersetzt. Da die Determinante der Richtungscosinus nicht Null ist, erhält man

$$
\begin{aligned}
1 + p' - \frac{q}{\varrho} &= p\Omega \\
q' + \frac{p}{\varrho} + \frac{r}{\tau} &= q\Omega \qquad 5) \\
r' - \frac{q}{\tau} &= r\Omega.
\end{aligned}
$$

Setzt man hier

$$p^2 + q^2 + r^2 = h^2 = (PQ)^2, \qquad \text{so ist}$$

$$\cos i = \frac{p}{h}, \qquad 6)$$

und aus 5) folgt durch Multiplikation mit p, q, r und Addition, mit Benutzung von

$$pp' + qq' + rr' = hh'$$

wieder die Gleichung auf S. 287.

$$\frac{dh}{ds} + \cos i = \Omega h.$$

---

[1]) Die oben zugefügten Striche bedeuten, wie überall im folgenden, die Differentialquotienten der Funktionen, z. B. $p' = \frac{dp}{ds}$ usw.

Das System der Gleichungen 5) gibt bei beliebig gewähltem θ ∞^3 Kurven Γ, nämlich die bereits vorhin untersuchten. Zur Vereinfachung der Integration von 5) sei

$$p = \theta p_1, \quad q = \theta q_1, \quad r = \theta r_1,$$

wodurch 5) übergeht in

$$\frac{1}{\theta} + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0$$

5a) $$q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0$$

$$r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0.$$

Man erhält aus 5a) durch Elimination von p_1, q_1 die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

7) $$\frac{1}{\theta} = \frac{d}{ds}\left[\varrho \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dr_1}{ds}\right) + \frac{\varrho}{\tau} r_1\right] + \frac{1}{\varrho} \tau \frac{dr_1}{ds}$$

deren Integration mit Hülfe des zugehörigen homogenen Systems

$$p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0$$

5b) $$q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0$$

$$r_1' - \frac{r_1}{\tau} = 0$$

erfolgen kann, aus dem bei gegebenem θ nach den Frenetschen Formeln unmittelbar die 3 Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3 enthaltenden Werte

$$p_1 = c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma$$
$$q_1 = c_1 \xi + c_2 \eta + c_3 \zeta$$
$$r_1 = c_1 \lambda + c_2 \mu + c_3 \nu$$

folgen, aus denen sich durch Variation der Konstanten die vollständigen Lösungen

$$p_1 = \alpha A + \beta B + \gamma C$$
c) $$q_1 = \xi A + \eta B + \zeta C$$
$$r_1 = \lambda A + \gamma B + \nu C,$$

in denen

$$A = c_1 - \int \frac{ds}{\theta}\alpha, \quad B = c_2 - \int \frac{ds}{\theta}\beta, \quad C = c_3 - \int \frac{ds}{\theta}\gamma$$

ergeben, die übrigens nach 2 b) auch unmittelbar ersichtlich sind, während die Integration der verkürzten linearen homogenen Gleichung von 7), welche allerdings den integrierenden Faktor

$$\varrho\left[\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dr_1}{ds}\right) + \frac{r_1}{\tau}\right]$$

hat, für r_1 bei willkürlichen Werten von ϱ und τ unmittelbar keine weitere Behandlung zu gestatten scheint.[1]) Durch die Einführung der p_1, q_1, r_1 und die daran geknüpfte Variation der Konstanten erhält man eine übersichtliche Darstellung der Kurven Γ, durch welche die Aufgabe ihrer Bestimmung in zwei getrennte Prozesse verwandelt wird.

Sie soll gleich hier benutzt werden, um für die allgemeinen Schraubenlinien $\frac{\tau}{\varrho} = \text{const} = k$ eine Klasse von Kurven Γ zu bestimmen, die man im allgemeineren Sinne als Traktorien von C bezeichnen kann.[2]) Wird z. B. gefordert, daß die p, q, r gleich ϱp_1, ϱq_1, ϱr_1 bei konstanten Werten von p_1, q_1, r_1 sind, so folgt aus 5), wenn man

$$\Omega\varrho - \varrho' = \delta, \quad 1 - q_1 = p_1\delta$$

setzt,

$$p_1 + \frac{r_1}{k} = q_1\delta, \quad -\frac{q_1}{k} = r_1\delta.$$

Sie liefern bei konstantem δ (ein Fall, der nach den letzten beiden Gleichungen nur bei den Schraubenlinien auftreten kann)

$$(8) \qquad p_1 = \frac{1 + k^2\delta^2}{\delta N}, \quad q_1 = \frac{k^2}{N}, \quad r_1 = -\frac{k}{N\delta},$$

falls

$$N = 1 + k^2(1 + \delta^2)$$

---

[1]) Sie kann natürlich durch eine bekannte Substitution auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert werden.

[2]) Über den Begriff der Traktorien siehe § VII.

oder $$h^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \varrho^2 \left(\frac{1 + k^2 \delta^2}{N \delta^2} \right)$$

gesetzt wird. Für jede (allgemeine) Schraubenlinie gibt es, entsprechend der willkürlichen Wahl der Konstanten δ, ∞^1 Kurven Γ, deren Erzeugende für alle Punkte P von C gleiche relative Lage gegen das charakteristische Triëder von C besitzen, wobei $h = PQ = \varrho \cdot \text{const.}$ ist. Insbesondere gibt es nach 8) für die gemeine Schraubenlinie oder Helix (ϱ und τ konstant) bei gegebenem konstantem h eine Gleichung 4. Grades für δ, die zwei nur durch das Vorzeichen verschiedene reelle Werte von δ liefert. Dies ist freilich nur eine partikuläre Lösung des Huygensschen Traktorienproblems für die Helix.[1])

Trägt man die p_1, q_1, r_1 in einem rechtwinkligen Axensystem als Koordinaten auf, so erhält man nach 8) eine Raumkurve dritter Ordnung R_3, falls δ alle möglichen Werte zuerteilt werden, und die mit ϱ multiplizierten Radii Vectores der R_3 liefern dann jedesmal einen Punkt der zugehörigen Kurve Γ. Denn durch Elimination von δ aus den Gleichungen 8) entstehen die Gleichungen von drei Flächen 2. Grades, nämlich (wenn an Stelle von p_1, q_1, r_1 für den Augenblick x, y, z geschrieben werden),

$$\alpha) \quad y = x^2 + y^2 + \frac{xz}{k}$$

$$\beta) \quad z - zy + \frac{xy}{k} = 0$$

$$\gamma) \quad y^2 + z^2 + xzk = 0$$

Von diesen Flächen ist γ) ein Kegel mit der Spitze in P, dessen Schnitte mit den Ebenen $x =$ konst. Kreise sind, welche die xz-Ebene berühren. Dreht man die Axe der x in dieser Ebene um den Winkel α, und bezeichnet die neuen Koordinaten durch x^1, z^1, $y^1 = y$ so erhält man für $\operatorname{tg} 2\alpha = -k$, $\sin 2\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$, $\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ die Gleichung

[1]) Die allgemeine Lösung desselben siehe in § IX.

$$2y_1^2 + x_1^2(1 + \sqrt{1+k^2}) - z'^2(\sqrt{1+k^2} - 1) = 0$$

also die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids.

Die Fläche α) ist dagegen, wenn das System in analoger Weise um den Winkel α, $\operatorname{tg} 2\alpha = 1$ gedreht wird, für die Koordinaten x_1, z_1, $y = {}^1/_2$

$$2k\left[(y_1 - {}^1/_2)^2 - \frac{1}{2}\right] + x_1^2(1 + \sqrt{2}) - z_1^2(\sqrt{2} - 1).$$

Und aus β) wird endlich für $\operatorname{tg}\beta = {}^1/_k$ die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides

$$x_1 + z_1 k - y z_1 (1 + k^2) = 0.$$

Führt man an dem Triëder von C die zugehörige Schraubenbewegung aus, und multipliziert zugleich den zugehörigen Vektor der Rektaszension jedesmal mit dem Faktor ϱ, so entsteht eine Fläche Σ, welche die sämtlichen auf diese Weise entstehenden Traktorien enthält, und die demgemäß von ihren Vektoren PQ berührt wird. Es ist zu vermuten, daß die so entstehenden Kurven Γ wieder Schraubenlinien sind, was sich in der Tat leicht bestätigen läßt (vgl. § II, S. 296).

Man kann endlich die Beziehung zwischen zwei zu demselben θ gehörenden Kurven Γ, welche vorhin betrachtet wurde, noch verallgemeinern. Auf Seite 4) sind als reduzierte Koordinaten des Punktes einer zu $\theta_1 = \frac{1}{z^1}$ gehörenden Kurve Γ_1 die durch θ_1 dividierten $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ bezeichnet; ihnen entsprechen nach 5a) die Koordinaten p_1, q_1, r_1 des auf PQ_1 gelegenen Punktes (Q_1) einer Kurve (Γ_1). Ebenso mögen zu dem auf irgend einer anderen Kurve (Γ_2) gelegenen Punkte (Q_2) als „reduzierte Koordinaten“ die p_2, q_2, r_2 gehören, wobei θ_1 den Wert θ_2 haben wird. Dann ist nach 5a)

$$\frac{1}{\theta_1} + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{r} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \quad r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0$$

$$\frac{1}{\theta_2} + p_2' - \frac{q_2}{\varrho} = 0, \quad q_2' + \frac{p_2}{r} + \frac{r_2}{\tau} = 0, \quad r_2' - \frac{q_2}{\tau} = 0$$

und daraus folgt, daß die Differenzen

$$p_1 - p_2, \quad q_1 - q_2, \quad r_1 - r_2$$

reduzierte Koordinaten eines Punktes (Q) auf PQ sind, welche zu dem Divisor

$$\theta = \frac{\theta_1 \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}$$

gehören.

Damit ist aber die Möglichkeit gegeben mittels der Werte θ_1 und θ_2 die zu irgend zwei Kurven Γ_1, Γ_2, gehören, eine neue Kurve Γ zu konstruieren.

§ II.

Krümmung, Torsion und charakteristisches Triëder der Kurven Γ.

Die Krümmung und Torsion der Kurven Γ lassen sich auf verschiedenen Wegen bestimmen. Aus den Gleichungen 1) des § I

1) $$X' = \Omega (X - x)$$

folgt durch Differentiation nach s, wenn

$$(PQ)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = h^2$$

gesetzt wird,

2) $$X'' = (\Omega^2 + \Omega^1)(X - x) - \alpha \Omega$$

und wegen der aus § 1, 5) folgenden Gleichung

$$\Omega (p^2 + q^2 + r^2) = pp' + qq' + rr' + p$$

oder

3) $$p = \Omega h^2 - h h^1$$

4) $$X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = (\Omega^2 + \Omega^1)^2 h^2 + \Omega^2 - 2\Omega(\Omega^2 + \Omega^1) p$$

wobei nach § 1, 4)

$$p = \alpha (X - x) + \beta (Y - y) + \gamma (Z - z)$$

gesetzt ist. Nach 1) ist ferner, wenn das Bogenelement von Γ mit dS bezeichnet, und mit ds als positiv genommen wird

5) $$\frac{dS}{ds} = S' = \varepsilon \Omega h = | \Omega h |$$

wo ε das Vorzeichen von Ω ist. Hieraus ergibt sich nach 2)

$$S'' = \frac{dS^2}{ds^2} = \varepsilon\left\{h(\Omega^1 + \Omega^2) - \frac{p}{h}\,\Omega\right\}$$

also nach 4)

$$X''^2 + Y'' + Z''^2 - S''^2 = \Omega^2\,\frac{(p^2+r^2)}{h^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser P von Γ ist demnach durch die Gleichung

$$\text{I)} \qquad P = \varepsilon\,\frac{\Omega h^3}{\sqrt{q^2+r^2}} = h^2\left|\frac{\Omega}{\sin i}\right| = \varepsilon\,\frac{(p^2+q^2+r^2)^{3/2}}{\sqrt{q^2+r^2}}\,\Omega$$

gegeben, wo i (wie in § I) der Winkel der Erzeugenden PQ von Γ mit der Tangente von C in P ist.

Zur Bestimmung des Torsionsradius T berechne man die Determinante Δ' der ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von X, Y, Z nach 1), 2), 4). Man erhält dann fast ohne jede Rechnung[1])

$$\Delta' = \frac{\Omega^3}{\varrho}\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

woraus sich durch Multiplikation mit der Determinante des Triëders

$$\Delta' = \frac{r\cdot\Omega^3}{\varrho}$$

ergibt. Nach § I, B) und 5) hat man also

$$\text{II)} \qquad T = -\,\frac{\varrho}{r}\,\Omega\,(q^2+r^2)$$

und endlich

$$\text{III)} \qquad \frac{P}{T} = -\,\varepsilon\,\frac{r}{\varrho}\left(\frac{p^2+q^2+r^2}{q^2+r^2}\right)^{3/2}$$

---

[1]) Indem man 2) in die Form $X'' = -\,\alpha\,\Omega + \left(\frac{\Omega^2+\Omega'}{\Omega}\right)X'$ setzt, und ebenso bis X''' verfährt.

Setzt man hier die Werte von p, q, r, aus § I, 8) ein, so ergibt sich

$$\frac{P}{T} = -\frac{\varepsilon}{\varkappa^2 \delta}\sqrt{1+\varkappa^2(1+\delta^2)};$$

bei konstantem δ ist dies Verhältnis selbst konstant, jedoch mit δ veränderlich. Die in § I, S. 293 bestimmten Kurven Γ auf der Fläche Σ sind also in der Tat Schraubenlinien verschiedener Art, wie dort schon behauptet wurde.

§ III.

Zweiter Ansatz zur Bestimmung der durch C gelegten Flächen D.

In den beiden §§ I, II sind lineare Differentialgleichungen zur Bestimmung der Flächen D verwandt, weil so eine natürliche Zerlegung der Gesamtheit dieser Flächen erreicht wird. An und für sich ist aber die Einführung von Differentialgleichungen zunächst ganz überflüssig, da die Ermittelung der Kurven Γ, wie längst bekannt, sich als eine Enveloppenbildung ansehen läßt. Nur zur Bestimmung der ebenen Kurven Γ in der Ebene einer ebenen Kurve C wird man vielleicht zweckmäßiger Weise neben $r = 0$ die p und q zur Anwendung bringen.

Eine willkürliche Tangentenebene von C hat die Gleichung

$$1)\quad (X-x)(\xi+\lambda q_1)+(Y-y)(\eta+\mu q_1)+(Z-z)(\zeta+\nu q_1)=0$$

in der der Parameter $q_1 = -\operatorname{cotg}\varphi$ ist, wobei φ denjenigen Winkel bedeutet, um den man die Schmiegungsebene von C im positiven Sinne zu drehen hat, damit sie mit der Ebene 1) zusammenfällt.

Betrachtet man nun ξ, η, ζ; λ, μ, ν; q_1 als gegebene Funktionen von s, so ist die Charakteristik von 1), als Erzeugende die zur Kurve Γ gehört, nach den Frenetschen Formeln bestimmt durch die Gleichung 1) und

$$2)\qquad \begin{aligned}&(X-x)\left(\lambda\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\xi}{\tau}q_1-\frac{\alpha}{\varrho}\right)\\&+(Y-y)\left(\mu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\eta}{\tau}q_1-\frac{\beta}{\varrho}\right)\\&+(Z-z)\left(\nu\left(q_1-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\zeta}{\tau}q_1-\frac{\gamma}{\varrho}\right)=0.\end{aligned}$$

Da die $X-y$, $Y-y$, $Z-z$ sich nach 1) und 2) verhalten wie die Koeffizienten von u, v, w der Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi+\lambda q_1 & \eta+\mu q_1 & \zeta+\nu q_1 \\ \lambda\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\xi q_1}{\tau}-\frac{\alpha}{\varrho} & \mu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\eta q_1}{\tau}-\frac{\beta}{\varrho} & \nu\left(q_1'-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{\zeta q_1}{\tau}-\frac{\gamma}{\varrho} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

so erhält man durch Multiplikation derselben mit der Determinante des Triëders von C sofort[1])

$$\text{I)}\qquad \begin{aligned}X-x&=\sigma\left(\Pi\alpha+\frac{\xi q_1-\lambda}{\varrho}\right)\\Y-y&=\sigma\left(\Pi\beta+\frac{\eta q_1-\mu}{\varrho}\right)\\Z-z&=\sigma\left(\Pi\gamma+\frac{\zeta q_1-\nu}{\varrho}\right)\end{aligned}$$

wo σ eine willkürliche Funktion von s und

$$3)\qquad \Pi=\frac{1+q_1^2}{\tau}-q_1'$$

gesetzt ist.

Aus § I, 4) folgt dann nach I) noch

$$\text{I a)}\qquad \begin{aligned}p&=\sigma\Pi\\q&=\frac{\sigma}{\varrho}q_1\\r&=-\frac{\sigma}{\varrho}.\end{aligned}$$

[1]) Die Formeln I) sind, wie vorhin bemerkt, für den Fall $q_1=0$ nicht zu gebrauchen, wo es sich um ebene Kurven Γ in der Ebene einer ebenen C handelt.

Differentiiert man die Gleichungen I, so folgt

$$4)\quad \frac{dX}{ds} = \alpha + \sigma'\left(\Pi\alpha + \frac{\xi q_1 - \lambda}{\varrho}\right) + \sigma\left(\Pi'\alpha + \Pi\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\xi q_1'}{\varrho} - \left(\frac{\xi q_1 - \lambda}{\varrho^2}\right)\cdot\varrho'\right)$$
$$- \sigma\left[\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right)\frac{q}{\varrho} - \frac{\xi}{\tau\varrho}\right]$$

und, wenn man $\frac{dX}{ds}$ durch seinen Wert aus § I), 1) mit Benutzung von I) ersetzt, sodann die Koeffizienten von α, ξ, λ auf beiden Seiten vergleicht

$$5)\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) + (\sigma' - \sigma\Omega)\,\Pi = 0$$
$$\sigma\left(\frac{\Pi}{\varrho} + \frac{q_1'}{\varrho}\right) - \left(\frac{q_1}{\varrho^2}\varrho' + \frac{1}{\varrho\tau}\right) + (\sigma' - \sigma\Omega)\frac{q_1}{\varrho} = 0$$
$$\sigma\frac{\varrho'}{\varrho^2} - \frac{q_1\sigma}{\tau\varrho} - \left(\frac{\sigma' - \sigma\Omega}{\varrho}\right) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, daß q_1 von Null verschieden ist, reduziert sich die zweite der Gleichungen 5) auf die dritte; (für $q_1 = 0$ ist sie aber von selbst (bei endlichem σ) erfüllt). Man erhält daher die beiden Gleichungen

$$6)\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q}{\varrho^2}\right) + \Pi(\sigma' - \sigma\Omega) = 0$$
$$\sigma\left(\frac{\varrho'}{\varrho} - \frac{q_1}{\tau}\right) - (\sigma' - \sigma\Omega) = 0,$$

aus denen sich durch Elimination von $\sigma' - \sigma\Omega$ die Gleichung

$$\text{II)}\quad 1 + \sigma\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right) = 0$$

ergibt, wenn man

$$7)\quad \frac{q_1}{\tau} - \frac{\varrho'}{\varrho} = \omega \text{ setzt.}$$

Da endlich nach 6), 7)

$$\sigma\omega + (\sigma' - \sigma\Omega) = 0,$$

so hat man noch

$$8)\quad \sigma' + \omega\sigma = \Omega\sigma.$$

Wird in 8) der Wert von $\sigma' + \omega\sigma$ mit w bezeichnet, und in die Gleichung 4) eingeführt, so erhält man:

III)
$$\frac{dX}{ds} = w\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right)$$
$$\frac{dY}{ds} = w\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta - \mu}{\varrho}\right)$$
$$\frac{dZ}{ds} = w\left(\Pi\gamma + \frac{q_1\zeta - \nu}{\varrho}\right)$$

Aus III) hat man weiter für das Bogenelement dS

IV)
$$\frac{dS}{ds} = \eta\, w \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}$$

wo η das Vorzeichen von $w = \sigma' + \omega\sigma$ ist, falls, wie stets angenommen werden soll, dS mit wachsendem s positiv genommen wird, während

9)
$$D = \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}$$

stets positiv zu nehmen ist.

Aus den Gleichungen I) kann man ebenfalls P und T für die Kurven Γ bestimmen. Doch ist es nicht überflüssig, die betreffende Rechnung aufs neue durchzuführen, da sich so einerseits eine Kontrolle der in § II entwickelten Formeln ergibt, andererseits sich aber der von Interesse erscheinende Umstand herausstellt, daß der Ausdruck

$$\left(\frac{d^2X}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2S}{ds^2}\right)^2$$

ein vollständiges Quadrat ist.[1])

Man erhält nämlich durch eine Rechnung, die ich hier nicht weiter ausführe, für diesen Ausdruck den Wert

[1]) Sucht man umgekehrt zu einer als gegeben angesehenen Kurve Γ die Kurven C, so ergibt sich kein übersichtliches Resultat, da es sich dann um eine viel allgemeinere Frage handelt.

$$w^2 \cdot \frac{1+q_1^2}{\varrho^x}\left(\frac{II' - \frac{q_1}{\varrho^2} - II\omega}{II^2 + \frac{1+q_1^2}{\varrho^2}}\right)^2 = w^2\left(\frac{1+q_1^2}{\sigma^2 \cdot \varrho^2 D^2}\right)$$

so daß

V) $$P = \varepsilon\eta \frac{D^3 \sigma \varrho w}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

wird, während T aus der Gleichung

VI) $$T = w(1+q_1^2)$$

zu entnehmen ist. Diese Werte stimmen mit den früher erhaltenen in § II, I völlig überein.

Das einzige Werk, in dem (so weit mir bekannt ist) der Versuch gemacht ist, für die aus den rektifizierenden Ebenen (senkrecht zur Hauptnormale) von C gebildeten Kurven Γ P und T zu bestimmen, ist die „Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung" von W. Schell, 2. Aufl., Leipzig 1898, S. 79 ff., in welchem indessen nur der absolute Wert von T und überhaupt P und T durch nicht gerade übersichtliche geometrische Betrachtungen gefunden werden.[1])

Zur vollständigen Bestimmung des charakteristischen Triëders von Γ (mit Berücksichtigung der Vorzeichen) kann die folgende Rechnung dienen.

Setzt man nach IV)

$$\frac{dS}{ds} = \eta\omega D,$$

so ist nach III)

$$\eta \frac{dX}{dS} = \left(II\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right)\frac{1}{D}.$$

Aus der Gleichung

$$d\frac{1}{D} = -\frac{1}{D^3}\left\{II \cdot \left(II' - II\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) + \omega D^2\right\} = \frac{II}{D^3\sigma} - \frac{\omega}{D}$$

[1]) Krümmung und Torsion der Filarevoluten einer Kurve sind übrigens ebenfalls längst bekannt.

folgt:

$$\eta \frac{d^2X}{dSds} = \frac{1}{D^3}\left\{\frac{q_1^2+1}{\varrho^2}\alpha - \xi\frac{q_1-\lambda}{\varrho}\Pi\right\}\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi\omega\right)$$

oder:

$$\frac{d^2X}{dS^2} = -\frac{1}{\sigma}\left\{\frac{\left(\frac{q_1^2+1}{\varrho^2}\right)\alpha - \frac{\xi q_1-\lambda}{\varrho}\Pi}{w D^4}\right\},$$

so daß

$$10) \qquad \left(\frac{d^2X}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Z}{dS^2}\right)^2 = \frac{q_1^2+1}{\varrho^2\sigma^2 w^2 D^6},$$

d. h. wie vorhin:

$$P = \varepsilon\eta\frac{\sigma\varrho D^3}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

wird, und es ist also:

$$\frac{d^2X}{dS^2} = -\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\alpha - (\xi q_1-\lambda)\Pi}{P\cdot\sqrt{q_1^2+1}\,D}\right\}\varepsilon\eta.$$

Nach den Frenetschen Formeln ergeben sich hieraus für die Cosinus ξ', η', ζ' der Hauptnormale gegen die Axen der $x\,y\,z$ die Werte

$$A) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\alpha - (\xi q_1-\lambda)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\} \\ \eta_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\beta - (\eta q_1-\mu)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\} \\ \zeta_1 &= -\varepsilon\eta\left\{\frac{\frac{q_1^2+1}{\varrho}\gamma - (\zeta q_1-\nu)\Pi}{D\sqrt{q_1^2+1}}\right\} \end{aligned}$$

und für die Cosinus α_1, β_1, γ_1 der Tangente von Γ

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{D}\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi - \lambda}{\varrho}\right)$$

B) $$\beta_1 = \frac{\eta}{D}\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta - \mu}{\varrho}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{\eta}{D}\left(\Pi\gamma + \frac{q_1\zeta - \nu}{\varrho}\right)$$

so wie endlich durch Unterdeterminantenbildung als Cosinus der Binormale von Γ

$$\lambda_1 = \varepsilon\frac{\xi + \lambda q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

C) $$\mu_1 = \varepsilon\frac{\eta + \mu q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

$$\nu_1 = \varepsilon\frac{\zeta + \nu q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}.$$

Bezeichnet man also die Richtungen der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurven C und Γ durch t, h, b; t_1, h_1, b_1 so hat man auch dem Vorzeichen nach:

$$\cos(t_1 t) = \eta\frac{\Pi}{D}, \qquad \cos(h_1 t) = -\frac{\varepsilon\eta\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho D}$$

IV) $$\cos(t_1 h) = \eta\frac{q_1}{\varrho D}, \quad \cos(h_1 h) = +\frac{\varepsilon\eta\Pi q_1}{D\sqrt{1+q_1^2}}$$

$$\cos(t_1 b) = -\frac{\eta}{\varrho D}, \quad \cos(h_1 b) = -\frac{\varepsilon\eta\Pi}{D\sqrt{1+q_1^2}}$$

$$\cos(b_1 t) = 0$$

$$\cos(b_1 h) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q_1^2+1}}$$

$$\cos(b_1 b) = \frac{\varepsilon q_1}{\sqrt{q_1^2+1}}.$$

Die Formeln IV) geben zu manchen Fragen Veranlassung. Soll z. B. $\cos(t_1 t) = \text{konst} = \cos A$ sein, so hat man die Gleichung

$$\frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1^1 = \frac{\operatorname{cotg} A}{\varrho}\sqrt{q_1^2+1}$$

die durch die Substitution $2q_1 = \frac{1}{z} - z$ in die Riccatische Gleichung

7) $$z' + \frac{1+z^2}{2\tau} - \frac{z}{\varrho}\operatorname{cotg} A = 0$$

übergeht, welche für die Kurve C charakteristisch ist.[1]) Bei konstantem q_1 sind selbstverständlich $\cos(b_1 b)$ konstant.

Ebenso folgt für $\cos(h_1 t) = \text{konst} = \cos B$ die Gleichung

$$\frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1' = \frac{\operatorname{tg} B}{\varrho}\sqrt{q_1^2+1}$$

welche auf 7) zurückkommt, wenn an Stelle von $\operatorname{cotg} A$ B geschrieben wird.

Man hat ferner

$$\frac{\cos(h_1 h)}{\cos(h_1 b)} = \frac{\cos(t_1 h)}{\cos(t_1 b)} = -\frac{\cos(b_1 b)}{\cos(b_1 h)} = -q_1$$

und

$$-\frac{\cos(t_1 h)}{\cos(h_1 t)} = \frac{\cos(h_1 h)}{\cos(t_1 h)} = \frac{\cos(h_1 b)}{\cos(t_1 b)} = \frac{\varepsilon \Pi \varrho}{\sqrt{q^2+1}}.$$

Die Bedingung

$$\frac{\varepsilon \Pi \varrho}{\sqrt{q_1^2+1}} = m = \text{konst}$$

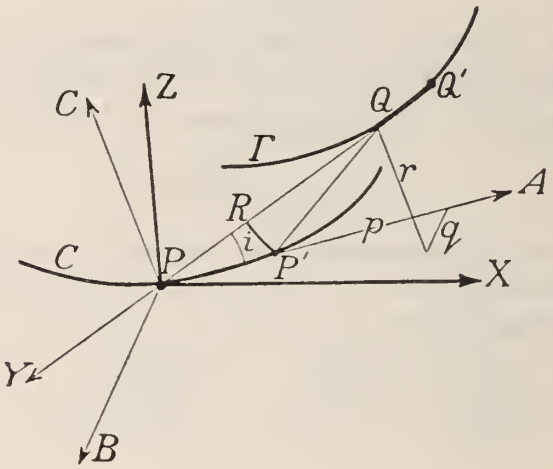
führt ebenfalls zu der für alle Schraubenlinien durch Quadratur lösbaren Gleichung 7).

[1]) Vgl. die Anmerkung [1]) zu § V.

§ IV.

Geometrische Herleitung der Gleichungen des § III für P und T.

Die grundlegenden Formeln des § III für P und T sowie andere geometrische Beziehungen lassen sich auch leicht durch direkte Betrachtung herleiten. Sind PA, PB, PC die Kanten des Triëders von C, $PP'Q$ die Schmiegungsebene und δ der Kontingenzwinkel PQP' von Γ, (vgl. die Figur 1)



Figur 1.[1])

so ist

$$P\delta = dS$$

falls

$$dS = Dds \mid w$$

das Bogenelement von Γ ist. Aus dem Dreiecke PQP' hat man

$$PP' : PQ = \sin\delta : \sin(i + \delta),$$

oder, wenn statt $\sin\delta$ einfach δ, statt $\sin(i + \delta)$ aber $\sin i$ gesetzt wird,

[1]) $P'R$ ist der mit QP' um Q beschriebene Kreisbogen; ebenso bei Figur 2.

$$P = \frac{dS}{ds} \cdot \frac{PQ}{\sin i} = |w| \frac{\sin i}{D}.$$

Da endlich aus der Figur unmittelbar

$$\sin i = \frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

so ergibt sich nach § III, I und § I, 4

$$P = \frac{D^3 \sigma \varrho w \varepsilon}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

wie in § II, V.

Zur Bestimmung von T kann man sich der Beziehung bedienen, daß die Binormale von Γ, deren Schmiegungsebene mit der von C zusammenfällt, die Richtungscosinus hat:

$$\cos A = \frac{\xi + \lambda q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

$$\cos B = \frac{\eta + \mu q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

$$\cos C = \frac{\zeta + \nu q_1}{\sqrt{1 + q_1^2}}$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\frac{1}{T^2} = \left\{ \left(\frac{d \cos A}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d \cos B}{ds} \right)^2 + \left(\frac{d \cos C}{ds} \right)^2 \right\} \left(\frac{ds}{dS} \right)^2$$

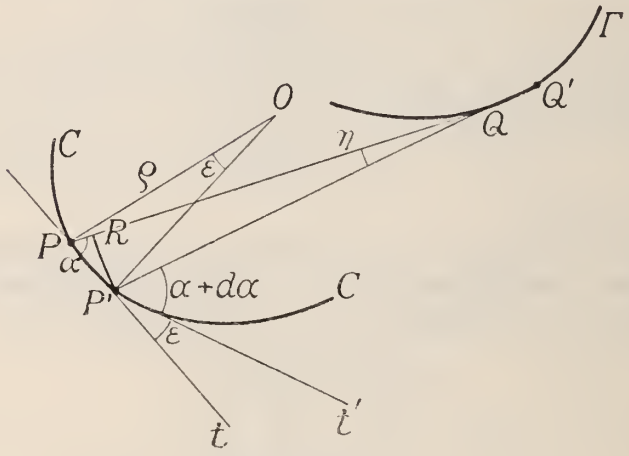
$$= \left(\frac{ds}{dS} \right)^2 \frac{D^2}{(1 + q_1^2)^2}$$

oder, wenn für $\frac{dS}{ds}$ sein Wert eingesetzt wird

$$T^2 = w^2 (1 + q_1^2)^2.$$

Aber auf diesem Wege wird nur der absolute Wert von T gefunden, der sich allerdings in ganz anderer Form für die rektifizierende D-Fläche schon bei Schell angegeben findet, während die vollständige Bestimmung von T die vorhin geführte Rechnung erfordert.

Für eine ebene Kurve C, die in ihrer Ebene betrachtet wird, lassen sich diese geometrischen Betrachtungen noch weiter ausführen.



Figur 2.

Ist die Erzeugende PQ von Γ (vgl. Figur 2) unter dem Winkel a gegen die Tangente t von C in P geneigt, so ist für die Kontingenzwinkel ε und η von C und Γ

1)
$$ds = \varepsilon\varrho$$
$$\eta = da + \varepsilon$$

ferner

$$P'R = QR = (PQ - ds\cos a)(da + \varepsilon) = \sin a\, ds$$

oder

$$PQ(da + \varepsilon) = \sin a\, ds$$

also auch

2)
$$\frac{da}{ds} + \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin a}{PQ}.$$

Bezeichnet man das Bogenelement QQ' von Γ mit dS, und setzt $PQ = f(s)$, wo f eine gegebene Funktion von s ist, so folgt für $P'Q = RQ$

$$PQ + d(PQ) = P'Q + dS = PQ - ds\cos\alpha + dS$$

oder

$$3) \qquad f'(s) = \frac{dS}{ds} - \cos\alpha.$$

Setzt man noch nach 1)

$$\eta P = (d\alpha + \varepsilon) P = dS$$

so ist

$$\frac{dS}{ds} = \left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right) P = \frac{\sin\alpha}{f(s)} P$$

also nach 3)

$$4) \qquad \frac{\sin\alpha P}{f(s)} = (f's + \cos\alpha)$$

so ist $PQ = \varrho \sin\alpha$ d. h. PQ nur um den konstanten Faktor $\sin\alpha$ von ϱ verschieden, was übrigens auch geometrisch unmittelbar erhellt.

Die Gleichung 2) geht durch die Substitution $z = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ in die Riccatische Gleichung über:

$$\frac{d\xi}{ds} + \frac{1+z^2}{2\varrho} - \frac{1}{f(s)} = 0.$$

Diese letztere ist von Darboux (Léçons sur la théorie générale des surfaces I, S. 113) durch analytische Rechnung hergeleitet. Sie ergibt sich übrigens nebst 4) unmittelbar aus den Gleichungen des § I, 5 für $r = 0$. Setzt man nämlich

$$1 + p' - \frac{q}{\varrho} = p\Omega$$

$$q' + \frac{p}{\varrho} = q\Omega$$

und

$$p = f\cos\alpha, \quad q = f\sin\alpha$$

so erhält man sofort

$$\sin\alpha = f\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$\cos\alpha + f' = f\Omega$$

und aus § II, I folgt dann auch die Gleichung 4).

§ V.

Zylinder, Kegelflächen und Minimalflächen D durch eine Kurve C.

Sind x, y, z, die Koordinaten einer Kurve C, so kann man unmittelbar die Gleichungen der durch C gelegten Kegel, Zylinder und Minimalflächen angeben. Anders aber steht es, wenn C nur durch ihre natürlichen Variabelen ϱ, τ gegeben ist, wie in unseren Betrachtungen überall vorausgesetzt wird.

Soll zunächst ein Zylinder mit der Axenrichtung $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ entstehen, so ist

$$1) \qquad \begin{aligned} X - x &= R\cos A \\ Y - y &= R\cos B \\ Z - z &= R\cos C. \end{aligned}$$

Andererseits ist aber nach § III, 1) nach Abkürzung durch das Σ-Zeichen

$$2) \qquad \begin{aligned} &\Sigma(X-x)(\xi+\lambda q_1) = 0 \\ &\Sigma(X-x)\left(-\left(\frac{\alpha}{\varrho}+\frac{\lambda}{\tau}\right)+\frac{\xi}{\tau}q_1+\lambda q_1'\right) = 0 \end{aligned}$$

oder, wenn man 1) in 2) einsetzt, und statt $\cos A, \ldots$ einfach $A \ldots$ schreibt,

$$\Sigma(\xi A) + q_1\Sigma(\lambda A) = 0$$

$$\frac{q_1}{\tau}\Sigma(\xi A) + \left(q_1' - \frac{1}{\tau}\right)\Sigma(\lambda A) - \frac{1}{\varrho}\Sigma(\alpha A) = 0.$$

Hieraus folgt, wenn $\tau \neq \infty$,

$$3) \qquad q_1\Sigma(\lambda A) + \Sigma(\xi A) = 0$$

$$4) \qquad \Pi\Sigma(\lambda A) + \frac{1}{\varrho}\Sigma(\alpha A) = 0.$$

Durch Differentiation von 4) entsteht aber mit Hilfe von 3), 4) die Gleichung

$$\left(\Pi' - \omega\Pi - \frac{q}{q^2}\right)\Sigma(\lambda A) = 0$$

oder da bei der Annahme $\tau \neq \infty$ der zweite Faktor nicht Null sein kann, die Bedingung $\sigma = \infty$, welche nur durch Integration der für C charakteristischen Riccatischen Gleichung, die hier in der Form

$$\Pi' - \omega \Pi - \frac{q_1}{\varrho^2} = 0$$

erscheint, gelöst werden kann.

Soll dagegen die Fläche D ein Kegel mit der Spitze c_1, c_2, c_3 werden, so hat man

$$X = c_1, \quad Y = c_2, \quad Z = c_3$$

oder nach § III, 1)

$$5) \qquad -q_1 = \frac{\Sigma \xi (c - x)}{\Sigma \lambda (c - x)}.$$

Durch Differentiation von 5) entsteht mit Hülfe von 5)

$$6) \qquad -\Pi = \frac{1}{\varrho} \frac{\Sigma \alpha (c - x)}{\Sigma \lambda (c - x)}$$

und hieraus auf dieselbe Weise mit Benutzung von 5), 6)

$$7) \qquad \Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi \omega = \frac{1}{\varrho} \frac{1}{\Sigma \lambda (c - x)}$$

und durch nochmalige Differentiation von 7) mittels 5), 6), 7)

$$\left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi \omega\right)' - \omega \left(\Pi' - \frac{q_1}{\varrho^2} - \Pi \omega\right) = 0$$

oder für

$$1 + \sigma \left(\Pi' - \Pi \omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) = 0$$

endlich

$$\frac{\sigma' + \omega \sigma}{\sigma^2} = 0$$

oder, falls $\sigma \neq \infty$, wie bei den D-Zylindern, $w = 0$. Dies war freilich zu erwarten, da ja in diesem Falle nach § III, III) $\frac{dX}{ds}, \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}$ gleich Null werden; unter den hier gemachten Voraussetzungen ist aber die Differentialgleichung dritter Ord-

nung $\omega = 0$ zu lösen, was wieder nur mittels der Riccatischen Gleichung möglich wird.

Da endlich

$$\left(\frac{dS}{ds}\right)^2 = w^2\left(\Pi^2 + \frac{q_1^2+1}{e^2}\right)$$

so ergeben sich die Minimalkurven Γ, wenn entweder der erste oder der zweite Faktor Null ist. Im ersten Falle aber degeneriert die Kurve Γ in einem Punkt, wie soeben gezeigt wurde. Die eigentliche Lösung erfolgt daher durch Betrachtung der Gleichung

$$\Pi^2 + \frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = 0$$

oder

$$\text{I)} \qquad \frac{1+q_1^2}{\tau} - q_1' = i\frac{\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho} = \Pi,$$

die wieder auf die Riccatische Gleichung

$$z' + \frac{1+z^2}{2\tau} - \frac{iz}{\varrho} = 0$$

führt. Aus Gleichung I) oder

$$\Pi' = \frac{i\,q_1 q_1'}{\varrho\sqrt{1+q_1^2}} - i\sqrt{1+q_1^2}\,\frac{\varrho'}{\varrho^2}$$

folgt aber mit Hülfe von I)

$$\Pi' = i\,q_1\frac{\sqrt{1+q_1^2}}{\varrho\tau} + \frac{q_1}{\varrho^2} - i\sqrt{1+q_1^2}\,\frac{\varrho'}{\varrho^2} = \frac{q_1}{\varrho^2} + \Pi\omega$$

oder $\sigma = \infty$. Auf diesem Wege entstehen also nur die Minimal-Zylinder D.[2]) Aber die Gleichung I) hat noch die singuläre Lösung $q_1 = i$, welcher der bestimmte

[1]) Dies ist gerade die Gleichung, von der die Integration der natürlichen Gleichung der Kurve C abhängt. Vgl Darboux, Lecons sur la théorie générale, I, S. 9 u. 21; Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1910, S. 15 u. 80.

[2]) Für die allgemeinen Schraubenlinien C lassen sich daher diese Zylinder sofort angeben.

Wert $\sigma = \frac{\varrho^2}{q_1} = -i\varrho^2$ entspricht. Für die Minimal-Kurven hat man daher

$$X - x = (\xi + i\lambda)\varrho$$
$$Y - y = (\eta + i\mu)\varrho$$
$$Z - z = (\zeta + i\nu)\varrho$$

oder auch

$$p = 0, \quad q = \varrho, \quad r = i\varrho.$$

Nach § II erhält man für die Krümmung und Torsion der Minimalkurven D den Wert Null, während das Verhältnis dieser beiden Zahlen gleich i wird, was sich auch durch Grenzübergang, bei dem zuerst q_1 konstant, und dann gleich i gesetzt wird, bestätigen läßt.

§ VI.

Die zu den Filarevoluten und der rektifizierenden Fläche von C gehörigen Kurven Γ.

Die Filarevoluten von C entstehen bekanntlich, wenn die Erzeugende PQ von Γ senkrecht auf der Tangente von C steht, also p oder nach § III, Ia $H = 0$ ist. Alsdann ist

1) $$q_1 = \operatorname{tg}\left(\int \frac{ds}{\tau} + c_1\right) = \operatorname{tg}\psi$$

und, da jetzt nach § III, II) $\sigma = \frac{\varrho^2}{q_1}$ wird

2) $$P = \varepsilon\eta\sigma\varrho\frac{(q_1^2+1)^{3/2}}{\sqrt{q_1^2+1}}w = \frac{\varepsilon\eta w}{q_1}(1+q_1^2)$$
$$T = w(1+q_1^2)$$

so daß die durch Einfachheit ausgezeichnete Formel

3) $$\frac{P}{T} = \frac{\varepsilon\eta}{q_1}$$

entsteht; w hat übrigens den Wert $\frac{\varrho}{q_1}\left(\varrho' - \frac{\varrho}{q_1\tau}\right)$.

Unter den Filarevoluten einer Raumkurve kann sich also nie eine Schraubenlinie befinden. Denn dann müßte q_1 konstant sein, was eben nach 1) ausgeschlossen ist.

Ist die Krümmung von C konstant, so folgt aus dem angegebenen Werte von w für T der Ausdruck

$$T = -\frac{\varrho^2}{q_1^2 \tau}$$

d. h. die zur Filarevolute gehörige Kurve Γ ist immer im entgegengesetzten Sinne wie C gewunden.

Wir bemerken ferner, daß für die Filarevolute

$$q = \frac{\sigma q_1}{\varrho} = \varrho$$

wird. Dies liefert den längst bekannten Satz, daß die Projektion des Punktes Q auf die Schmiegungsebene von C in P mit dem Krümmungsmittelpunkt von C zusammenfällt, aus dem die Konstruktion der „Polardeveloppabelen" folgt.[1])

Die Entfernung $PQ = h$ ist für die Kurve Γ allgemein durch die aus § III, I) folgende Gleichung

$$h^2 = \sigma^2 D^2$$

bestimmt.[2]) Für die Filarevolute wird daher

$$\sigma = \frac{h \varrho \varepsilon}{\sqrt{1+q_1^2}} = h \varrho \varepsilon \cos \psi$$

oder

$$r = -\frac{\sigma}{\varrho} = -\varepsilon h \cos \psi$$

womit der Punkt Q in der einfachsten Weise konstruiert ist, da in dem bei O rechtwinkligen Dreieck PQO für O als Krümmungsmittelpunkt von C der Winkel bei Q gleich ψ ist.

[1]) Von weiteren hier anschließenden Fragen deute ich nur noch an: Kann eine der hier betrachteten Kurven Γ konstanter Krümmung oder Torsion sein? Dazu muß die natürliche Gleichung von C eine gewisse leicht angebbare Form besitzen; ich gehe auf die Betrachtungen nicht ein, da wegen des verwickelten Charakters von C sich kein anschauliches Resultat ergibt.

[2]) Siehe indessen die Bemerkung zu S. 297.

Es sei jetzt C eine ebene Kurve. Dann ist $II = -q_1'$, also $II = 0$ mit konstantem q_1, mithin

$$\frac{P}{T} = \frac{\varepsilon\eta}{q_1}.$$

Die Kurve Γ ist daher (im Raum) eine Schraubenlinie mit der variabeln Torsion

$$T = \varrho\varrho' \frac{1+q_1^2}{q_1}.$$

Aber diesem geometrisch evidenten bekannten Satze kann man eine weit größere Ausdehnung geben, indem man den folgenden Satz beweist, der bisher nicht bemerkt zu sein scheint, obwohl er auch durch geometrische Betrachtungen zu erkennen ist:

Für jede Schraubenlinie C bilden die aus $q_1 = \text{const.}$ entspringenden Kurven Γ wieder eine Schraubenlinie.

Setzt man nämlich $\tau = \varrho k$, so ist

$$II = \frac{1+q_1^2}{k\varrho}, \quad \omega = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{q_1}{k} - \varrho'\right\}$$

$$II' = -\frac{(1+q_1^2)\varrho'}{k\varrho^2}.$$

Die Gleichung § III, II) für σ liefert

$$\sigma = \frac{k^2\varrho^2}{q_1(1+q_1^2+k^2)}$$

und hieraus folgt

$$\frac{P}{T} = \frac{k^2\{(1+q_1^2)+k^2\}^{3/2}}{q[(1+q_1^2)+k^2]}\,\varepsilon\eta = \frac{k^2\varepsilon\eta}{q_1}\sqrt{1+q_1^2+k^2}$$

d. h. es ist die Kurve Γ eine Schraubenlinie, deren Steigungswinkel von q_1 abhängig ist.

Die Filarevolute endlich wird zum Kegel, und Γ reduziert sich auf dessen Spitze, wenn

$$w = \frac{\varrho\varrho'}{q_1} - \frac{\varrho^2}{q_1^2\tau} = 0$$

oder

$$q_1 = \frac{\varrho}{\tau\varrho'}$$

ist. Ist nun die Raumkurve C nicht von konstanter Krümmung, so ergibt sich durch Einsetzen dieses Wertes von q_1 in die Bedingung $\Pi = 0$

$$\varrho + \tau \frac{d}{ds}(\varrho' \tau) = 0$$

die bekannte Bedingung dafür, daß C eine sphärische Kurve ist, wie hier noch bemerkt sein möge.

Auch für die rektifizierende Fläche von C ergeben sich neue Eigenschaften. Sie entsteht für $q = 0$, d. h. als Umhüllungsgebilde der Tangentenebenen von C senkrecht zur Schmiegungsebene, wobei natürlich C als Raumkurve vorausgesetzt wird. Es ist dann

$$\Pi = \frac{1}{\tau}, \quad D = \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\varrho^2}, \quad \omega = -\frac{\varrho'}{\varrho},$$

$$\frac{\Pi}{D} = \cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\varrho}\right)^2}}.$$

Die in der rektifizierenden Ebene gelegene Erzeugende PQ von Γ macht also für die Schraubenlinien C konstanten Winkel mit der Tangente von C im Punkte P.

Zugleich wird $$\sigma = -\frac{\varrho}{d\left(\frac{\varrho}{\tau}\right)}{ds}$$

also, wenn zur Abkürzung $\frac{\varrho}{\tau} = \theta$ gesetzt wird,

$$\frac{\sigma}{\varrho} = -\frac{1}{\theta'}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{\sigma'}{\varrho} - \frac{\sigma \varrho'}{\varrho^2} = \frac{\sigma' + \omega \sigma}{\varrho} = \frac{\omega}{\varrho} = \frac{\theta''}{\theta'^3}$$

und darnach wird

$$T = \varrho \frac{\theta''}{\theta'^2}$$

$$P = \left| \frac{\theta''}{\theta'^3} (1 + \theta^2)^{3/2} \right|.$$

Der Ausdruck für P ist dadurch von Interesse, daß in ihm nur das Verhältnis der beiden Krümmungen von C vorkommt. Daraus folgt der Satz:

Die zu den rektifizierenden Flächen von Kurven C mit demselben Verhältnis $\theta = \frac{\varrho}{\tau}$ in entsprechenden Punkten gleicher Bogenlänge gehörenden Kurven Γ haben sämtlich denselben Krümmungshalbmesser P, während die Torsion T dem Krümmungshalbmesser von C proportional ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß θ' nicht selbst Null, also C eine Schraubenlinie ist, für welchen Fall σ unendlich wird. Ist aber $\frac{\varrho}{\tau}$ eine lineare Funktion von s, so wird die Kurve Γ in einen im Endlichen gelegenen Punkt degenerieren, da jetzt $w = 0$ wird.

§ VII.

Das Problem der Traktorien.

Als Huygenssche Traktorie einer Kurve C im Raum (vgl. den Brief von Huygens an Leibniz vom 17. Sept. 1693, Gerhardt, Briefwechsel von Leibniz, Bd. II, S. 161) kann man diejenige Kurve Γ bezeichnen, welche von den Endpunkten Q eines unausdehnsamen Fadens PQ gebildet wird, dessen Anfangspunkt P auf der Kurve C gleitet, und der beständig in seiner eigenen Richtung PQ geradlinig gespannt erhalten bleibt; allerdings hat Huygens dabei wohl nur an die Traktorie oder Traktrix einer ebenen Kurve in ihrer eigenen Ebene gedacht.

Sie wird zur Traktorie im allgemeineren Sinne, wenn $PQ = h$ eine beliebige Funktion $f(s)$ von s ist, gebildet von den Orthogonaltrajektorien der mit dem Radius $f(s)$ um die

Punkte P von C beschriebenen Kugeln. G. Loria hat in seinem Werke (Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1911, S. 187 ff.[1]) die Gleichung der Huygensschen Traktorie des Kreises in seiner Ebene auf ziemlich umständlichem Wege nach A. Bordoni (1820) reproduziert. Er scheint dabei aber übersehen zu haben, daß Darboux bereits 1887 in den Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. I, S. 113 das Problem für die allgemeinen Traktorien einer ebenen Kurve in ihrer eigenen Ebene auf die Lösung einer Riccatischen Gleichung durch eine sehr einfache analytische Betrachtung reduziert hat, da er nur ganz beiläufig bemerkt, „daß die Auffindung der Traktrix im allgemeinen die Auflösung von Differentialgleichungen und mindestens Quadraturen" verlange.

Aber Darboux hat zugleich in den Leçons sur les systèmes orthogonaux, Paris 1898, S. 41 das allgemeine Problem der Traktorien einer Kurve C im Raum behandelt und gezeigt, daß dasselbe ebenfalls die Lösung von zwei Riccatischen, übrigens ineinander transformierbaren Gleichungen, erfordert, ohne allerdings die Beziehung seines Orthogonalproblems von Kugeln zu dem Traktorienproblem zu erwähnen, noch auch irgend eine Anwendung hinzuzufügen. Ich werde im folgenden an Stelle der Darbouxschen Gleichungen einfachere entwickeln, die nur von den natürlichen Variabeln der Kurve C abhängen.[2])

Als allgemeinstes Traktorienproblem kann man endlich, wie hier noch bemerkt sein möge, das zur Gleichung

$$f(p, q, r) = 0$$

gehörige bezeichnen.

Als Differentialgleichung der allgemeinen Traktorien $h = f(s) = f$ erscheint nach den Gleichungen I, II des § III die nicht lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für q_1

---

[1]) Deutsche Ausgabe von F. Schütte.

[2]) Siehe § X, Formel IV.

$$\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho} = f^2 \left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2} \right)^2,$$

die zunächst keine weitere Behandlung erkennen läßt. Ich werde nun zeigen, daß dieselbe durch eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung ersetzt werden kann. Aus den Gleichungen 5a) des § III für $z = 1/\theta$

$$pz = p_1, \quad qz = q_1, \quad rz = r_1 \text{ [1]}$$

1) $$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \; q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \; r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0$$

und der Bedingung

2) $$p^2 + q^2 + r^2 = f^2 = (p_1^2 + q_1^2 + r_1^2) \frac{1}{z^2}$$

folgt durch Multiplikation von 1) mit den p_1, q_1, r_1 und Addition

3) $$p_1 = -f(fz)',$$

4) $$q_1 = (r_1' \tau), \quad p_1 = -\varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (\tau_1' r') \right] \text{ oder}$$

5) $$z = \left\{ \varrho \left(\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right) \right\}' + \frac{r_1' \tau}{\varrho},$$

also, wenn man 5) mit f multipliziert, nach 3) und 4)

I $$\varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right] = f \left(f \left\{ \varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right] \right\}' + f \frac{r_1' \tau}{\varrho} \right)'.$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung für r_1. Durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor

6) $$\left\{ \varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right] \right\}' + \frac{r_1' \tau}{\varrho} = z$$

erhält man als erstes Integral von I die nicht lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

7) $$\varrho^2 \left(\frac{r_1}{\tau} + r_1' \tau \right)^2 + r_1^2 + (r_1' \tau)^2 = f^2 \left\{ \varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right] \right\}' + \frac{r_1' \tau}{\varrho} \Big\}^2 + \text{const},$$

[1] Das hier eingeführte q_1 darf nicht mit der im § III definierten Variabeln q_1 verwechselt werden.

also nach 3), 4), 5), 6) die Gleichung

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = f^2 z^2 + \text{const.}$$

Es genügt also nicht jede Lösung von I auch den Gleichungen 1) und 2). Sondern den 4 Integrationskonstanten von I sind solche Werte zu erteilen, daß die Konstante in 7) den Wert Null erhält. Dies ist aber ein immer ausführbarer Prozeß, und damit ist die Lösung der Aufgabe auf die Gleichung I zurückgeführt.[1])

Anstatt der Gleichung I für r_1 kann man auch die für z entwickeln, was ebenfalls zur Lösung führt, da alsdann p_1 nach 3), q_1 und r_1 nach 1) bekannt sind. Setzt man demgemäß

$$\begin{aligned} p_1 &= -f(fz)' \\ q_1 &= \varrho\,[z - (f(fz)')'] \\ r_1 &= \tau\,\{f(fz)' - (\varrho\,[z - (f(fz)')']\,)'\}, \end{aligned}$$

so liefert die Substitution dieser Werte in die letzte der Gleichungen 1)

$$\frac{\varrho}{\tau}\,[z - (f(fz)')'] + \left[\tau\,\{(\varrho\,[z - (f(fz)')'])' - \frac{f(fz)'}{\varrho}\right]' = 0,$$

welche Gleichung wieder ein quadratisches erstes Integral liefert, dessen Konstante Null sein muß.

Um auch die zu I analoge lineare Gleichung für z zu erhalten, setze man nach den Gleichungen 2 b) und 4) des § I

$$\alpha) \quad (c_1 - \int \alpha z\,ds)^2 + (c_2 - \int \beta z\,ds)^2 + (c_3 - \int \gamma z\,ds)^2 = z^2 f^2$$

oder nach den in 5 c) dort eingeführten Abkürzungen

$$A^2 + B^2 + C^2 = z^2 f^2.$$

Diese „Integralgleichung für z" läßt sich durch wiederholte Differentiation nach s vereinfachen. Man erhält so zunächst

$$\beta) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma = -f(fz)'$$

und weiter

---

[1]) Da eine der Konstanten durch die drei anderen ausgedrückt wird, enthalten die Verhältnisse der p_1, q_1, r_1 gegen z, oder die p, q, r noch zwei Konstanten, wie es sein muß.

$\gamma)$ $$A\xi + B\eta + C\zeta = [z - (f(fz)')']\varrho$$

$\delta)$ $$A\lambda + B\mu + C\nu = \tau\left(\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right).$$

Die Summe der Quadrate von $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ liefert dann wieder die Gleichung $\alpha)$. Durch Differentiation von $\delta)$ erhält man jetzt nach $\gamma)$

II) $$\varrho[z - f(fz)'] = \tau\left[\tau\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right]'$$

als lineare homogene Gleichung vierter Ordnung für z, welche das erste Integral

III) $$(f(fz)')^2 + \varrho^2[z - (f(fz)')]^2 + \tau^2\left[\frac{f}{\varrho}(fz)' - \{\varrho[z - (f(fz)')']\}'\right]^2 = f^2 \cdot z^2$$

haben muß.

Für eine ebene Kurve C folgt aus $p^2 + q^2 + r^2 = f^2$ und den Gleichungen 5) des § I für $\tau = \infty$

$$\frac{q}{r} = \varrho\left[\frac{1}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)'\right],$$

$$\frac{p}{r} = -\varrho\left(\frac{q}{r}\right)' = -\varrho\left[\varrho\left(\frac{1}{r} + \left(\frac{p}{r}\right)'\right)\right]'.$$

Da außerdem $\frac{p}{r} = -f\left(\frac{f}{r}\right)'$, so hat man für $z = \frac{1}{r}$ die auch aus II) für $\tau = \infty$ folgende lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für z

II a) $$\varrho(\varrho[z - (f(fz)')'])' = f(fz)',$$

deren Integral

II b) $$\varrho^2[z - (f(fz)')']^2 + f^2(fz)'^2 = f^2 z^2 + \text{const}$$

mit $p^2 + q^2 + r^2 = f^2$ übereinstimmt, wenn die Konstante gleich -1 genommen wird. Um dies aus einem Beispiel zu zeigen, das später vollständiger behandelt wird, sei $f = h$, $\varrho = \text{const}$. Die Gleichung II a) ist dann

$$-h^2 z' + \varrho^2(z' - h^2 z''') = 0$$

und hat für $z' = \zeta$ und $a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - h^2}}{\varrho h}$ das Integral

$$\zeta = e^{as} c_1 + e^{-as} c_2, \quad z = \frac{e^{as} c_1 - e^{-as} c_2 + c_3}{a},$$

so daß

$$\frac{p}{r} = -h^2 z' = e^{as} c_1 + e^{-as} c_2,$$

$$\frac{q}{r} = \varrho (z - h^2 z'') = \varrho \left[(e^{as} c_1 - e^{-as} c_2) \gamma + \frac{c_3}{a} \right]$$

wird, wenn $\gamma = \frac{1 - a^2 h^2}{a}$ ist.

Bildet man jetzt die Gleichung

$$\frac{p^2 + q^2}{r^2} = \frac{f^2}{r^2} - 1,$$

so heben sich die s enthaltenden Glieder fort und es bleibt als Gleichung zwischen den drei Konstanten c_1, c_2, c_3

$$c_3^2 = \frac{1}{\varrho^2 h^2} - 4 \frac{c_1 c_2 h^2}{\varrho^2 - h^2}.$$

Dabei ist $\varrho \neq h$ vorausgesetzt. Für $\varrho = h$ wird

$$\zeta = c_1 s + c_2, \quad z = \frac{c_1 s^2}{2 h^2} + \frac{c_1 s}{n} + c_3$$

und es ist jetzt zu setzen

$$(c_1^2 + c_2^2 - 2 c_1 c_3) h^2 + 1 = 0.^1)$$

---

[1]) Soll die ebene C in ihrer Ebene betrachtet werden, so ist $r = 0$. Setzt man dann $pz = p_1$, $qz = q_1$, so wird

$$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{\varrho} = 0$$

und es folgt wieder die Gleichung II b, in der die Konstante jetzt gleich Null zu nehmen ist. Für $z = e^{\int \zeta ds}$ ist dann

$$(fz)' = z(f' + f\zeta) = z\psi; \quad (f(fz)')' = z(f\psi' + \psi^2),$$

also wird II b

$$\varrho (1 - \psi' f - \psi^2) = f \sqrt{1 - \psi^2}$$

Für die homogene Bedingung

8) $$ap + bq + cr = 0,$$

in der a, b, c Funktionen von s sind, folgt aus § III, Ia

8a) $$a\Pi\varrho + bq_1 + c = 0.$$

Dies ist für $a \neq 0$ eine Riccatische Gleichung für q_1. Sie zeigt, daß in der dem Punkte P zugeordneten Ebene 8) je vier Erzeugende PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4, denen die Kurven Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 entsprechen, ein konstantes Doppelverhältnis haben, so daß also aus irgend drei partikulären Lösungen von 8) durch diese Doppelverhältniseigenschaft jede weitere Lösung abgeleitet werden kann, was übrigens geometrisch selbstverständlich ist. Ist aber $a = 0$, so folgt aus 8a) q_1 selbst. Daß aber in der Ebene $bq + cr = 0$, welche jetzt die Tangente von C enthält, nur eine einzige Kurve Γ vorhanden ist, folgt aus den Gleichungen 5a) des § I. Denn man hat jetzt

$$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1' + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{r_1}{\tau} = 0, \quad r_1' - \frac{q_1}{\tau} = 0,$$

also zur Bestimmung von r_1 die Gleichung

$$b(r_1'\tau) + cr_1 = 0,$$

welche r_1 bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, der dann auch in

$$q_1 = r_1'\tau, \quad p_1 = -\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]$$

und z auftritt, so daß die p, q, r selbst völlig bestimmt sind. Die allgemeinere Gleichung

9) $$ap + bq + cr = 1,$$

in der a, b, c Funktionen von s sind, liefert für den Fall einer Raumkurve $C(\tau \neq \infty)$ und

---

und diese Gleichung wird durch die Substitution $(-\psi = (1+\psi)\varphi^2$ in die Riccatische Gleichung

$$2\varrho(\varphi + \varphi' f) = f(1+\varphi^2)$$

verwandelt, was allerdings viel einfacher in 2) § IV erreicht wurde.

$$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q_1 = r_1' \tau, \quad p_1 = -\varrho \left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1' \tau)' \right]$$

die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für r_1

$$\text{IV)} \quad -a\left(\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right) + b r_1' \tau + c r_1 = \frac{r_1 \tau}{\varrho} + \left(\varrho\left[\frac{r_1}{\tau} + (r_1'\tau)'\right]\right)',$$

so daß die Lösungen p, q, r von den Verhältnissen der drei linear homogenen Konstanten in dem Integrale von IV) abhängen. Ist aber $\tau = \infty$, so hat man $r_1 = \text{konst} = c_1$, $p_1 = -\varrho q_1'$, $z = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1')'$, und es folgt aus 9) die nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$-a(\varrho q_1') + b q_1 + c c_1 = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1'),$$

deren Auflösung wieder die p, q, r von zwei linear nicht homogen auftretenden Konstanten abhängig macht.[1])

Dies erkennt man auch geometrisch. Denn die Gleichung 9) ordnet jedem Punkte P jetzt eine $(a \neq 0)$ nicht durch ihn gehende Ebene zu. Zieht man in der zu $s = s_0$ gehörigen Ebene E_0, welche dem Punkte P_0 entspricht, eine willkürliche Gerade, so wird jeder auf ihr gewählte Punkt Q_0 eine Richtung $P_0 Q_0$ bestimmen, welche die konsekutive Ebene E_0' zu dem benachbarten Punkte P_0' in dem zu Q_0 benachbarten Punkte Q_0' schneidet; Q_0 und Q_0' sind dann benachbarte Punkte einer Kurve Γ. Damit ist eine Differentialkonstruktion der Gesamtheit aller durch 9) gegebenen Kurven Γ gegeben, deren analytische Bestimmung aus IV) folgt; die zu vier in gerader Linie gewählten Punkten Q_0', Q_0^2, Q_0^3, Q_0^4 Kurven Γ haben wieder die Eigenschaft konstanten Doppelverhältnisses für die Strahlen PQ_1', PQ^2, PQ^3, PQ^4.

---

[1]) Die Gleichung 9) gibt je nach den Werten der a, b, c zu einer großen Zahl weiterer Fragen Veranlassung, die hier nicht ausgeführt werden können.

§ VIII.

Über die Invarianten gewisser Differentialgleichungen n-Ordnung, die durch eine lineare homogene Differentialgleichung $n+1$-Ordnung lösbar sind.

Solche Differentialgleiehungen sind in den vorigen Paragraphen mehrfach hervorgetreten. Eine lineare homogene $D_n = 0$

$$z^{(n)} A_{n_1} + z^{(n-1)} A_{n-1} + \cdots + z A_0 = 0^1)$$

geht durch die Substitution

$$1) \qquad z = e^{\int \sigma_1 ds}$$

in eine nicht lineare $D_{n-1} = 0$ über, deren Form im allgemeinen nicht einfach ist, deren Integral σ_1 jetzt als Quotient der die Verhältnisse von n linear homogenen Konstanten c_1, $c_2 \ldots c_n$ enthaltenden Ausdrücke $z' : z$ erscheint, und diese D_{n-1} als eine Verallgemeinerung der Riccatischen Gleichung kennzeichnet.

Es handelt sich jetzt umgekehrt um die Frage: Wann läßt sich die gegebene $D_{n-1} = 0$ durch die Substitution 1) auf eine lineare homogene $D_n = 0$ reduzieren?

Aus der Gleichung

$$2) \qquad A z'' + B z' + C z = 0$$

wird nach 1)

$$3) \qquad A(\sigma_1^2 + \sigma_1') + B\sigma_1 + C_1 = 0.$$

Setzt man umgekehrt in der willkürlich gegebenen Gleichung, in der natürlich A_1 und B_1 nicht Null sind

$$4) \qquad A_1 \sigma^2 + B_1 \sigma' + C_1 \sigma + D_1 = 0$$

an Stelle von σ

$$5) \qquad \sigma = \lambda \sigma_1,$$

so geht sie über in

---

[1]) Die Buchstaben A, B, C ... bedeuten im folgenden Funktionen der unabhängigen Variabeln s.

$$A_1\lambda^2\sigma_1^2 + B_1(\lambda\sigma_1' + \lambda'\sigma_1) + C_1\lambda\sigma_1 + D_1 = 0,$$

also in die Form 3), wenn

$$A_1\lambda^2 = B_1\lambda = A$$
$$C_1\lambda + B_1\lambda' = B, \quad D_1 = C.$$

Diese Gleichungen lassen sich durch $\lambda = \frac{B_1}{A_1}$ immer erfüllen. Das entspricht dem bekannten Verfahren, die Riccatische Gleichung in Zusammenhang mit der linearen homogenen $D_2 = 0$ zu bringen, denn die Lösung von 3) ist jetzt von der Form

$$\sigma_1 = \frac{A_1\sigma}{B_1} = \frac{A_1 z'}{B_1 z}.$$

Ebenso geht nun die Gleichung

6) $$Az''' + Bz'' + Cz' + Dz = 0$$

durch 1) in

7) $$A(\sigma_1'' + 3\sigma_1\sigma_1' + \sigma_1^3) + B(\sigma_1' + \sigma_1^2) + C\sigma_1 + D = 0$$

über. Umgekehrt wird die willkürlich gegebene Gleichung

8) $$A_1\sigma'' + B_1\sigma\sigma' + C_1\sigma^3 + D_1\sigma' + E_1\sigma^2 + F\sigma + G = 0$$

in die Form 7) durch 5) transformiert, wenn die 7 Gleichungen

$$A_1\lambda = A, \quad B_1\lambda\lambda' + E_1\lambda^2 = B$$
I) $$B_1\lambda^2 = 3A, \quad 2A_1\lambda' + D_1\lambda = B$$
$$C_1\lambda^3 = A, \quad A_1\lambda'' + D_1\lambda' + F\lambda^2 = C, \quad G = D$$

bestehen. Da die beiden letzten Bedingungen nur die Koeffizienten D und C bestimmen, handelt es sich hier um die Verträglichkeit der fünf ersteren. Sie erfordert, daß

$$\lambda = \frac{3B_1}{A_1} = \frac{B_1}{3C_1}$$

oder

A) $$9A_1C_1 = B_1^2$$

und ferner

$$6A_1 d\left(\frac{A_1}{B_1}\Big/ds\right) + 3D_1\frac{A_1}{B_1} = 9B_1\frac{A_1}{B_1}\frac{d}{ds}\left(\frac{A_1}{B_1}\right) + 9E_1\left(\frac{A_1}{B_1}\right)^2$$

oder

B) $$A_1' B_1 - B_1' A = D_1 B_1 - 3 E_1 A_1$$

sei. Wählt man, worin keine Beschränkung liegt, A gleich Eins, so ergibt sich als allgemeine Form der D_2, welche auf eine lineare homogene D_3 zurückgeführt werden kann

$$\sigma'' + B\sigma\sigma' + \frac{B^2}{9}\sigma^3 + D\sigma' + \left(\frac{DB + B'}{3}\right)\sigma^2 + F\sigma + G = 0$$

oder

$$\sigma'' + B\sigma\sigma' + \frac{B'}{3}\sigma^2 + \frac{B^2}{9}\sigma^3 + D\left(\sigma' + \frac{B\sigma^2}{3}\right) + F\sigma + G = 0,$$

in der jetzt B, D, F, G beliebige Funktionen von s sind. Setzt man noch $B = 3\beta$, so hat man

$$\sigma'' + 3\beta\sigma\sigma' + \beta'\sigma^2 + \beta^2\sigma^3 + D(\sigma' + \beta\sigma^2) + F\sigma + G = 0$$

und kann die Richtigkeit der Behauptung durch direkte Substitution von z bestätigen.[1])

---

[1]) Als Beispiel betrachte man die Gleichung

1) $$ap + bq + cr = 1.$$

Setzt man nach Ia, § III

$$1 + \sigma\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right) = 0$$

$$p = \left(\frac{1 + q_1^2}{\tau} - q_1'\right)\sigma$$

$$q = q_1\frac{\sigma}{\varrho}, \quad r = -\frac{\sigma}{\varrho},$$

so wird vermöge der Substitution

$$q_1 = -\frac{r_1'\tau}{r_1}$$

$$\Pi = \frac{1}{\tau} + \frac{r_1''}{r_1}\tau + \frac{r_1'}{r_1}\tau'$$

und da in $\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}$ die Glieder mit

$$\frac{r''r_1'\tau}{r_1^2} \text{ und } \left(\frac{r_1'}{r_1}\right)^2\tau'$$

sich ebenfalls herausheben, die Gleichung 1) oder

$$a\Pi - b\frac{r_1'}{r_1}\tau - \frac{c}{\varrho} = -\left(\Pi' - \Pi\omega - \frac{q_1}{\varrho^2}\right)$$

in eine lineare homogene $D_3 = 0$ übergehen, was nicht unmittelbar zu ersehen war.

Es ist zu vermuten, daß die beiden notwendigen und hinreichenden Bedingungen A) und B) für die Koeffizienten von 8) Invarianten sind in Bezug auf solche Transformationen, die entweder die abhängige Variable σ durch eine Substitution von der Form $\sigma = \mu\sigma_1$ oder die unabhängige s durch eine Funktion s_1 derselben von s ersetzen.

Um dies zu zeigen, setze man zunächst, wo μ irgend eine Funktiou von s sei,

$$\sigma = \mu\sigma_1.$$

Man erhält dann, wenn die transformierten Koeffizienten durch Klammern bezeichnet werden

$$\begin{aligned} &(A_1) = A_1\mu, \quad (D_1) = 2A_1\mu' + D_1\mu \\ 9)\qquad &(B_1) = B_1\mu^2, \quad (E_1) = B_1\mu\mu' + E_1\mu^2 \\ &(C_1) = C_1\mu^3. \end{aligned}$$

Es wird alsdann, wenn man

$$J_1 = 9A_1C_1 - B_1^2 \text{ setzt,}$$

$$C)\qquad (J_1) = (9AC - B^2)\mu^4 = \mu^4 J_1.$$

Setzt man ferner nach B)

$$J_2 = A_1'B_1 - B_1'A - D_1B_1 + 3E_1A_1$$
$$(J_2) = (A_1')(B_1) - (B_1')(A_1) - (D_1)(B_1) + 3(E_1)(A_1)$$

oder so ergibt sich für die rechte Seite von (J_2) nach 9)

$$(A_1'\mu + A_1\mu')B_1\mu^2 - (B_1'\mu^2 + 2B_1\mu\mu')\mu A_1$$
$$-(2A_1\mu' + D_1\mu)B_1\mu^2 + 3A_1\mu(B_1\mu\mu' + E_1\mu^2) \text{ oder}$$

$$D)\qquad (J_2) = \mu^3 J_2.$$

Führt man, um den zweiten Teil der Behauptung zu beweisen, an Stelle von s eine neue Variable s_1 ein, welche Funktion von s ist, so ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds_1}s_1'$$
$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \frac{d^2\sigma}{ds_1^2}s_1'^2 + \frac{d\sigma}{ds_1}s_1'',$$

wo rechter Hand die Differentialquotienten von ss_1 nach s geschrieben sind. Es ergeben sich dann die — wieder durch Einklammerung bezeichneten — transformierten Koeffizienten

$$\begin{aligned}(A_1) &= A_1 s'^2, \quad (D_1) = D_1 s_1' + A_1 s_1''\\ (B_1) &= B_1 s', \quad (E_1) = E\\ (C_1) &= C_1.\end{aligned}$$

Da endlich

$$\frac{dl(A_1)}{ds_1} = A_1' s_1' + 2 A_1 s_1''$$

$$\frac{d(B_1)}{ds_1} = B_1' + B_1 \frac{s_1''}{s_1'},$$

so erhält man leicht

$$\begin{aligned}(J_1) &= J_1 \sigma_1'^2\\ (J_2) &= J_2 \sigma_1'^2,\end{aligned}$$

so daß hier z. B. $J_1 : J_2$ eine absolute Invariante ist.

Für eine lineare homogene $D_4 = 0$ gestaltet sich die Betrachtung wie folgt: Ist

10) $A z'''' + B z''' + C z'' + D z' + E z = 0$ eine $D_4 = 0$,

so entsteht durch die Transformation $z = e^{\int \sigma_1 ds}$ aus 10)

11) $$\begin{aligned}&A\sigma_1^4 + 6A\sigma_1^2\sigma_1' + 4A\sigma_1\sigma_1'' + 3A\sigma_1'^2 + A\sigma_1''' + B\sigma_1^3\\ &+ 3B\sigma_1\sigma_1' + B\sigma_1'' + C\sigma_1^2 + C\sigma_1' + D\sigma_1 + E = 0.\end{aligned}$$

Ist umgekehrt eine $D_5 = 0$ von der Form

12) $$\begin{aligned}&A_1\sigma^4 + B_1\sigma^2\sigma' + C_1\sigma\sigma'' + D_1\sigma'^2 + E_1\sigma''' + F_1\sigma^3\\ &+ G_1\sigma\sigma' + H\sigma'' + J_1\sigma^2 + K_1\sigma' + L_1\sigma + M_1 = 0\end{aligned}$$

gegeben, so wird sie durch die Substitution $\sigma = \lambda\sigma_1$ auf die Form 11) gebracht, wenn die Gleichung

12 a) $$\begin{aligned}&A_1\sigma_1^4\lambda^4 + \sigma_1'\sigma_1^2 B_1\lambda^3 + \sigma_1\sigma_1'' C_1\lambda^2 + \sigma_1'^2 D_1\lambda^2 + \sigma_1''' E_1\lambda\\ &+ \sigma_1^3(B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3) + \sigma_1\sigma_1'(2C_1\lambda\lambda' + 2D_1\lambda\lambda' + G_1\lambda^2)\\ &+ \sigma_1''(B_1\lambda + 3E_1\lambda_1') + \sigma_1^2(D\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + C_1\lambda\lambda'')\\ &+ \sigma_1'(3E_1\lambda'' + 2H\lambda' + K_1\lambda) + \sigma_1(E_1\lambda''' + H_1\lambda''\\ &+ K_1\lambda' + L_1\lambda) + M_1 = 0\end{aligned}$$

mit 11) übereinstimmt.

Dazu sind die 12 Gleichungen

$$A_1\lambda^4 = A, \quad B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3 = B,$$
$$B_1\lambda^3 = 6A, \quad 2\lambda\lambda'(C_1 + D_1) + G_1\lambda^2 = 3B,$$
$$C_1\lambda^2 = 4A, \quad H_1\lambda + 3E_1\lambda' = B,$$
$$D_1\lambda^2 = 3A,$$

12 b) $$E_1\lambda = A,$$
$$D_1\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + G_1\lambda\lambda'' = C$$
$$3E_1\lambda'' + 2H_1\lambda' + K_1\lambda = C$$
$$E_1\lambda''' + H_1\lambda'' + K_1\lambda' + L_1\lambda = D, \quad M_1 = E$$

erforderlich, und dazu sind die Gleichungen

13) $$\lambda\frac{A_1}{B_1} = {}^1/_6, \quad \lambda\frac{B_1}{C_1} = {}^3/_2, \quad \frac{C_1}{D_1} = {}^4/_3, \quad \lambda\frac{D_1}{E_1} = 3$$
$$\frac{B_1\lambda\lambda' + F_1\lambda^2}{2(D_1 + C_1)\lambda' + G_1\lambda} = {}^1/_3, \quad \frac{B_1\lambda^2\lambda' + F_1\lambda^3}{H_1\lambda + 3E_1\lambda'} = 1,$$
$$D_1\lambda'^2 + G_1\lambda\lambda' + J_1\lambda^2 + G_1\lambda\lambda'' = 3E_1\lambda'' + 2H_1\lambda' + K_1\lambda$$

notwendig und hinreichend. Es entstehen demnach sechs Bedingungen zwischen den Koeffizienten A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, L_1, welche wieder Invarianten in Bezug auf jede Transformation, die entweder σ_1 durch $\mu\sigma_2$ oder die unabhängige Variable s durch eine Funktion von s ersetzt, sind.

Ersetzt man zunächst σ_1 durch $\mu\sigma_2$, so werden die transformierten Koeffizienten (A_1), (B_1), . . . nach 12 a)

$$(A_1) = A\mu^4, \quad (F_1) = B_1\mu^2\mu' + F_1\mu^3$$
$$(B_1) = B_1\mu^3, \quad (G_1) = 2(C_1 + D_1)\mu\mu' + G_1\mu^2$$
$$(C_1) = C_1\mu^2, \quad (H_1) = H_1\mu + 3E_1\mu'$$
$$(D_1) = D_1\mu^2, \quad (J_1) = D_1\mu'^2 + G_1\mu\mu' + J_1\mu^2 + C_1\mu\mu''$$
$$(E_1) = E_1\mu, \quad (K_1) = 3E_1\mu'' + 2H_1\mu' + K_1\mu$$
(14) $$(L_1) = E_1\mu''' + H_1\mu'' + K_1\mu' + L_1\mu$$

Es wird aber nach 12 b) zunächst

$$B_1^2 - 9A_1C_1 = 0, \quad 4D_1 = 3C_1, \quad C_1B_1 - 24E_1A_1 = 0.$$

Setzt man diese Ausdrücke gleich J_1, J_2, J_3 und bestimmt nach 14) ihre Transformierten (J_1), (J_2), (J_3), so erhält man

$$(J_1) = \mu^6 J_1$$
$$(J_2) = \mu^2 J_2$$
$$(J_3) = \mu^5 J_3.$$

Die erste der drei weiteren Bedingungen 12 b) wird zufolge des Ausdruckes von $\lambda = {}^1/_6 \frac{B_1}{A_1}$ nach Fortlassung überflüssiger Faktoren und Benutzung von $C_1 = 9 \frac{B_1^2}{A_1}$

$$\frac{2}{9} \frac{B_1^2}{A_1} \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + F_1 \frac{B_1^2}{A_1^2} - 2 G_1 \frac{B_1}{A_1} = 0.$$

Setzt man jetzt

$$J_4 = {}^2/_9 B_1 \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + F_1 \frac{B_1}{A_1} - 2 G_1,$$

so erhält man nach 14)

$$(J_4) = \mu^2 J_4$$

und in derselben Weise für

$$J_5 = \frac{1}{72} \frac{B_1^2}{A_1} \frac{d}{ds}\left(\frac{B_1}{A_1}\right) + \frac{F_1 B_1^2}{36 A_1^2} - H_1$$
$$(J_5) = \mu J_5.$$

Die letzte Invariante ist auf dieselbe Weise zu behandeln, was ich hier nicht weiter ausführe. Ebensowenig gehe ich auf die Betrachtung der ganz speziellen Invarianten ein, die für ein beliebiges n auftreten. Denn zur Bestimmung von der n-Ableitung $z^{(n)}$ hat man für

$$z = e^{f(s)} = e^f, \quad f = \int \sigma \, ds$$

in der Gleichung

$$z + \frac{h}{1} z' + \frac{h^2}{2!} z'' + \cdots = z e^{h\left(f' + \frac{h}{2!} f'' + \frac{h^2}{3!} f''' + \cdots\right)}$$

den mit $n!$ multiplizierten Koeffizienten von h^n auf der rechten Seite zu nehmen. Da nun

$$(a_1 + a_2 + \cdots a_m)^p = \Sigma p! \frac{a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_m^{\lambda_m}}{\lambda_1! \, \lambda_2! \ldots \lambda_m!}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p,$$

so entsteht der Faktor von h^n rechts dadurch, daß

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p$$
$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots (m-1)\lambda_m = n - p,$$

oder

$$1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = p$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots m\lambda_m = n$$

ist, so daß $m \leqq n$ und

$$2) \quad z^{(n)} = \frac{dz^n}{ds^n} = z\,n! \sum_{\lambda} \frac{\left(\frac{\sigma}{1!}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{\sigma'}{2!}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{\sigma''}{3!}\right)^{\lambda_3}\cdots\left(\frac{\sigma^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_n!}$$

unter den Bedingungen 1) wird. Dadurch wird die allgemeine Form von $z^{(n)}$ aber von den für ganze positive λ zu lösenden Gleichungen 1) abhängig und $z^{(n)}$ setzt sich aus Gliedern zusammen, welche eine größere Zahl von zu gewissen Potenzen erhobenen Ableitungen von σ durch Multiplikation vereinigt erhalten, so daß die Ermittelung der Bedingungen für die Koeffizienten der $D_{n-1} = 0$ nicht mehr so einfach ist, wie in den Fällen, wo $n < 6$ ist, bei denen immer nur zwei Ableitungen der σ miteinander multipliziert auftreten.

§ IX.

Die Huygensschen Traktorien der gemeinen Schraubenlinie.

Aus der Gleichung I des § VII folgt für $f = h =$ konst. und ϱ, τ als Konstanten die lineare homogene $D_4 = 0$

$$1) \quad r'''' + r''\left(\frac{\varrho^2 + \tau^2}{\tau^2\varrho^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{r}{\tau^2 h^2}.$$

Setzt man $\quad r = \sin(\varepsilon s + c_1),$

so ergibt sich die charakteristische Gleichung für ε

$$2) \quad \varepsilon^4 - \varepsilon^2\left(\frac{\varrho^2 + \tau^2}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{\tau^2 h^2}$$

mit den Wurzeln für ε^2

$$3) \quad \varepsilon_1^2 = {}^1/_2\left(a - \sqrt{a^2 + \frac{4}{h^2\tau^2}}\right), \quad \varepsilon_2^2 = {}^1/_2\left(a + \sqrt{a^2 + \frac{4}{h^2\tau^2}}\right),$$

wobei $a = \dfrac{\varrho^2 + \tau^2}{\varrho^2 \tau^2} - \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \dfrac{1}{h^2}, \quad \delta = \varrho^2 + \tau^2,$

von denen $\varepsilon_2^2 = \varkappa_2^2$ positiv, $\varepsilon_1^2 = -\varkappa_1^2$ aber negativ ist. Wird jetzt der Wert von r

4) $$r = c_2 \sin(\varkappa_2 s + \gamma_2) + c_1 \sin(i\varkappa_1 s + \gamma_1)$$

in die Bedingungsgleichung 7) des § VII eingesetzt, die unter den angegebenen Voraussetzungen die Gestalt

A) $$r^2 \frac{\delta^2}{\tau^2} + r'^2 \left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\varrho^2 \tau^2}\right) + 2 r r'' \varrho^2 + r''^2 \tau^2 \varrho^2 - 2 h^2 r' r''' \delta - h^2 r'''^2 \tau^2 \varrho^2 = \text{konst.}$$

annimmt, so hat man nur den konstanten Teil auf der linken Seite gleich Null zu setzen, um die zur wirklichen Lösung erforderliche Beziehung zwischen den Konstanten c_1, c_2 zu erhalten.

Es soll aber hier zugleich der Kontrolle wegen gezeigt werden, daß die mit den trigonometrischen Teilen in s behafteten Glieder links sich gegenseitig aufheben.

Setzt man nach 4)

$$r = c_2 \sin u_2 + c_1 \sin u_1, \quad u_2 = \varkappa_2 s + \gamma_2, \quad u_1 = i\varkappa_1 s + \gamma_1,$$

so ist

$$\begin{aligned} r' &= c_2 \varkappa_2 \cos u_2 + i c_1 \varkappa_1 \cos u_1 \\ r'' &= -c_2 \varkappa_2^2 \sin u_2 + c_1 \varkappa_1^2 \sin u_1 \\ r''' &= -c_2 \varkappa_2^3 \cos u_2 + i c_1 \varkappa_1^3 \cos u_1 \\ r'''' &= c_2 \varkappa_2^4 \sin u_2 + c_1 \varkappa_1^4 \sin u_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r^2 &= c_2^2 \sin^2 u_2 + 2 c_1 c_2 \sin u_1 \sin u_2 + c_1^2 \sin^2 u_1 \\ r'^2 &= c_2^2 \varkappa_2^2 \cos^2 u_2 + 2 i c_1 c_2 \varkappa_1 \varkappa_2 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^2 \cos^2 u_1 \\ r''^2 &= c_2^2 \varkappa_2^4 \sin^2 u_2 - 2 c_1 c_2 \varkappa_1^2 \varkappa_2^2 \sin^2 u_1 \sin^2 u_2 + c_1^2 \varkappa_1^4 \cos^2 u_1 \\ r' r''' &= -c_2^2 \varkappa_2^4 \cos^2 u_2 + i c_1 c_2 \varkappa_2 \varkappa_1^3 \cos u_1 \cos u_2 \\ 5) \qquad & - i c_1 c_2 \varkappa_1 \varkappa_2^3 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^4 \cos^2 u_1 \\ r''^2 &= c_2^2 \varkappa_2^6 \cos^2 u_2 - 2 i c_1 c_2 \varkappa_1^3 \varkappa_2^3 \cos u_1 \cos u_2 - c_1^2 \varkappa_1^6 \cos^2 u_1 \\ r r'' &= -c_2^2 \varkappa_2^2 \sin^2 u_2 + c_1^2 \varkappa_1^2 \sin^2 u_1 + c_1 c_2 (\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2) \sin u_1 \sin u_2. \end{aligned}$$

Ordnet man hiernach den Ausdruck A, indem man zunächst den konstanten Teil aufsucht, also für $\cos^2 u_2$ $1 - \sin^2 u_2$,

$\cos^2 u_1 = 1 - \sin^2 u_1$ setzt, so ergibt sich, da von den sinus und cosinus unabhängige Glieder nach 5) nur aus den Werten für r', $r'r'''$, r'''^2 entspringen

$$6) \quad (c_2^2 \varkappa_2^2 - c_1^2 \varkappa_1^2)\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2}\right) + 2h^2\delta(c_1^2\varkappa_1^4 + c_2^2\varkappa_2^4) - h^2\{c_2^2\varkappa_2^6 - c_1^2\varkappa_1^6\}\tau^2\varrho^2.$$

Da nach 2)

$$6a) \quad \varkappa_2^2 - \varkappa_1^2 = \frac{\delta}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}, \quad \varkappa_1^2\varkappa_2^2 = \frac{1}{\tau^2 h^2}$$

$$\varkappa_2^4 = \varkappa_2^2\left(\frac{\delta}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau^2 h^2}, \quad \varkappa_1^4 = -\varkappa_1^2\left(\frac{\delta}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{1}{\tau^2 h^2},$$

so geht 6) in den gleich Null zu setzenden Ausdruck 7)

$$7) \quad c_2^2\varkappa_2^2\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} + \varkappa_2^2(\tau^2\varrho^2 + h^2\delta) - \varrho^2\right) - c_1^2\varkappa_1^2\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} - \varkappa_1^2(\tau^2\varrho^2 + h^2\delta) - \varrho^2\right)$$

über. Ich werde jetzt zeigen, daß das Produkt der beiden Faktoren von $(c_2^2\varkappa_2^2$ und $-c_1^2\varkappa_1^2$ in 7) nämlich

$$\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} - \varrho^2\right)^2 + (\tau^2\varrho^2 + h^2\delta)\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} - \varrho^2\right)(\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2) - \varkappa_1^2\varkappa_2^2(\tau^2\varrho^2 + h^2\delta)^2$$

einen negativen Wert hat. Setzt man nämlich hier die Werte für $\varkappa_1^2\varkappa_2^2$ und $\varkappa_2^2 - \varkappa_1^2$ aus 6a) ein, so erhält man

$$\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} - \varrho^2\right)^2 + (\tau^2\varrho^2 + h^2\delta)\left(\tau^2 - \frac{h^2\delta^2}{\tau^2\varrho^2} - \varrho^2\right)\left(\frac{\delta}{\varrho^2\tau^2} - \frac{1}{h^2}\right) - \frac{1}{\tau^2 h^2}(\tau^2\varrho^2 + h^2\delta)^2$$

und dies reduziert sich durch die Ausrechnung auf

$$-\left[\tau^4\left(\frac{h}{\varrho} - \frac{\varrho}{h}\right)^2 + 2\tau^2(h^2 + \varrho^2) + h^2\varrho^2\right] = -\lambda^2.$$

Die Bedingung für das Verschwinden von 7) ist daher, wenn man die beiden Faktoren von $c_2^2\varkappa_1^2$ und $-c_1^2\varkappa_1^2$ mit P

und Q bezeichnet, die nach dem eben bewiesenen auch nicht Null sein können

$$PQ = -\lambda^2$$

und überdies P eine reelle Zahl ist

$$c_2^2 \varkappa_2^2 P^2 + c_1^2 \varkappa_1^2 \lambda^2 = 0.$$

Demnach ist

$$c_1 \varkappa_1 = i c_2 \varkappa_2 M \text{ für } M = P : \lambda$$

und es wird

$$r = c_2 \sin(\varkappa_2 s + \gamma_2) + i c_2 \varkappa_2 M \sin i(\varkappa_1 s + \gamma_1).$$

Dieser Ausdruck wird aber, wenn man γ_1 rein imaginär $= i\gamma$ wählt, in den reellen Wert

$$r = c_2 \left\{ (\sin \varkappa_2 s + \gamma_2) + \varkappa_2 \frac{M}{2} (e^{\varkappa_1 s + \gamma} - e^{-\varkappa_1 s + \gamma}) \right\}$$

übergehen. Die Traktorien selbst sind transzendent, da r aus trigonometrischen und Exponentialfunktionen zusammengesetzt ist.

Es ist endlich noch zu verifizieren, daß die übrigen mit den trigonometrischen Funktionen behafteten Teile in A) sich aufheben. Da entstehen zunächst Glieder mit $\sin^2 u_1 = z^2$. Nun enthält

r'^2	den	Faktor	$\varkappa_2^2 c_2^2 (1 - z^2)$
$r r''$	„	„	$-\varkappa_2^2 c_2^2 z^2$
r''^2	„	„	$\varkappa_2^4 c_2^2 z^2$
$r' r'''$	„	„	$-\varkappa_2^4 c_2^2 (1 - z^2)$
r'''^2	„	„	$\varkappa_2^6 c_2^2 (1 - z^2)$.

Darnach folgt aus A) für den Faktor von z^2 der Ausdruck

$$\varkappa_2^2 \left(\frac{\delta}{\tau^2} - \left(\tau^2 - \frac{h^2 \delta^2}{\varrho^2 \tau^2} \right) \right) - 2 \varkappa_2^2 \varrho^2 + \tau^2 \varrho^2 \varkappa_2^4 - 2 h^2 \delta \varkappa_2^4 + h^2 \tau^2 \varrho^2 \varkappa_2^6,$$

der in der Tat gleich Null ist. Setzt man nämlich

$$\varkappa_2^6 = \varkappa_2^4 \left(\frac{\delta}{\varrho^2 \tau^2} - \frac{1}{h^2} \right) + \frac{\varkappa_2^2}{\tau^2 h^2},$$

so erhält man für denselben

$$1+\frac{\varrho^2}{\tau^2}-\varkappa_2^2\tau^2+\varkappa_2^2\frac{h^2\delta^2}{\varrho^2\tau^2}-h^2\left(\frac{\delta^2\varkappa_2^2}{\varrho^2\tau^2}-h^2\right)-\frac{\varrho^2+\tau^2}{\tau^2}-\varkappa_2^2\varrho^2,$$

in dem sich das erste und fünfte, sowie auch alle übrigen Glieder aufheben.

Daß auch die Faktoren von $\sin u_1 \sin u_2$ und $\cos u_1 \cos u_2$ in A) fortfallen, läßt sich ebenfalls leicht erkennen. So entspringt z. B. das Glied mit $\cos u_1 \cos u_2 = w$

r'^2	mit dem Faktor		$2ic_1c_2\varkappa_1\varkappa_2$
$r'r'''$	„	„	$ic_1c_2\varkappa_1\varkappa_2(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)$
r'''^2	„	„	$-2ic_1c_2\varkappa_1^3\varkappa_2^3$

und aus A) folgt dann als mit w multipliziertes Glied

$$2ic_1c_2\left\{\varkappa_1\varkappa_2\left(\tau^2-\frac{h^2\delta^2}{\varrho^2\tau^2}\right)-h^2\delta(\varkappa_1^2-\varkappa_2^2)\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_1^3\varkappa_2^3\tau^2\varrho^2h^2\right\},$$

welches ebenfalls gleich Null ist.

Hierdurch ist die Aufgabe vollständig gelöst, da auch

$$z=r_1'''\tau\varrho+r_1'\frac{\delta}{\tau\varrho}$$

wird, und also p, q, r durch Verhältnisse von Ausdrücken mit trigonometrischen und Exponentialfunktionen von s, welche noch zwei Konstanten γ enthalten, gegeben sind.

§ X.

Das allgemeine Problem der Traktorien.

Aus den drei Gleichungen 5) des § I

$$1+p'-\frac{q}{\varrho}=p\Omega$$

1)
$$q'+\frac{p}{\varrho}+\frac{r}{\tau}=q\Omega$$

$$r'-\frac{q}{\tau}=r\Omega$$

und

2)
$$p^2+q^2+r^2=f^2,$$

wo f eine gegebene Funktion von s ist, kann man durch Elimination von Ω drei Gleichungen für p, q, r erhalten. Setzt man dann in der aus

3) $$p + ff' = f^2\Omega$$

folgenden Gleichung den Wert von Ω der Reihe nach in die Gleichungen 1) ein, so erhält man, wenn zur Abkürzung

$$\frac{p}{f} = \sigma_1, \quad \frac{q}{f} = \sigma_2, \quad \frac{r}{f} = \sigma_3$$

gesetzt wird, wodurch die Richtungscosinus der Erzeugenden PQ von Γ gegen die Axen des Triëders von C eingeführt werden, aus der ersten

I) $$\frac{1-\sigma_1^2}{f} + \sigma_1' - \frac{\sigma_2}{\varrho} = 0$$

und ebenso aus den beiden anderen

II) $$\sigma_2' + \frac{\sigma_1}{\varrho} + \frac{\sigma_3}{\tau} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{f} = 0,$$

III) $$\sigma_3' - \frac{\sigma_2}{\tau} - \frac{\sigma_1\sigma_3}{f} = 0.$$

Die Gleichungen I), II), III) besitzen das partikuläre Integral

4) $$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1.$$

Durch Multiplikation derselben mit σ_1, σ_2, σ_3 und Addition erhält man in der Tat

$$\sigma_1\sigma_1' + \sigma_2\sigma_2' + \sigma_3\sigma_3' + \frac{\sigma_1}{f}\{1-(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)\} = 0$$

oder

$$\frac{d(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-1} = \frac{\sigma_1}{f},$$

deren Integral

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 1 = ce^{\int \frac{\sigma_1}{f} ds}$$

zeigt, daß 4) gilt, so wie die Konstante c gleich Null gewählt

wird, so daß eine der Gleichungen unter dieser Voraussetzung überflüssig, und alsdann auch 2) erfüllt ist.

Ich setze jetzt, um 4) identisch zu erfüllen,

$$5) \qquad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{x+y}{x-y} \\ \sigma_2 &= \frac{1-xy}{x-y} \\ \sigma_3 &= i\left(\frac{1+xy}{x-y}\right). \end{aligned}$$

Trägt man die Werte

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \frac{2(y'x - yx')}{(x-y)^2} \\ \sigma_2' &= \frac{x'(y^2-1) + y'(1-x^2)}{(x-y)^2} \\ \sigma_3' &= \frac{i(y'(x^2+1) - x'(y^2+1)}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

in die Gleichungen I), III) ein, so erhält man

$$\text{Ia)} \qquad y'x - yx' - \frac{2xy}{f} - \frac{(1-xy)(x-y)}{2\varrho} = 0,$$

$$\text{IIIa)} \qquad \begin{aligned} &(x^2+1)y' - (y^2+1)x' - (1+xy)\frac{(x+y)}{f} \\ &\quad + i(1-xy)\frac{(x-y)}{\tau} = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man aus Ia), IIIa) die Werte der y', x', so erhält man endlich die beiden Riccatischen Gleichungen, von denen die eine durch die Substitution $y = -\frac{1}{x}$ in die andere übergeht

$$\text{IV)} \qquad \begin{cases} y' - \frac{1}{f}y - \frac{1}{2\varrho}(y^2+1) - \frac{i(y)}{\tau} = 0 \\ x' - \frac{1}{f}y + \frac{1}{2\varrho}(x^2+1) + \frac{i(x)}{\tau} = 0. \end{cases}$$

Zugleich sind durch Auflösung derselben, als deren besonderer Vorzug angesehen werden kann, daß sie nur von

den Größen ϱ, τ, f in der einfachsten Weise abhängig sind, σ_1, σ_3 und endlich auch σ_2 gegeben. Ferner ergibt sich der bemerkenswerte Satz, daß für den Fall der allgemeinen Schraubenlinie, wenn zugleich

$$f = a\varrho + b\tau$$

mit a, b als Konstanten angenommen wird, das Problem der Traktorien durch Quadratur vollständig gelöst wird[1]).

Aus den Gleichungen II), III) erhält man noch durch Elimination von f

$$\sigma_2' \sigma_3 - \sigma_3' \sigma_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\varrho} + \frac{\sigma_3^2 + \sigma_2^2}{\tau} = 0$$

oder

V) $$\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) + \frac{1}{\tau} + \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\varrho(\sigma_3^2 + \sigma_2^2)} = 0,$$

also eine von der Funkton f gänzlich unabhängige Gleichung zwischen den drei Richtungscosinus σ_1, σ_2, σ_3, die in den folgenden Paragraphen immer durch $\cos i$, $\cos j$, $\cos k$ bezeichnet werden sollen.

Ist z. B. $\frac{\cos j}{\cos k}$ gleich einer Konstanten k, so folgt aus V)

$$\frac{\cos i}{\cos \varkappa} = -\frac{\varrho}{\tau}(1 + k^2),$$

was wieder für die Schraubenlinien einen allerdings sehr einfachen Satz enthält. Ist umgekehrt

$$\frac{\cos i}{\cos \varkappa} = \gamma \cdot \tau \text{ konst},$$

so folgt aus V)

$$\frac{1}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)\right) + \frac{\gamma}{\varrho} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right)^2} = 0,$$

was wieder für

[1]) Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, diese Lösung mit der des § IX zu vergleichen.

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{\cos j}{\cos \varkappa} = \operatorname{tg} \theta$$

auf die Riccatische Gleichung

$$\frac{d\theta}{ds} + \frac{x}{\varrho} \cos^2 \theta + \frac{1}{\tau} = 0$$

führt.

So einfach und übersichtlich nun auch die durch die Gleichungen IV) gegebene Lösung erscheint, so sind dieselben für wirkliche Konstruktionen doch nicht sofort verwendbar, weil die σ_1, σ_2, σ_3 erst aus den x, y nach 5) zu entnehmen sind, und der Durchgang durchs Imaginäre ebenfalls besonders zu untersuchen ist. Es wird daher nicht überflüssig sein, wenn im folgenden einige einfache Aufgaben wieder mittels der Unbekannten q_1 behandelt werden.

§ XI.

Die Traktorien der ebenen Kurven C.

Aus den Gleichungen 5a) des § I hat man für eine ebene Kurve C

1) $$z + p_1' - \frac{q_1}{\varrho} = 0, \quad q' + \frac{p'}{\varrho} = 0, \quad r_1' = 0$$

und $$pz = p_1, \quad qz = q_1, \quad r_1 = \text{konst} = c.$$

Hieraus folgt für

2) $$p^2 + q^2 + r^2 = f^2 \text{ oder } p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = f^2 z^2$$

die Gleichung für q_1

I) $$(\varrho q_1')^2 + c^2 + q_1^2 = \frac{f^2}{\varrho^2} [q_1 + \varrho (\varrho q_1')']^2$$

nebst $$p_1 = -\varrho q_1', \quad z = \frac{q_1}{\varrho} + (\varrho q_1')'.$$

Durch Multiplikation von I) mit q_1' entsteht die Gleichung

II) $$\varrho q_1' = f \frac{d}{ds} \sqrt{q_1^2 + c^2 + (\varrho q_1')^2}$$

und diese ist unter der Voraussetzung $q_1' \neq 0$ mit I) völlig äquivalent. Gleichung II) wird durch Quadratur integriert, wenn $f = \varrho\varphi(q)$ ist, insbesondere also bei konstantem ϱ (Fall des Kreises) und für $f = h$, oder für $f = \varrho/k$.

In letzterem Falle $f = \varrho/k$ folgt aus II)

$$3) \qquad \frac{dq_1}{\sqrt{q_1^2(k^2-1) + 2kc_1q_1 + c_1^2 - c^2}} = \frac{ds}{\varrho}$$

mit den willkürlichen Konstanten c_1 und $c = r_1$. Ist zunächst $k^2 = 1$, so hat man für

$$\sigma = \left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right),$$

wo c_2 eine neue Konstante

$$q_1 = \frac{c_1^2\sigma^2 + c^2 - c_1^2}{2kc_1}$$

$$p_1 = -c_1\sigma$$

$$z = \frac{c_1^2\sigma^2 + c^2 + c_1^2}{2kc_1\varrho},$$

also:

$$A) \qquad \begin{cases} p = -\dfrac{2\varrho c_1^2 k\sigma}{N} \\ q = \dfrac{(c_1^2\sigma^2 + c^2 - c_1^2)\varrho}{N} \\ r = \dfrac{2cc_1k\varrho}{N}; \quad N = c_1^2\sigma^2 + c^2 + c_1^2. \end{cases}$$

Für $c = 0$, d. h. für die Kurven Γ in der Ebene der gegebenen c folgt aus I) die singuläre Lösung

$$q_1 = -\frac{c_1}{2k}, \quad z = -\frac{c_1}{2k\varrho},$$

also: $$q = \varrho, \quad p = 0, \quad r = 0,$$

d. h. die Kurve Γ ist dann die Evolute von C. Ist zweitens $k^2 < 1$, so hat man für

B)
$$\begin{cases} \sigma = \sqrt{1-k^2}\left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right) \\ p = -\varrho\,\frac{\sqrt{1-k^2}\,\sqrt{M}\cos\sigma}{N} \\ q = \varrho\,\frac{(k c_1 + \sin\sigma\sqrt{M})}{N} \\ r = c\varrho\,\frac{1-k^2}{N}, \end{cases}$$

wobei
$$N = k(c_1 + k\sin\sigma\sqrt{M})$$
$$M = c_1^2 - c^2(1-k^2)^1)$$

gesetzt ist. Für $c_1^2 = c^2$ wird dagegen

$$M = c_1^2 k^2, \quad N = c_1 k(c_1 + k^2\sin\sigma),$$

also:
$$p = -\frac{\varrho(\sqrt{1-k^2})\cos\sigma}{1 \pm k^2\sin\sigma}$$
$$q = \pm\frac{\varrho(1 \pm \sin\sigma)}{1 + k^2\sin\sigma}$$
$$r = \pm\frac{\varrho(1-k^2)}{\varkappa(1 \pm k^2\sin\sigma)}; \quad \frac{q}{p} = -\frac{\cos\sigma\sqrt{1-k^2}}{(1 \pm \sin\sigma)}.$$

Endlich hat man noch aus I) in diesem Falle die singuläre Lösung

$$c^2 = q_1^2\frac{1-k^2}{k^2},$$

also:
$$p_1 = 0, \quad z = \frac{1}{\varrho}\frac{ck}{\sqrt{1-k^2}}$$

oder
$$p = 0$$
$$q = \varrho$$
$$r = \varrho\frac{\sqrt{1-k^2}}{k};$$

es entsteht also eine Filarevolute von C dadurch, daß für

---

[1]) M darf nicht gleich Null gesetzt werden, wenn reelle Kurven Γ entstehen sollen.

$k = \cos\alpha$ die Erzeugende PQ von Γ in der Normalebene von C den Winkel α bildet. Ist drittens $k^2 > 1$, so erhält man für

$$\sigma = \sqrt{k^2 - 1}\left(\int \frac{ds}{\varrho} + c_2\right)$$

für q_1 den Wert

$$q_1 = (e^{\sigma} + e^{-\sigma})\frac{\sqrt{c^2(k^2 - 1 + c_1^2} - 2kc_1}{2(k^2 - 1)}$$

und hieraus die zugehörigen Werte von p, q, r. In dem besonderen Falle $c = c_1 = 0$ aber ergibt sich

$$q_1 = e^{\sigma} c_0$$
$$p_1 = -q_1\sqrt{k^2 - 1}$$
$$z = \frac{q_1 k^2}{\varrho},$$

also:

$$q = \varrho/k^2$$
$$p = -\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k^2}\varrho.$$

Die Traktorien einer ebenen Kurve C in der Ebene von C, bei denen $h = \varrho/k$ ist, werden in diesem Falle dadurch erhalten, daß man für $k = 1/\sin\alpha$, $q/p = \pm\sin\alpha$ setzt, d. h. die Erzeugenden PQ unter dem Winkel α gegen die Normale von C zieht, was man auch durch eine einfache geometrische Betrachtung[1]) sofort bestätigt, man könnte diese Traktorien als „schiefe Evoluten" von C bezeichnen.

§ XII.

D-Flächen durch eine ebene Kurve C, deren Kurve Γ eine Schraubenlinie ist (D-Schraubenfläche).

Die allgemeine Aufgabe, durch eine gegebene Kurve C D-Flächen zu legen, deren Kurve Γ einen vorgeschriebenen Charakter besitzt, führt nicht zu einfachen Integrationsproblemen. Hier soll nur der Fall vollständiger be-

[1]) Vgl. die Figur 2 in § IV für den Fall $d\alpha = 0$.

trachtet werden, wo für einen Kreis C die Kurven Γ Schraubenlinien werden.

Da nach V), VI) des § III

$$\frac{P}{T} = \sigma\varrho\left(\frac{q_1'^2 + \dfrac{q_1^2+1}{\varrho^2}}{q_1^2+1}\right)^{3/2} = p\,^{1)},$$

wo p eine gegebene Konstante, und nach II) des § III

$$\sigma = \frac{\varrho^2}{(\varrho(\varrho q_1)' + q_1)},$$

so ergibt sich für q_1 die Differentialgleichung

$$(\varrho(\varrho q_1)' + q_1)\,p = \left(\frac{(q_1'\varrho)^2 + q_1^2 + 1}{q_1^2+1}\right)^{3/2},$$

welche durch Multiplikation mit dem integrierenden Faktor q_1' die Form[2])

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{(q_1'\varrho)^2 + q_1^2 + 1)}{((q/\varrho)^2 + q_1^2 + 1)^{3/2}} = \frac{1}{p}\frac{q_1'}{(q_1^2+1)^{3/2}}$$

annimmt, und durch Integration mit der Konstanten c/p die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\text{I)} \qquad \frac{dq_1\,(q_1 + c\sqrt{1+q_1^2})}{\sqrt{1+q_1^2}\sqrt{p^2 - (q_1 + c\sqrt{1+q_1^2})^2}} = \frac{ds}{\varrho}$$

liefert, deren Lösung je nach dem Werte von c sehr verschieden ausfällt.

Setzt man zunächst $c = 0$, so erhält man für $q_1^2 = z$ aus I)

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z)(p^2 - z)}} = \frac{2\,ds}{\varrho},$$

also:

$$\text{II)} \qquad z = q_1^2 = \frac{p^2-1}{2} + \frac{p^2+1}{2}\sin(2w + c_1); \quad w = \int\frac{ds}{\varrho}.$$

---

[1]) Im folgenden ist zunächst ϱ als beliebige Funktion von s angenommen,

[2]) Die singuläre Lösung $q_1 p = 1$ liefert als Kurve Γ hier nur den Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = \pm\varrho p$, wenn der Kreis die Gleichung

$$x = \varrho\cos s/\varrho$$
$$y = \varrho\sin s/\varrho \text{ hat.}$$

Aber auch bei beliebigem c ergibt sich noch ein elementares Integral. Setzt man nämlich

$$1 + q_1^2 = (z + q_1)^2, \quad q_1 = {}^1/_2\left(\frac{1}{z} - z\right),$$

so entsteht für $z^2 = \zeta$

$$\text{III)} \qquad -\frac{d\zeta}{\zeta}\,\frac{(\zeta(c-1)+(c+1))}{\sqrt{4p^2\zeta - (\zeta(c-1)+c+1)^2}} = \frac{2\,ds}{\varrho}.$$

Hieraus folgt für $C = 1$ die Gleichung

$$\frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{p^2\zeta - 1}} = -2\frac{ds}{\varrho}$$

oder für $\qquad \zeta p^2 = 1 + \eta^2$

$$\operatorname{arctg}\eta = w + c_1; \quad w = \int\frac{ds}{\varrho},$$

also: $\qquad \zeta = \dfrac{1}{p^2\cos^2(w + c_1)}$, oder

$$\text{1)} \qquad q_1 = {}^1/_2\left[p\cos(w + c_1) - \frac{1}{p\cos(w + c_1)}\right].$$

Vertauscht man in I) C mit $-c$, und gleichzeitig q_1 mit $-q_1$, so bleibt I) ungeändert. Es genügt daher, den Fall eines positiven C zu betrachten. Für $C = +1$ insbesondere hat man

$$\text{a)} \qquad q_1 = {}^1/_2\left(p\cos(w + c_1) - \frac{1}{p\cos(w + c_1)}\right)$$

$$\text{b)} \qquad \varrho q_1' = -{}^1/_2\sin(w + c_1)\left[p + \frac{1}{p\cos^2(w + c_1)}\right]$$

2)

$$\text{c)} \qquad q_1'^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2} = \frac{1}{4\varrho^2}\left[p + \frac{1}{p\cos^2(w + c_1)}\right]^2$$

$$\text{d)} \qquad q_1^2 + 1 = {}^1/_4\left[p\cos(w + c_1) + \frac{1}{p\cos(w + c_1)}\right]^2.$$

Die Differentiation von 2 b) liefert

$$\varrho(\varrho q_1')' = -{}^1/_2\cos(w + c_1)\left(p + \frac{1}{p\cos^2 w + c_1}\right) + \frac{\sin^2(w + c_1)}{p\cos^3(w + c_1)}$$

also nach 2a)

$$\varrho(\varrho q_i) + q = -\frac{1}{p\cos^3(w+c_1)}$$

und daraus erhält man für σ die von ϱ' unabhängige Gleichung

3) $$\sigma = -\varrho^2 p\cos^3(w+c_1).$$

Es seien jetzt die Koordinaten x, y eines Punktes der ebenen Kurve C

$$x = -\int ds \sin\int\frac{ds}{\varrho}\,^{1})$$

$$y = +\int ds\cos\int\frac{ds}{\varrho},$$

also

4)
$$\begin{array}{lll} \alpha = -\sin w & \xi = -\cos w & \lambda = 0 \\ \beta = +\cos w & \eta = -\sin w & \mu = 0 \\ \gamma = 0 & \zeta = 0 & \nu = +1. \end{array}$$

Dann sind die Koordinaten X, Y, Z von Γ

5)
$$X = x + \sigma\left(\Pi\alpha + \frac{q_1\xi}{\varrho}\right)$$

$$Y = y + \sigma\left(\Pi\beta + \frac{q_1\eta}{\varrho}\right)$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Da $\Pi = -q_i$, so folgt unter Berücksichtigung von 2a), 3), 4) aus 5)

6) $$h^2 = (PQ)^2 = \frac{\sigma^2}{4\varrho^2}\left(p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right)^2 \text{ oder}$$

$$h = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(p + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\right)$$

---

[1]) Das Zeichen — ist mit Rücksicht auf die Frenetschen Formeln gewählt.

$$X - x = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(-p\cos c_1 + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\cos(2w+c_1)\right)$$

8) $$Y - y = \frac{\sigma}{2\varrho}\left(+p\sin c_1 + \frac{1}{p\cos^2(w+c_1)}\sin(2w+c_1)\right)$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Setzt man

$$\cos(2w_1 + c_1) = \cos 2(w + c_1)\cos c_1 + \sin 2(w + c_1)\sin c_1$$
$$\sin(2w_1 + c_1) = \sin 2(w + c_1)\cos c_1 - \cos 2(w + c_1)\sin c_1,$$

so folgt aus 8)

9)
$$X - x = -h\cos c_1 + \frac{\sigma\cos c_1}{\varrho p} + \frac{\sigma}{\varrho p}\sin c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$
$$Y - y = +h\sin c_1 - \frac{\sigma}{\varrho p}\sin c_1 + \frac{\sigma}{\varrho p}\cos c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

oder wenn durch h dividiert wird, nach der dritten Gleichung 8)

$$\frac{X-x}{h} = -\cos c_1 - \frac{Z\cos c_1}{hp} - \frac{Z}{ph}\sin c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

10) $$Y - y = +\sin c_1 + \frac{Z\sin c_1}{hp} - \frac{Z}{ph}\cos c_1\frac{\sin(w+c_1)}{\cos(w+c_1)}$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho}.$$

Damit sind die Koordinaten X, Y, Z als Funktionen von s dargestellt, also die Aufgabe, durch eine beliebige ebene Kurve C für den Fall $C = +1$ eine Schrauben-D-Fläche zu legen, vollständig gelöst.

Zugleich erhält man aus 10)

$$\frac{X-x}{h}\cos c_1 - \frac{Y-y}{h}\sin c_1 + \frac{Z}{h\varrho} = -1,$$

mithin für die Richtungscosinus $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ der Erzeugenden PQ von Γ

$$\cos A\cos c_1 - \cos B_1\sin c_1 + \frac{\cos C}{p} = -A$$

oder, wenn $\lambda \cos c_1 = \cos\alpha$, $-\lambda \sin c_1 = \cos\beta$, $\frac{\lambda}{p} = \cos\gamma$, $\lambda^2 = \frac{p^2}{1+p^2}$ gesetzt wird,

$$\cos A c a \mp \cos B c \beta + \cos C c \gamma = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus hervorgeht, daß die Richtung von PQ mit der von der Konstanten c_1 abhängenden Richtung einen konstanten Winkel macht. Aus 10) erhält man

$$(X-x+\varrho\cos w) = \frac{pZ}{2}\cos c_1 + \varrho\cos c_1\cos(w+c_1)[\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)] + \varrho\sin c_1\sin^3(w+c_1)$$

$$(Y-y+\varrho\sin w) = -\frac{pZ}{2}\sin c_1 - \varrho\sin c_1\cos(w+c_1[\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)] + \varrho\cos c_1\sin^3(w+c_1)$$

oder

$$Z = p\varrho\cos^3(w+c_1)$$

$$(X-x+\varrho\cos w)\sin c_1 + (Y-y+\varrho\sin w)\cos c_1 = \varrho\sin^3(w+c_1)$$

$$(X-x)+\varrho\cos w)\cos c_1 - (Y-y)+\varrho\sin w)\sin c_1 = \frac{pZ}{2} + \varrho\cos(w+c_1)\,(\tfrac{1}{2}+\sin^2(w+c_1)$$

$$Z = +p\varrho\cos^3(w+c_1).$$

Nur für den Kreis, wo $x = \varrho\cos w$, $y = \varrho\sin w$ vereinfachen sich diese Gleichungen und liefern:

$$(X\sin c_1 + Y\cos c_1)^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{2/3} = \varrho^{2/3} \tag{11}$$

$$(X\sin c_1 - Y\sin c_1 = \frac{pZ}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}\varrho^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}(X\sin c_1 + Y\cos c_1)^{2/3}$$

insbesondere für eine Drehung des Koordinatensystems der X, Y um den Winkel $-c_1$

$$Y'^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{2/3} = \varrho^{2/3}$$

$$X' = \frac{pZ}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}\varrho^{2/3} + \left(\frac{Z}{p}\right)^{1/3}Y'^{2/3},$$

von denen die erste eine Ellipsen-Evolute resp. Astroide, die zweite eine algebraische Fläche liefert, so daß die Kurven Γ hier algebraisch sind.

Zu teilweise übersichtlicheren Resultaten führt der Fall $c = 0$. Aus der Gleichung II) folgt

$$q' = \frac{p^2+1}{2\varrho q_1}\cos(2w + c_1)$$

12)
$$q_1'' + \frac{q}{\varrho^2} + \frac{q'\varrho'}{\varrho} = -\frac{p^2}{q^3\varrho^2}$$

oder $$\sigma = -\frac{q^3\varrho^2}{p^2}$$

13)
$$q_1'^2 + \frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = \frac{(p^2+1)p^2}{2\varrho^2 q_1^2}(1+\sin(2w+c_1))$$
$$\frac{q_1^2+1}{\varrho^2} = \frac{p^2+1}{2\varrho^2}(1+\sin(2w+c_1)).$$

Es ist ferner nach § III, I)

$$X - x = \frac{\sigma}{2\varrho q_1}\{(p^2+1)(\sin w\cos(2w+c_1) + \cos w\sin(2w+c_1)$$
14)
$$-(p^2-1)\cos w\}$$
$$Y - y = \frac{\sigma}{2\varrho q_1}\{-(p^2+1)(\cos w\cos(2w+c_1) + \sin w\sin(2w+c_1)$$
$$-(p^2-1)\sin w\}$$ oder

$$X - x = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1}((p^2+1)\sin(w+c_1) + (p^2-1)\cos w)$$
14 a)
$$Y - y = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1}((p^2+1)\cos(w+c_1) + (p^2-1)\sin w)$$

und aus der nach der zweiten Gleichung 13) folgenden die Entfernung $h = PQ$ bestimmenden

15)
$$h = \frac{\sigma p\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}\cdot\varrho q_1}(\sin(w+\gamma) + \cos(w+\gamma)$$

folgt, wenn man in 14 a) statt $w + c_1$ $w + \gamma$ einführt:

$$\cos A = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1 h}\begin{cases}+(p^2+1)[\sin(w+\gamma)\cos\gamma + \cos(w+\gamma)\sin\gamma]\\+(p^2-1)[\cos(w+\gamma)\cos\gamma + \sin(w+\gamma)\sin\gamma]\end{cases}$$

$$\cos B = -\frac{\sigma}{2\varrho q_1 h}\begin{cases}+(p^2+1)[\cos(w+\gamma)\cos\gamma - \sin(w+\gamma)\sin\gamma]\\+(p^2-1)[\sin(w+\gamma)\cos\gamma - \cos(w+\gamma)\sin\gamma]\end{cases}$$

oder für
$$\begin{aligned}(p^2+1)\cos\gamma+(p^2-1)\sin\gamma &= a\\ (p^2+1)\sin\gamma+(p^2-1)\cos\gamma &= b\\ (p^2+1)\sin\gamma-(p^2-1)\cos\gamma &= a'\\ (p^2+1)\cos\gamma-(p^2-1)\sin\gamma &= b'\end{aligned}$$

$$\cos A = -\frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(a\sin(w+\gamma)+b\cos(w+\gamma))$$

$$\cos B = -\frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(a'\sin(w+\gamma)-b'\cos(w+\gamma))$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sigma}{2\varrho h q_1}(\sin(w+\gamma)+\cos(w+\gamma)),$$

mithin durch Nullsetzen der Determinante dieser 3 Gleichungen

16) $$\cos A(a'+b')+\cos B(a-b)+\frac{1}{\sqrt{2}p\sqrt{p^2+1}}(ab'+ba')=0.$$

Wegen
$$\begin{aligned}a-b &= 2(\cos\gamma-\sin\gamma)\\ a'+b' &= 2(\cos\gamma+\sin\gamma)\\ ab'+ba' &= 4p^2\end{aligned}$$

hat man nach 16)

$$\cos A(\cos\gamma+\sin\gamma)+B(\cos\gamma-\sin\gamma)+\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{p^2+1}}=0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}\lambda(\cos\gamma+\sin\gamma) &= \cos\varphi,\\ \lambda(\cos\gamma-\sin\gamma) &= \sin\varphi,\end{aligned}\qquad 2\lambda^2=1,$$

so wird
$$\cos A\cos\varphi+\sin B\sin\varphi = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}},$$

aus der wieder die Axenrichtung der Schraubenlinie zu ersehen ist.

Endlich kann man auch die Gleichung der Schraubenlinie Γ selbst bestimmen. Ich beschränke mich dabei auf den Fall des Kreises C, wo es ausreicht, $\gamma = 0$ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung folgt aus 14), wenn man zugleich für σ seinen Wert aus 13) einsetzt

$$X = \varrho \cos w + \frac{\varrho\, q_1^2}{2\,p^2}((p^2-1)\cos w + (p^2+1)\sin w)$$

$$Y = \varrho \sin w + \frac{\varrho\, q_1^2}{2\,p^2}((p^2+1)\cos w + (p^2-1)\cos w)$$

oder $$(X+Y) = \varrho\,(1+q_1^2)\,(\cos w + \sin w)$$

$$(X-Y) = \varrho\left(1-\frac{q^2}{p^2}\right)(\cos w - \sin w).$$

Dreht man das Koordinatensystem der X, Y um 45^0 und bezeichnet die neuen Koordinaten durch X_1, Y_1, so ist

$$X+Y = x_1\nu_2, \quad X-Y = -y_1\nu_2,$$

also:

$$X'\nu_2 = \varrho\,(1+q_1^2)\,(\cos w + \sin w) = \varrho\left(\frac{1+p^2}{2}\right)(\cos w + \sin w)^3$$

$$-Y'\nu_2 = \varrho\left(1-\frac{q_1^2}{p^2}\right)(\cos w - \sin w) = \varrho\left(\frac{1+p^2}{2}\right)(\cos w - \sin w)^3$$

$$Z = -\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{q_1^3\varrho}{p^2}.$$

Hieraus folgt

$$\left(\frac{X_1}{\varrho\,(p^2+1)}\right)^{2/3} + \left(\frac{Y_1}{\varrho\,(p^2+1)}\right)^{2/3} = 1$$

$$\left(\frac{Z}{\varrho}\right)^{2/3} p^{4/3} + (p^2+1)^{1/3}\left(\frac{X'}{\varrho}\right)^{2/3} = p^2,$$

womit die Kurve Γ völlig bestimmt ist.

Zur Auswertung des Integrals in Gleichung III) kann man folgenden Weg einschlagen. Setzt man $c-1=a$, $c+1=b$ und zerlegt die linke Seite in

$$-\int \frac{d\zeta\, a}{\sqrt{4p^2\zeta - (\zeta a + b)^2}} + \int \frac{d\zeta_1\, b}{\sqrt{4p^2\zeta_1 - (a+b\,\zeta_1)^2}},$$

wobei $\zeta_1 = 1/\zeta$ gesetzt ist, so erhält man für das erste resp. zweite Integral

$$-\arcsin\frac{a^2\zeta - (2p^2 - ab)}{2p\sqrt{p^2-ab}}, \quad \arcsin\frac{b^2\zeta_1 - (2p^2-ab)}{2p\sqrt{p^2-ab}}.$$

Setzt man

$$u = \frac{a^2\zeta - (2p^2 - ab)}{2p\sqrt{p^2 - ab}}, \quad v = \frac{b^2 - (2p^2 - a)}{2p\zeta\sqrt{p^2 - ab}},$$

so wird

$$\sqrt{1-u^2} = a\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2p\sqrt{p^2 - ab}}, \quad \sqrt{1-v^2} = b\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2p\zeta\sqrt{p^2 - ab}}$$

also die Differenz der beiden arc sin die Gleichung

$$(b - a\zeta)\frac{\sqrt{4p^2\zeta - (a\zeta + b)^2}}{2\zeta(p^2 - ab)} = \sin(2w + c)$$

liefern, in der noch

$$\zeta = z^2, \quad q_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\zeta}{\sqrt{\zeta}}\right)$$

zu setzen ist. Aber dieses Integral gibt für q_1 keine so einfache Lösung, wie in den vorigen beiden speziellen Eällen.

§ XIII.

Die Huygenssche Traktorie $f(s) = h$ für den Kreis.

Setzt man $w = \int \frac{ds}{\varrho}$, so ist die Tangente der ebenen Kurve C, deren Krümmungshalbmesser ϱ ist,

$$(X - x)\cos w + (Y - y)\sin w = 0$$

also die Gleichung der Ebene, deren D-Fläche die Traktorie bildet,

1) $$(X - x)\cos w + (Y - y)\sin w + q_1 Z = 0.$$

Daraus folgt

2) $$-(X - x)\sin w + (Y - y)\cos w + q_1' Z\varrho = 0$$

3) $$-(X - x)\cos w - (Y - y)\sin w + q_1'' Z\varrho^2 + q_1' Z\varrho' - \varrho = 0.$$

Die Summe der Quadrate von 1) und 2) liefert

4) $$(X-x)^2 + (Y-y)^2 + Z^2 = Z^2[(\varrho q_1')^2 + q_1^2 + 1] = f(s)^2,$$

während aus 1), 3) folgt

$$Z(q_1''\varrho^2 + \varrho' q_1' + q) = \varrho \qquad \text{oder}$$

5) $$Z\left[\varrho \cdot \frac{d(q_1' \varrho)}{ds} + q_1\right] = \varrho$$

und aus 4), 5) die Differentialgleichung

6) $$f^2\left[\varrho \frac{d(\varrho q_1')}{ds} + q_1\right]^2 = \varrho^2 [q_1' \varrho)^2 + q_1^2 + 1].$$

Für C als Kreis mit dem Radius ϱ, $w = s/\varrho$, $x = \varrho \cos w$, $y = \varrho \sin w$, wird aus 1), 2), 5)

7) $$X \cos \frac{s}{\varrho} + Y \sin \frac{s}{\varrho} = \varrho - Z q_1$$
$$- X \sin \frac{s}{\varrho} + Y \cos \frac{s}{\varrho} = - Z \varrho q_1'$$

8) $$Z(\varrho^2 q_1'' + q_1) = \varrho,$$

also nach 7)

9) $$X^2 + Y^2 = (\varrho - Z q_1)^2 + Z^2 \varrho^2 q_1'^2.$$

Nun ist für $f = h$ nach 6)

10) $$\varrho^2 q_1'^2 = q_1^2 \left(\frac{\varrho^2}{h^2} - 1\right) + 2 q_1 c \frac{\varrho^2}{h} + \varrho^2 c^2 - 1$$

und durch Differentiation von 10) nach 8)

11) $$\varrho^2 q_1'' + q_1 = q_1 \left(\frac{\varrho^2}{h^2}\right) + c \frac{\varrho^2}{h} = \frac{\varrho}{Z},$$

also nach 9)

12) $$Z q_1 \varrho = h^2 \left(1 - \frac{c \varrho Z}{h}\right).$$

Setzt man in 9) die Werte von $q_1'^2$ und q_1 aus 10) und 12) ein, so erhält man nach Ausführung der Rechnung die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2 Z \varrho c h = \varrho^2 - h^2,$$

also die Kugelfläche

13) $$X^2 + Y^2 + (Z - \varrho c h)^2 = \varrho^2 - h^2 + \varrho^2 c^2 h^2$$

mit dem auf der Z-Axe liegenden Mittelpunkte $Z_0 = \varrho c h$ und dem Radius $R = \sqrt{\varrho^2 - h^2 + \varrho^2 c^2 h^2}$. Dieser Radius ist sicher reell, wenn $h \leqq \varrho^2$ ist. Ist aber $h > \varrho$, so zeigt die aus 10) entspringende Gleichung

$$\frac{\varrho\, q_1 (h^2 - \varrho^2)}{\sqrt{-\left(q_1 \frac{(h^2-\varrho^2}{h} - c\varrho^2\right)^2 + \varrho^2 c^2 h^2 + \varrho^2 - h^2}} = \frac{ds}{\varrho}\sqrt{h^2-\varrho^2},$$

daß $\varrho^2 c^2 h^2 + \varrho^2 - h^2$ positiv sein muß, wenn überhaupt ein reeller Wert für q_1 entstehen soll[1]). Man hat daher den durch seine Einfachheit bemerkenswerten Satz, der sich auch geometrisch ableiten läßt:

Die räumlichen Huygensschen Traktorien eines Kreises liegen sämtlich auf Kugelflächen, deren Mittelpunkte auf der im Zentrum des Kreises auf dessen Ebene errichteten Normalen liegen.

Diese Kugelflächen 13) schneiden die XY-Ebene in dem System der konzentrischen Kreise

$$X^2 + Y^2 = h^2 - \varrho^2 + c^2 h^2 \varrho^2.$$

Übrigens hat man aus 8) und 12)

$$14) \qquad \begin{aligned} X &= (\varrho - Z q_1)\cos\left(\frac{s}{\varrho}\right) + Z\varrho q_1' \sin\left(\frac{s}{\varrho}\right) \\ Y &= (\varrho - Z q_1)\sin\left(\frac{s}{\varrho}\right) - Z\varrho q_1' \cos\left(\frac{s}{\varrho}\right) \\ Z &= \frac{h^2}{\varrho}\,\frac{1}{q_1 + hc}. \end{aligned}$$

Für $h < \varrho$ ist nun q_1 eine Exponentialfunktionen des Argumentes $w = \frac{s}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\varrho^2 - h^2}}{h}$ enthaltender Ausdruck; für $h = \varrho$ eine quadratische Funktion von s/ϱ. Die Kurven Γ sind alsdann transzendent. Ist dagegen $h > \varrho$, so wird q_1 eine trigonometrische Funktion mit dem Argumente $w = \frac{s}{\varrho}\,\frac{\sqrt{h^2-\varrho^2}}{h} + c_2$. Auch hier ist im allgemeinen Γ transzendent; wenn aber $\frac{\sqrt{h^2-\varrho^2}}{h}$ eine rationale Zahl m/w ist, werden X, Y, Z nach 14) Funktionen von $\cos n\sigma$ und $\cos \sigma m$, $\cos \sigma = s/\varrho n$, d. h. rationale

[1]) Dadurch wird nicht etwa der Wert von h beschränkt, sondern der der Integrationskonstanten c.

Funktionen von $\sin\sigma$ und $\cos\sigma$, d. h. die Γ sind unicursale Kurven.

Da bei dieser Betrachtung $q_1 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, gehört die Kugelfläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = \varrho^2 - h^2$ nicht mehr zu den oben genannten, da hierbei die Traktrix des Kreises in seiner Ebene in Betracht kommt. Nach 2) § IV hat man für $p = h\cos\alpha$, $q = h\sin\alpha$ die Differentialgleichung

$$15) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\alpha}{h} - \frac{1}{\varrho}, \quad \varrho = \text{konst.}$$

Für $\varrho\sin\alpha = h$ ergibt sich, wie übrigens schon im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, als „singuläre“ Lösung Γ das System der Kreise, die mit dem Radius $\sqrt{\varrho^2 - h^2}$ um den Mittelpunkt des Kreises C beschrieben sind; es sind das die Kreise, die für den Wert $C = 0$ von den vorhin betrachteten Kugelflächen aus der XY-Ebene ausgeschnitten werden, so lange $h \leq \varrho$ ist. Im allgemeinen ergeben sich aus der Gleichung 15) transzendente Kurven Γ, die mit den Kugelflächen 13) in keiner Beziehung stehen, die aber, wie die Integration von 15) zeigt, für ein rationales $\frac{\sqrt{h^2 - \varrho^2}}{h}$ in analoger Weise algebraisch werden.

§ XIV.

Schlussbemerkung.

In dem vorigen Paragraphen sind nur einige einfache Fälle behandelt, und man sieht, daß sich noch eine große Zahl von Untersuchungen der verschiedensten Art, für die hier nicht der Ort ist, anschließen läßt. Nur das folgende sei noch angedeutet.

Soll die Erzeugende PQ von Γ mit einer der Axen des Triëders von C der Reihe nach Winkel mit den Cosinus $\cos i$, $\cos j$, $\cos k$ einschließen, so hat man

$$1) \quad \cos i = \frac{\Pi}{D}, \qquad 2) \quad \cos j = \frac{q_1}{\varrho D}, \qquad 3) \quad \cos k = -\frac{1}{\varrho D},$$

$$\Pi = \frac{1 + q_1^2}{\tau} - q_1', \quad D = \sqrt{\Pi^2 + \frac{q_1^2 + 1}{\varrho^2}}.$$

Für den Fall, daß einer dieser Cosinus konstant sein soll, erhält man bei den Schraubenlinien durch Quadraturen integrierbare Gleichungen. Im allgemeinen liefert der Fall 1) eine Riccatische Gleichung.

Für eine ebene Kurve C hat man insbesondere

$$1\,a)\quad q_1' = \frac{\sqrt{q_1^2+1}}{\varrho}\operatorname{cotg} i, \qquad 2\,a)\quad q_1' = \frac{\sqrt{q_1^2\operatorname{tg}^2 j - 1}}{\varrho}$$

$$3\,a)\qquad q_1' = \frac{\sqrt{\operatorname{cotg}^2 k - q_1^2}}{\varrho},$$

insbesondere für den Kreis nach den Gleichungen 7), 8) des vorigen Paragraphen

$$4)\qquad \begin{aligned} X\cos(s/\varrho) + Y\sin(s/\varrho) &= \varrho - Zq_1 \\ -X\sin(s/\varrho) + Y\cos(s/\varrho) &= -Z\varrho\, q_1 \\ Z(\varrho^2 q_1'' + q_1) &= \varrho. \end{aligned}$$

Für 1a) wird $q_1'' = q_1/\varrho^2 \operatorname{cotg}^2 i$, $Zq_1 = \varrho \sin^2 i$. Setzt man diese Werte in die Gleichungen 4) ein, so erhält man

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \operatorname{cotg}^2 i = \varrho^2 \cos^2 i.$$

Die Kurven Γ liegen für $\operatorname{eotg} i = \text{const}$ auf einem Rotationshyperboloid.

Für 2a) wird $q_1'' = q_1/\varrho^2 \operatorname{tg}^2 j$; $Zq_1 = \varrho \cos^2 j$, also:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varrho^2 \sin^2 j$$

und die Kurven I liegen für $\sin j = \text{const}$ auf einer Kugel, deren Mittelpunkt das Zentrum des Kreises C ist. In beiden Fällen 1a), 2a) sind sie transzendent[1]).

Im Falle 3a) wird $q_1'' = -q_1/\varrho^2$, also $Z = \infty$, man erhält dann nur Zylinder $X : Y : Z = \cos k \sin c_1 : \operatorname{cotg} k \cos c_1 : 1$, wo mit c_1 die Integrationskonstante bezeichnet ist.

---

[1]) Für die singulären Lösungen von 2a) und 3a), nämlich $q_1 = \operatorname{cotg} j$ $q_1 = \operatorname{cotg} k$ erhält man beidemal $X = Y = 0$, $Z = \varrho \operatorname{tg} j$ resp. $Z = \varrho \operatorname{tg} k$,

Über ein invertiertes Bohrsches Modell.

Von **W. Lenz.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 1. Juni 1918.

Nachdem das Bohrmodell auf dem Gebiete der sichtbaren und der Röntgenspektren in den Untersuchungen von Sommerfeld,[1]) Epstein[2]) und Kossel[3]) so glänzende Erfolge gezeitigt hat, gewinnt es Interesse, zu ermitteln, welche Gebilde außer den hierbei in Frage kommenden Modellen im Rahmen des Bohrschen Rechenschemas theoretisch möglich sind. Als einfachste Abart des Bohrmodells bietet sich der Gedanke einer Inversion in der Weise, daß die Elektronen als die ruhenden, die positiven Kerne, etwa Wasserstoffkerne, als die umlaufenden Ladungen betrachtet werden. Ein Versuch in dieser Richtung zeigt sogleich, daß die Abmessungen derartiger invertierter Atommodelle gegenüber den Dimensionen der Atome verschwindend klein ausfallen. Es liegt daher der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob und inwieweit diese invertierten Modelle zur Erklärung der Atomkerne herangezogen werden können. Von der Verfolgung dieses Gedankens darf unseres Erachtens der Umstand nicht abschrecken, daß man sich dabei auf ein Gebiet begibt, in dem der Bestand an gesicherten experimentellen Tatsachen äußerst gering ist. Denn es kann sich dabei nicht um die Erklärung von Einzelheiten handeln, sondern lediglich um die Grundfrage, ob und gegebenenfalls

[1]) Ann. d. Phys., Bd. 51, 1916, p. 1 und 125.

[2]) Ann. d. Phys., Bd. 50, 1916, p. 489.

[3]) Deutsche Phys. Ges., Bd. 16, 1914, p. 898 u. 953, Bd. 18, 1916, p. 339.

unter welchen einfachsten Hilfsannahmen der Rahmen des Bohrschen Rechenschemas im invertierten Modell ausreicht, um eine Erklärung komplexer Atomkerne möglich zu machen. Denn zu einer Auffassung der Atomkerne als komplexer Gebilde sind wir durch die Erscheinungen der Radioaktivität gezwungen, deren Ursprung wir nach unserer allgemeinen Kenntnis des Atombaues nur in den Kern verlegen können. Gilt diese Schlußfolgerung auch zunächst nur für die radioaktiven Elemente, so ist der Gedanke doch äußerst verlockend, auch die Kerne der übrigen Elemente als komplex zu betrachten. Man wird sich dabei von der Überlegung leiten lassen, daß dem einfachen Gesetz der Größe der Kernladung auch ein einfacher innerer Aufbau entspricht. Wir wollen uns im folgenden sogleich auf den einfachsten, aber auch ganz extremen Standpunkt stellen, daß die Kerne durchgängig aus Elektronen und Wasserstoffkernen aufgebaut sind.

Im § 1 werden zwei einfache Beispiele invertierter Modelle durchgerechnet. Die in § 2 durchgeführte Gegenüberstellung mit den Erfahrungstatsachen ergibt, daß die Inversion allein nicht zur Erklärung der Kernstruktur ausreichen kann. In § 3 wird die Frage geprüft, ob nicht die Annahme der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes im Bereich der Kerndimensionen als ungerechtfertigt betrachtet werden muß, und ob sich unter Aufgabe dieses Gesetzes nicht die Möglichkeit ergibt, mit Hilfe der invertierten Modelle zu einer Erklärung der Kernstruktur zu gelangen.

§ 1. Zwei Beispiele zum invertierten Atommodell.

Als erstes Beispiel behandeln wir den einfachsten Fall, daß zwei Wasserstoffkerne von der Masse m und der Ladung e mit der Winkelgeschwindigkeit ω ein ruhendes Elektron umkreisen. Nennt man den Abstand der beiden Kerne $2r$, so kommt in bekannter Weise als Gleichgewichtsbedingung:

$$m r \omega^2 = \frac{e^2}{r^2} - \frac{e^2}{4r^2} = \frac{3}{4}\frac{e^2}{r^2}, \ldots \qquad (1)$$

und als Quantenbedingung:

$$2\pi r \cdot mr\omega = nh, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Die Bohrbahnen besitzen also die Radien:

$$r_n = \frac{4}{3m}\left(\frac{nh}{2\pi e}\right)^2 = n^2 \cdot 3{,}85.10^{-12}, \ldots \tag{3}$$

wenn man für die in Frage kommenden Konstanten die von Sommerfeld[1]) aus der Feinstruktur der Wasserstofflinien errechneten Werte einsetzt. Entsprechend dem viel größeren Wert der Masse des Wasserstoffkerns gegenüber dem der Elektronenmasse schrumpfen die Dimensionen der invertierten Modelle auf etwa den 2000. Teil derjenigen der Atommodelle zusammen.

Bedeutet W_p die potentielle und W_k die kinetische Energie des Modells, so findet man mit Rücksicht auf (3) für die Gesamtenergie:

$$W = W_p + W_k = -\frac{3}{4}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{n^2} \cdot 4{,}4.10^{-8} \text{ erg}. \ldots \tag{4}$$

Es wäre also Röntgenstrahlung von der durch $h\nu = |W|$ bestimmten Schwingungszahl ν imstande, das Modell zu zersprengen, d. h. Strahlung von der Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c \cdot h}{|W|} = 4{,}4.10^{-9} \text{ cm}.$$

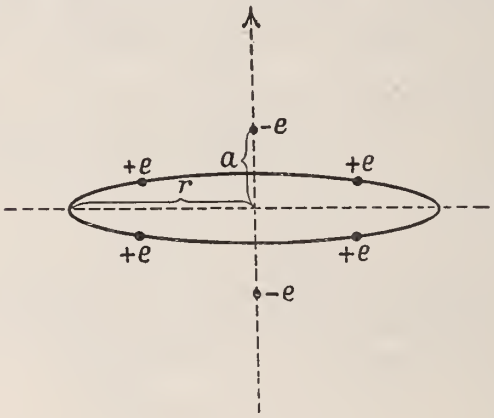
Entsprechendes würde für die Wirkung schneller Kathodenstrahlen gelten.

Um bestimmtere Vergleichsmöglichkeiten für das Spätere zu gewinnen, wollen wir noch ein zweites, den Eigenschaften des Heliumkerns möglichst angepaßtes Modell durchrechnen. (Das vorige Modell wäre ein zu Wasserstoff isotopes Element vom Atomgewicht 2 und der Kernladung $2 - 1 = 1$.) Stellt man sich den Heliumkern aus Wasserstoffkernen aufgebaut vor, so wird man annehmen müssen, daß vier Wasserstoffkerne und zwei Elektronen an diesem Aufbau teilnehmen, damit Atom-

[1]) L. c. p. 93.

gewicht und Kernladung möglichst getroffen werden.[1]) Die Anordnung unseres invertierten Modells möge nun, wie in unten stehender Figur angedeutet, darin bestehen, daß die vier Wasserstoffkerne auf einem Kreis um die beiden ruhenden Elektronen rotieren. Der Radius des Kreises der Wasserstoffkerne werde mit r, der Abstand der beiden Elektronen mit $2a$ bezeichnet. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann für das Elektron:

$$0 = \frac{e^2}{4a^2} - 4\frac{e^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}, \ldots \tag{5}$$



und für den Wasserstoffkern:

$$mr\omega^2 = 2\frac{e^2}{a^2+r^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}} - S_4\cdot\frac{e^2}{r^2}, \ldots \tag{6}$$

wenn der Faktor S_4 in üblicher Weise die Abstoßung der drei Kerne auf den vierten mißt. Es ist

$$S_4 = \frac{1}{4}(1+2\sqrt{2}) = 0{,}957.$$

---

[1]) Vgl. E. Rutherford, Phil. Mag. 27, 1914, p. 488, wo indessen die gegenseitige Lage und Bewegung der Bausteine des Heliumkerns noch unbestimmt bleibt.

Aus (5) folgt $r = a\sqrt{16^2/_3 - 1}$ und daher aus (6):

$$\left.\begin{aligned} m r^3 \omega^2 &= a e^2, \\ a &= \tfrac{1}{8}(16^2/_3 - 1)^3/_2 - S_4 = 0{,}58 \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (7)$$

Unter Hinzunahme der Quantenbedingung (2) findet man hieraus:

$$r = \frac{1}{a m}\left(\frac{n h}{2\pi e}\right)^2 = n^2 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-12}\ \text{cm} \ldots \qquad (8)$$

Der Vergleich mit (3) lehrt, daß sich die Dimensionen des Modells bei Hinzunahme von Wasserstoffkernen und Elektronen langsam vergrößern.

Die potentielle Energie W_p des Modells gewinnt man am bequemsten aus (7) durch die Überlegung, daß das Modell für jeden Radius r im Gleichgewicht ist, wenn man an den festgehaltenen vier Wasserstoffkernen je die radial gerichtete Kraft $m r \omega^2$ anbringt. Es ist also wegen (7)

$$W_p = 4 \int_{\infty}^{r} \frac{a e^2}{r^2}\, dr = -4 a \frac{e^2}{r};$$

unter Hinzunahme der kinetischen Energie $W_k = 4 m r^2 \omega^2/2 = 2 a e^2/r$ kommt für die gesamte Energie des Modells:

$$W = -2 a \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{n^2} \cdot 5{,}45 \cdot 10^{-8}\ \text{erg}. \ldots \qquad (9)$$

Die beiden betrachteten Modelle tragen nach außen hin eine bzw. zwei positive Elementarladungen. Eine merkwürdige Konsequenz ergibt sich aus der Inversion, wenn die nach außen hin wirksame Ladung gleich Null ist. Ein solcher Fall wäre die Inversion des Modells zum Wasserstoffmolekül. Die Dimensionen des invertierten Modells verhalten sich zu denen des ursprünglichen wie die Elektronenmasse zur Masse des Wasserstoffkerns. Man gelangt so zu einem chemisch vollkommen trägen Gas, dessen Moleküle vermöge ihrer kleinen Dimensionen fähig sein müßten, alle Körper zu durchdringen.

Abgesehen von allen Erfahrungstatsachen kann man gegen die Existenz unserer invertierten Modelle ihre teilweise In-

stabilität geltend machen. Jedoch trifft sie dieser Einwand unseres Erachtens in nicht höherem Maße als das Bohrsche Wasserstoffmolekül, das durch die Arbeiten Debyes über die Dispersion eine starke Stütze gefunden hat.

§ 2. Gegenüberstellung mit den Erfahrungstatsachen.

Ausdehnung der Kerne. Nach den jüngsten Untersuchungen von Debye[1]) und einer soeben erschienenen Arbeit von Sommerfeld[2]) darf man annehmen, daß es gelingt, die Röntgenspektren unter Annahme eines punktförmigen Kerns zu erklären. Da der hierbei in Frage kommende innerste Elektronenring des Atoms bei den schwersten der untersuchten Elemente auf etwa 10^{-10} cm an den Kern herantritt, so müssen die Kerndimensionen, falls man an einem komplexen Kernaufbau festhält, gegen diesen Ringhalbmesser jedenfalls sehr klein sein. Auf einem älteren und mehr direkten Wege gelangt Rutherford[3]) zu bestimmteren Angaben hinsichtlich der Kernabmessungen. In seinen grundlegenden Arbeiten, die uns den Weg in das Innere des Atoms eröffneten und in Bohrs Atommodell so glänzende Früchte gezeitigt haben, errechnet er aus der Zerstreuung der α-Strahlen beim Durchgang durch dünne Metallfolien eine obere Grenze für die Abmessungen des Atomkerns. Er findet für Gold den Wert 3.10^{-12} cm. Für die hier mehr interessierenden Kerne von Wasserstoff und Helium findet C. G. Darwin[4]) als obere Grenze des Radius $1{,}7.10^{-13}$ cm. Da die zu diesen Werten führende theoretische Überlegung die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes zur Voraussetzung hat, so können wir die obigen Grenzradien mit den Radien der invertierten Modelle vergleichen. Wie oben gezeigt wurde, erhalten bei unseren Modellen schon die einfachsten Gebilde Abmessungen, die oberhalb dieser Grenzen liegen. Auf Grund

[1]) Physik. Zeitschr., Bd. 18, 1917, p. 276.
[2]) Physik. Zeitschr., Bd. 19, 1918, p. 297.
[3]) Phil. Mag. 27, 1914, pag. 488.
[4]) Phil. Mag. 27, 1914, pag. 499.

unserer Annahme eines durchgängigen Aufbaus der Kerne aus Wasserstoffkernen müßten diese Abmessungen für die schwereren Elemente noch bedeutend größer werden. Obwohl hier im Aufbau des Modells ein großer Spielraum gelassen ist, dürfte aus den Beispielen des vorigen Paragraphen doch hervorgehen, daß man unter Beibehaltung der bisher gemachten Annahmen nicht die erforderlichen kleinen Kerndimensionen erreichen wird.

Energie der Kerne. Ähnliche unzureichende Ergebnisse erhält man bei Betrachtung der energetischen Verhältnisse. Die oben erörterte Unbeständigkeit des ersten der invertierten Modelle gegen kurzwellige Röntgenstrahlen gilt ebenso für das zweite Modell. Umgekehrt kann man aus der tatsächlichen Beständigkeit der Atomkerne schließen, daß die Energie des Kerns wesentlich kleiner sein muß, als die Summe der Einzelenergien seiner Teile. Dieser Energieverkleinerung bei der Kernbildung entspricht eine Massendifferenz in der Weise, daß die Masse des Kerns kleiner sein muß als die Gesamtmasse der Teilkerne im Zustand völliger Trennung. Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir die Atomgewichte der leichtesten Elemente betrachten, die auf Sauerstoff = 16 bezogen folgendermaßen lauten:

H	*He*	*Li*	*Be*	*B*	*C*	*N*	*O*	*F*
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,008	4,00	6,94	9,1	11,0	12,00	14,01	16,00	19,0

(Die Zahlen der ersten Horizontalreihe bedeuten die Kernladungszahl)

In der Gruppierung der Atomgewichte um die ganzen Zahlen hat man von jeher den Ausdruck einer Gesetzmäßigkeit des Aufbaus der Elemente erblickt; es kann daraus zweifellos eine Stütze für die Hypothese eines Kernaufbaus aus Wasserstoffkernen abgeleitet werden. Ein tiefergehendes Argument für diese Auffassung kann aus dem Vergleich der Atomgewichte mit dem entsprechenden ganzzahligen Vielfachen der Wasserstoffzahl entnommen werden. Denn die Werte $n \cdot 1{,}008$ sind — mit Ausnahme von *Be* — überall größer als das Atomgewicht des betreffenden Elements. Bei einem

Aufbau aus Wasserstoffkernen müßte also in Übereinstimmung mit unseren obigen Überlegungen Masse, d. h. Energie abgegeben worden sein; die Masse der am Aufbau teilnehmenden Elektronen kann dabei, wie eine Überschlagsrechnung lehrt, vernachlässigt werden. Die Ausnahme bei *Be*, ebenso wie die zahlreichen Unstimmigkeiten bei den schwereren Elementen, können vielleicht ihren Grund im Vorhandensein von Isotopen haben.

Wir wollen am Beispiel des Heliums noch zahlenmäßig nachprüfen, ob die aus Vorstehendem sich ergebende Energiedifferenz ausreicht, um die Stabilität des Kerns gegenüber zerstörenden Einflüssen zu gewährleisten. Dem Massenunterschied $\Delta m = 4\, m_H - m_{He} = (4.1{,}008 - 4{,}00)\, m_H$ entspricht eine Energieabnahme:

$$W = -c^2 \Delta m \sim -4{,}5 \cdot 10^{-5} \text{ erg. } \ldots \qquad (10)$$

Die Kernstruktur wäre demnach noch gegenüber den schnellsten α-Strahlen beständig.

Ergibt sich hieraus auch die Möglichkeit, den Heliumkern aus Wasserstoffkernen aufgebaut zu denken, so zeigt doch ein Vergleich von (10) und (9), daß die obige Behandlung der invertierten Modelle zu einer Erklärung dieser Struktur nicht ausreicht. Es ist auch schwerlich anzunehmen, daß man durch anderen Aufbau des Modells die in (10) geforderte Energie auch nur annähernd erreichen kann.

§ 3. Über das Coulombsche Gesetz.

Ehe man nach diesem Sachverhalt den Gedanken eines Kernaufbaus nach Art der invertierten Modelle überhaupt aufgibt, muß man sich fragen, ob die im Vorangehenden mit der Übernahme des Bohrschen Rechenschemas stillschweigends gemachten Annahmen unbedingt aufrecht erhalten werden müssen: die Methode der Quantentheorie und das Coulombsche Gesetz. Während man der Quantentheorie nach der glänzenden Bestätigung auf dem Gebiet der Spektren universelle Gültigkeit zuzuschreiben geneigt ist, hat man für die Aufrechterhaltung

des Coulombschen Gesetzes in den für uns in Frage kommenden geringen Entfernungen vom Mittelpunkt der Ladungen keinen unmittelbar zwingenden Grund. Es lassen sich im Gegenteil Gründe für eine Abänderung dieses Gesetzes im Bereich der Kerndimensionen anführen.

In Ermangelung detaillierterer Kenntnisse wird man eine Dimensionsbetrachtung zu Rate ziehen, um beurteilen zu können, wo für die Gültigkeit des Gesetzes eine mögliche Grenze liegt. Wir haben also aus den bekannten Daten des Elektrons bzw. des positiven (Wasserstoff-)Kerns einen Ausdruck ϱ von der Dimension einer Länge zu bilden. Hierzu kommen in erster Linie in Frage die Ladung e, die Masse m und die Lichtgeschwindigkeit c, woraus eindeutig entsteht:

$$\varrho \sim \frac{e^2}{m c^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{11}$$

Man erkennt darin bis auf einen Zahlenfaktor diejenige Größe, die man als Radius des Elektrons zu bezeichnen pflegt, falls m die Elektronenmasse und e die Elementarladung darstellt. Bei Einsetzen dieser Zahlenwerte kommt $\varrho \sim 2.10^{-13}$ cm, ein Wert, der mit den Grenzradien C. G. Darwins nahezu übereinstimmt. Die Relativitätstheorie hat die Spekulationen über Gestalt und Ladungsverteilung des Elektrons gegenstandslos gemacht. Dürfte es unseren heutigen Vorstellungen über die Natur der Elementarladung nicht eher entsprechen, die Größe ϱ — bis auf einen Zahlenfaktor — als eine Art Grenze der Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes aufzufassen? In diesem Falle könnten unsere obigen Modelle eine Modifikation im Sinne einer Annäherung an die im vorigen Paragraphen erörterten empirischen Eigenschaften der Kerne erfahren. Eine Schwierigkeit für diese Auffassung besteht allerdings darin, daß (11) bei Einsetzen der Masse des Wasserstoffkerns einen etwa 2000 mal kleineren Zahlenwert erhält. Im Folgenden werden wir mit dem ϱ aus Gl. (11) für m = Elektronenmasse operieren.

Bei der Dürftigkeit der Unterlagen an gesicherten experimentellen Tatsachen wäre der Versuch verfrüht, auf Grund

des Obigen ein bestimmtes neues Gesetz an Stelle des Coulombschen setzen zu wollen. Diese Frage gehört vor allem in das Gebiet der modernen Versuche, die Elektrodynamik in das „Innere" des Elektrons fortzusetzen. Wir wollen jedoch noch kurz betrachten, welche Aussagen sich im Rahmen des Vorstehenden über eine eventuelle Abänderung des Coulombschen Gesetzes machen lassen.

Hierzu wollen wir an Stelle des Coulombschen Gesetzes das Kraftgesetz $F = \frac{e^2}{r^2} \cdot f\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ einführen und zwei Fälle unterscheiden.

a) $r \gg \varrho$. Für große Radien muß das Gesetz in das Coulombsche übergehen, also $f(0) = 1$. Die Abweichung vom Coulombschen Gesetz muß noch bis in den Bereich der äußeren Elektronen des Atoms ($r \sim 10^{-8}$ cm) äußerst gering sein, falls die so glänzend bestätigte Feinstruktur der Wasserstofflinien nicht gestört werden soll. Daher kann f in ϱ/r für kleines Argument jedenfalls nicht linear sein.

b) $r \sim \varrho$ und $r < \varrho$. Gegen die Annahme eines linearen Verlaufs von f bei großem Argument spricht der Umstand, daß für ein Kraftgesetz $1/r^3$ die Quantenbedingung keine bestimmten Werte für die Radien liefert; r fällt aus der Rechnung ganz heraus. Daß jedoch für großes Argument die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz sehr erheblich werden müssen, erkennt man aus Folgendem.

Unabhängig von der Gestalt des Gesetzes, sofern nur radiale Symmetrie herrscht, können wir mit Hilfe der Quantentheorie jedenfalls die kinetische Energie des Modells in Abhängigkeit vom Radius des Umlaufs angeben. Mit Rücksicht auf die Quantenbedingung (2) finden wir:

$$W_k = 4 \cdot \tfrac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{nh}{2\pi r}\right)^2.$$

Da die potentionelle Energie W_p negatives Vorzeichen besitzt, so finden wir für den Absolutwert der Gesamtenergie:

$$|W| = |W_p| - \frac{2}{m}\left(\frac{nh}{2\pi r}\right)^2. \quad . \quad . \quad . \qquad (12)$$

Hierin wären die aus dem Kraftgesetz zu errechnenden Radien der Bohrbahnen einzuführen. Als Ersatz für die mangelnde Kenntnis dieser Radien möge uns der Grenzradius C. G. Darwins dienen. Schon für diesen Radius wird der zweite Term in (12) größer als der Energiewert (10). Die potentielle Energie muß also nach abnehmenden Radien einen viel steileren Anstieg zeigen als die Coulombsche.

Den beiden Bedingungen für große und kleine ϱ/r würde z. B. eine Funktion $f = e^{\beta x^2}$, $x = \frac{\varrho}{r}$ mit $\beta \sim 1$ genügen.

Sollten unsere Vorstellungen das Wesentliche der Kerneigenschaften treffen, so könnten Anhaltspunkte für das abgeänderte Gesetz von einer Verfeinerung der Beobachtungen an Röntgenspektren erwartet werden. Denn hierbei treten die in Frage kommenden Elektronen, besonders bei den schwereren Elementen, so nahe an den Kern heran, daß ein vom Coulombschen abweichender Verlauf des Anziehungsgesetzes sich bemerkbar machen könnte.

Sollte sich dagegen unser Erklärungsversuch der Atomkerne als gänzlich verfehlt erweisen, so bliebe immerhin die Frage offen, welche Rolle den invertierten Modellen in der Natur zukommt.

Im Felde, den 27. Mai 1918.

Über die Feinstruktur der K_β-Linie.

Von **A. Sommerfeld.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juni 1918.

In einer Arbeit, die ich der K. Akademie Anfang 1916 vorlegte, wurde die Feinstruktur der Wasserstoffspektren entwickelt. Als Bahnen des Wasserstoffelektrons treten nicht nur Kreise, sondern auch gewisse Ellipsen auf (gequantelte Kepler-Ellipsen); die einquantige Bahn ist einfach (Kreisbahn), die zweiquantige doppelt (Kreis- oder Ellipsenbahn), die dreiquantige dreifach (Kreis oder Ellipse von geringerer oder von größerer Exzentrizität etc.). Aus der doppelten Natur der zweiquantigen Bahn ergibt sich insbesondere das Dublett der Balmerschen Serie.

Schon damals wurde eine Anwendung auf die Feinstruktur der Röntgenspektren gemacht. Der K-Ring (innerster einquantiger Elektronenring im Atom) ist seiner Natur nach einfach, nämlich notwendig kreisförmig. Der L-Ring (zweiter zweiquantiger Elektronenring) ist entweder kreisförmig oder elliptisch. Er gibt daher zu einem Dublett Veranlassung, welches wegen der Größe der wirksamen Kernladung bei den schweren Elementen eine millionenfach größere Trennung besitzt wie beim Wasserstoff. Dieses Dublett wurde an mehreren Stellen der L-Serie nachgewiesen (zwischen L_α und L_β, L_γ und L_δ, L_ε und L_η, L_ζ und L_ϑ) und tritt auch in der K-Serie auf (zwischen K_α und $K_{\alpha'}$). In der Tat ist der L-Ring nicht nur Endbahn für die Linien der L-Serie, sondern auch Anfangsbahn für die Linien K_α, $K_{\alpha'}$ der K-Serie.

Bezüglich der rechnerischen Behandlung wurde damals vorausgesetzt, daß jede Bahn nur von einem Elektron beschrieben würde. Diese Vorstellung war nur eine vorläufige und muß im Anschluß an die Erfordernisse des periodischen Systems ersetzt werden durch die Annahme, daß jeder Ring mehrfach von Elektronen besetzt ist. Dabei sind bei dem elliptischen L-Ring die Elektronen nicht auf ein und derselben Ellipse zu verteilen, sondern auf einem „Ellipsenverein", einem Systeme gleicher und symmetrisch gestellter Ellipsen, derart, daß die Elektronen des Vereins jederzeit die Ecken eines regulären (bald sich verengernden, bald sich erweiternden) Polygons bilden. Nachdem inzwischen auch die Messungen der Röntgenspektren an Reichhaltigkeit und Genauigkeit zugenommen haben, darf man behaupten, daß man in dem vorhandenen Beobachtungsmaterial bereits die Mittel in der Hand hat, um die Topologie des Atominneren zu erforschen, d. h. die Verteilung der Elektronen auf die einzelnen Atomringe aus den Beobachtungen zu berechnen.

Zu dem Ende habe ich kürzlich[1]) eine strenge Formel für die Energie eines beliebigen Ringsystems entwickelt. Bei n komplanaren Ringen handelt es sich um ein mechanisches System von n Freiheitsgraden; die Unbekannten des Systems, die n Ringradien, werden durch die mechanischen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Sind $p_1, p_2, \ldots p_\varkappa \ldots$ die Besetzungszahlen der aufeinander folgenden Ringe $Z_1, Z_2 \ldots Z_\varkappa \ldots$ die „wirksamen Kernladungen", wobei

$$Z_\varkappa = Z - p_1 - p_2 - \cdots - p_{\varkappa-1} - s_\varkappa \tag{1}$$

und Z die wirkliche Kernladung ist, die durch die Elektronenzahlen $p_1, \ldots p_{\varkappa-1}$ der inneren Ringe und durch den Bruchteil $s_\varkappa$ der Elektronen des k^{ten} Ringes abgeschirmt wird, so ist die Energie des Ringsystems einfach gegeben durch

$$-\frac{W}{Nh} = \sum_1^n p_\varkappa \frac{Z_\varkappa^2}{\varkappa^2}. \tag{2}$$

[1]) Physikal. Zeitschr., Bd. 19, 1918, p. 297.

Dabei ist der k^{te} Ring als k-quantig angenommen; N bedeutet die Rydbergsche Zahl; von der Relativitätskorrektion, die sich leicht einfügen läßt, ist abgesehen. Außerdem ist abgesehen von den Wechselwirkungsgliedern der Form

$$(3) \qquad -\tfrac{1}{2}\sum_{j<\varkappa}\sum p_j p_\varkappa \frac{\varkappa^6}{j^4}\frac{Z_\varkappa^3}{Z_j^3}.$$

Es wird gezeigt, daß diese zwar im Einzelnen nicht klein sind, aber in der Summe sich größtenteils aufheben und in der Differenz zwischen Anfangs- und Endbahn bei der heutigen Beobachtungsgenauigkeit praktisch zu vernachlässigen sind. Daraus folgt im Besonderen, daß die vorliegenden Beobachtungen noch nicht zu entscheiden gestatten, ob die Ringe komplanar oder gegeneinander geneigt sind. In der Tat beeinflußt die gegenseitige Neigung der Ringe nur ihre Wechselwirkung und diese kommt in den Beobachtungen praktisch nicht zum Ausdruck.

Im Folgenden möchte ich eine Anwendung der Formel (2) auf die Struktur der Linie K_β geben. Diese Linie entsteht beim Übergang eines Elektrons aus dem M-Ring in den K-Ring und kann durch das Schema dargestellt werden

		K	L	M
Endzustand	$+$	p	q	$r-1$
Anfangszustand	$-$	$p-1$	q	r

p, q, r steht für p_1, p_2, p_3, d. h. für die normalen Besetzungszahlen des K-, L-, M-Ringes. Das vorangestellte Vorzeichen gibt an, ob die betreffende Elektronenzahl in den ersten positiven oder den zweiten negativen Term der Schwingungszahl ν eingeht.

Den Hauptbeitrag zur Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand liefert offenbar der K- und M-Ring, in denen eine Änderung der Elektronenzahl eintritt. Dieser Hauptbeitrag geht, allgemein gesprochen, mit Z^2. Aber auch der L-Ring nimmt auf die Energiebilanz des K_β-Vorganges Einfluß, nämlich mit dem Betrage

$$\frac{q}{4}\left((Z-p-s_q)^2-(Z-p+1-s_q)^2\right)$$

oder, nach der Formel $a^2-b^2=(a-b)\,(a+b)$ zusammengezogen

$$-\frac{q}{2}(Z-p+\tfrac{1}{2}-s_q). \tag{4}$$

Der Beitrag des L-Ringes zu K_β ist also nur von der Ordnung Z.

Um den Ursprung dieses Beitrages deutlich vor Augen zu haben, stelle man sich den L-Ring im Anfangs- und Endzustande vor. Im Anfangszustande ist die Kernladung durch $p-1$, im Endzustande durch p Elektronen abgeschirmt. Im Anfangszustande steht der L-Ring also unter größeren Kräften wie im Endzustande: er expandiert bei der Erzeugung von K_β und verbraucht daher Energie. Dem entspricht das negative Zeichen von (4).

Bei den bisherigen Versuchen, K_β aus der Vorstellung mehrfach besetzter Ringe abzuleiten, ist diese Mitwirkung des L-Ringes übersehen worden.

Der L-Ring ist aber seiner Natur nach doppelt: In einem Teil der Atome wird er als Kreisring ausgebildet sein, in einem anderen (kleineren) Teil als Ellipsenverein. Während der bisher berechnete Beitrag des L-Ringes beiden Konstitutionen desselben gemeinsam ist, unterscheiden sie sich in ihren relativistischen Beiträgen. Der Unterschied in der Energie: Kreisminus Ellipsenbahn beträgt für ein Elektron bei der wirksamen Kernladung Z_2, wie ich früher gezeigt habe, unter Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Größe $\alpha=2\pi e^2/hc$:

$$\frac{\alpha^2 Z_2^4}{2^4}.$$

Die Differenz dieses Unterschiedes zwischen Anfangs- und Endzustand ($Z_2=Z-p+1-sq$ bzw. $Z_2=Z-p-s_q$) ergibt in unserem Falle von q Elektronen als Schwingungsdifferenz:

$$\frac{\Delta\nu}{N}=q\frac{\alpha^2}{2^4}\{(Z-p-s_q)^4-(Z-p+1-s_q)^4\}. \tag{5}$$

Wir rechnen sie um nach der Formel

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3)$$

und ersetzen die rechte Seite bei nahezu gleichen Werten von a und b durch

$$4(a - b)\left(\frac{a + b}{2}\right)^3.$$

Dadurch entsteht aus (5)

$$\frac{\Delta \nu}{N} = -q\frac{\alpha^2}{4}(Z - p + \tfrac{1}{2} - s_q)^3. \tag{6}$$

In gleicher Weise gerechnet ergibt sich für die Schwingungsdifferenz der Linien (K_α, $K_{\alpha'}$)

$$\begin{cases} \frac{\Delta \nu}{N} = \frac{\alpha^2}{2^4}\{q(Z - p - s_q)^4 - (q + 1)(Z - p + 1 - s_q)^4\} \\ \quad \simeq -\frac{\alpha^2}{16}(Z - p + \tfrac{1}{2} - s_q)^4. \end{cases} \tag{7}$$

Unser K_β-Dublett hat also dasselbe Vorzeichen wie das K_α-Dublett; bei beiden liegt die schwächere Linie (Ellipsenbahn) nach der Seite der kleineren Schwingungszahlen (grösseren Wellenlängen). Als Größenverhältnis ergibt sich

$$\frac{\Delta \nu_\beta}{\Delta \nu_\alpha} = \frac{4q}{Z - p + \tfrac{1}{2} - s_q}.$$

Bei großen Werten der Ordnungszahl Z ist $\Delta \nu_\beta$ jedenfalls kleiner als $\Delta \nu_\alpha$, bei kleinen Werten von Z kann $\Delta \nu_\beta$ größer ausfallen, falls die Besetzungszahl q des L-Ringes beträchtlich ist (z. B. wird $q = 8$ durch das periodische System der Elemente nahe gelegt). Zur zuverlässigen Bestimmung dieser Zahl würde der Vergleich beider Dubletts ein vorzügliches Mittel geben, das viel unmittelbarer und sicherer wäre als die Bestimmung von q aus den Darstellungen von K_α oder L_α. In Wellenlängen gemessen, ist, wie ich früher hervorgehoben habe, das L-Dublett und das ihm gleiche (oder annähernd gleiche) K_α-Dublett konstant in der Reihe der Elemente. Dagegen

nimmt das K_β-Dublett, in Wellenlängen gemessen (vgl. die verschiedene Potenz von Z in (6) und (7)) beim Fortschreiten zu größeren Z ab. Man wird dieses Dublett daher am ehesten bei den leichteren Atomen finden können.

Herr Manne Siegbahn, an den ich mich als erfolgreichsten Beobachter der Röntgenspektren kürzlich wegen der Struktur von K_β gewandt hatte, schreibt mir hierzu aus Lund unter dem 25. Mai d. J.: „Wie ich schon vor einiger Zeit auf meinen Platten gesehen habe, ist die K_β-Linie in der Tat doppelt, und zwar habe ich dies bis jetzt bei *Fe* und *Co* gefunden. Die Dispersion genügte nicht, um die zwei Linien in 1. Ordnung vollständig zu trennen. Der Dublettabstand ist daher kleiner als derjenige von (K_α, $K_{\alpha'}$). Die schwächere Linie liegt nach den größeren Wellenlängen hin. Messungen hoffe ich Ihnen in der nächsten Zeit mitteilen zu können."

Untersuchung von Höhen- und Lageänderungen von Messungspunkten im bayerischen Alpenvorland.

Von **M. Schmidt.**

Mit 1 Kärtchen.

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Juli 1918.

Die in den Jahren 1901 vom Vortragenden begonnenen Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellement, über deren Ergebnisse in einem im Jahre 1908 erschienenen 1. Heft berichtet worden ist, sind in den letzten 10 Jahren fortgeführt worden, um die S. 21 dieses Heftes erwähnte Höhenstörung bei Laufen in ihrem weiteren Verlauf zu verfolgen und womöglich aufzuklären.

Hiezu wurde das ganze oberbayerische Alpenvorland mit einem in dem beiliegenden Kärtchen dargestellten Netz von Feinnivellementslinien überspannt, das sich vom Fuß der Berge bis an das Inntal und von der Isar bis zur Salzach erstreckt.

Die Gesamtlänge der in den Jahren 1906 bis 1916 in beiden Richtungen nivellierten Linien dieses Netzes beträgt rund 600 km und der durch die Linien- und Netzausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate für dieses Nivellement ermittelte unregelmäßige Kilometerfehler fand sich zu $\pm$ 0,83 mm nach der Linienausgleichung und zu $\pm$ 1,34 mm aus der Schleifenausgleichung. Der mittlere systematische Fehler der Doppelnivellements beträgt $\pm$ 0,17 mm für ein Kilometer. Die erreichte Genauigkeit entspricht somit den von der Hamburger Erdmessungskonferenz im Jahre 1912 für Feinnivellements von erhöhter Genauigkeit aufgestellten Genauigkeitsforderungen.

Die Höhenberechnung ist an die wagrechte Oberfläche zweier, auf dem Grundstück der Technischen Hochschule in München erbauten und auf die in 6 m Tiefe unter der Bodenfläche anstehenden tertiären Flinzschichten gegründeten Steinpfeiler angeschlossen, deren erstmals im Jahre 1878 durch Feinnivellement bestimmte Höhenlage in der inzwischen verflossenen Zeit von nahezu 40 Jahren unverändert geblieben ist.

Die Pfeiler liegen beiläufig in der Mitte zwischen den am Haupt- und Ostbahnhof durch Metallhöhenmarken I. Ordnung festgelegten Haupthöhenpunkten, an welche die in den genannten Bahnhöfen zusammenlaufenden Nivellementszüge angeschlossen sind.

Ihre Höhenlage über N. N. ist durch die von Norden kommenden Nivellements bestimmt, die nach dem Normalhöhenpunkt des Deutschen Reiches in Berlin führen und von dort einerseits an die Nordsee in Amsterdam und andererseits bis an die Ostsee bei Swinemünde weiterlaufen.

Mit dem Spiegel des Adriatischen Meeres bei Triest wird ihre Verbindung durch das über Salzburg laufende Nivellement der Tauernbahn vermittelt, in welches die von München nach Mühldorf und nach Freilassing über Rosenheim führenden Linien einmünden. München bildet somit einen Knotenpunkt der großen Nivellementszüge, die das Festland von Europa überqueren und an Künstenpunkten der Nord- und Ostsee sowie des Mittelmeeres endigen.

Dem nördlichen Nivellementspfeiler der Technischen Hochschule mit der Höhe 514,6702 m über N. N. gebührt wegen der besseren Beschaffenheit der Oberfläche seines durch einen polierten Syenitwürfel gebildeten Kopfes, sowie durch seine freiere Lage und seine größere Entfernung von den benachbarten Gebäuden der Vorzug vor dem südlichen Pfeiler. Er wird künftig als Hauptanschlußpunkt für alle weiteren von München auslaufenden Feinnivellements dienen können und dadurch die Bedeutung eines Hauptnetz-Knotenpunktes und Normalhöhenpunktes für das bayerische Landesnivellement erhalten.

Der Nachweis dafür, daß die Höhenlage der genannten beiden Pfeiler seit ihrer Erbauung unverändert geblieben ist, findet sich in den Sitzungsberichten der mathem.-physikal. Klasse der K. Bayer. Akademie vom Jahre 1915, S. 329 in der Abhandlung des Vortragenden mit dem Titel „Senkungserscheinungen an der Frauenkirche in München und Lageänderungen von Hauptdreieckspunkten in Südbayern."

Die Höhenberechnung des neuen Nivellements hat für die Höhen der als Anschlußpunkte benützten älteren Höhenmarken bemerkenswerte Abweichungen ergeben, die als Folge von regionalen Bodensenkungen aufgefaßt werden müssen und in dem beigefügten Kärtchen durch Linien gleicher Senkung (Isokatabasen) dargestellt sind. Der zwischen der Ausführung beider Nivellements verflossene Zeitraum ist rund 45 Jahre; nur für die Linie Marktl-Freilassing ist derselbe kürzer und beträgt nur etwas über 20 Jahre.

Die angegebenen Senkungslinien liegen in gleicher Richtung mit der am Fuß der Alpenkette verlaufenden Grenze des Tertiär- und Triasschichtensystems und lassen eine einerseits vom Fuß des Gebirges gegen Norden, andererseits auch in westöstlicher Richtung zunehmende Bodensenkung erkennen, die längs des Inn- und Salzachtales bis auf 83 mm anwächst.

Für die wichtigsten Haupthöhenpunkte des Gebietes sind die als Unterschiede der früheren und der neu bestimmten Höhenkoten berechneten Senkungen sowohl im Lageplan als auch in dem darunter dargestellten Längenprofil der Umfangslinie des Senkungsgebietes angegeben.

Die Oberflächenform der Senkungsfläche läßt deutlich eine Längsfaltung erkennen, die man durch eine Stauchung erklären könnte, welche das Schichtensystem des Senkungsgebietes durch den Druck der gegen Norden vorrückenden Gebirgsmasse der Alpen erlitten hat.

Zur Bildung der beobachteten Senkung mag auch der Umstand beigetragen haben, daß das Alpenvorland durch die von den Gebirgsflüssen nordwärts abgeführten Geschiebemassen eine Mehrbelastung erfährt, während die von dieser Last be-

freiten Berge nach den Gesetzen der Isostasie Neigung zu aufsteigender Bewegung zeigen. Senkungen dieser Art in Beträgen bis zu 18 mm sind in der kurzen Zwischenzeit von sieben Jahren durch die in den Jahren 1906 und 1913 wiederholt ausgeführten Feinnivellements längs des Salzachtales von Marktl nach Freilassing und von Garching nach Freilassing bei den Orten Tittmoning, Laufen, Surheim und an der Eisenbahnbrücke über die Salzach zwischen Freilassing und Salzburg mit aller Sicherheit festgestellt worden, worüber in dem zum Druck vorbereiteten 2. Hefte der Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellement Zahlenangaben enthalten sind. Die in jenem Gebiet häufig auftretenden Erderschütterungen haben wohl auf den dasselbe durchsetzenden Bruchlinien der Erdkruste Bewegungen ausgelöst und Verwerfungen hervorgerufen, wie solche bei Laufen das Salzachtal überqueren und östlich von München die nach Holzkirchen, Grafing und Dorfen führenden Bahnlinien durchschneiden und in das beigefügte Kärtchen eingetragen sind. Diese in der Richtung N 55° O streichenden Bruchlinien sind gleich gerichtet mit der bekannten variskischen Strukturlinie und folgen auch in ihrer Richtung dem gleichlaufenden Abbruch des schwäbischen Jura nach der Donauebene und der großen Vulkanlinie, die von Karlsbad über Parkstein nach dem Ries und zur schwäbischen Alb hinzieht.

Die erwähnten, zwischen Isar, Inn und Salzach nachgewiesenen tektonischen Bewegungen können auch Lageänderungen der in das Störungsgebiet und seine Umgebung fallenden Dreieckspunkte hervorgerufen haben, die sich durch meßbare Richtungs- und Koordinatenänderungen dieser Punkte bemerkbar machen müssen.

Als solche kommen hauptsächlich Punkte der südbayerischen Dreieckskette in Betracht, die in den Jahren 1903/04 in Südbayern als Glied der Längengradmessung auf dem 48. Breitenparallelgrad gemessen worden ist, und einerseits durch die von Hammer beobachtete Dreieckskette durch Württemberg mit dem rheinischen Netz der preußischen Landesauf-

nahme, andererseits mit dem österreichischen Gradmessungsnetz bei Salzburg in Verbindung steht[1]).

Für die Berechnung dieser Kette ist die Länge und Orientierung der oberbayerischen Grundlinie München-Aufkirchen unverändert wie bei der v. Orffschen Berechnung des bayerischen Hauptdreiecksnetzes (vgl. das amtliche Werk „Die Bayerische Landesvermessung, München 1873") beibehalten worden, in welchem die Winkelmessungen in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts zur Ausführung gekommen sind.

Um die neu berechneten Koordinaten der südbayerischen Dreieckskette mit jenen der identischen Netzpunkte der bayerischen Landesvermessung vergleichen zu können, sind die beiden Punktsysteme nach dem Helmertschen Verfahren (Längengradmessung I, 1893, S. 47) so aufeinander gelegt und gegenseitig verschoben worden, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum wird[2]).

In den Sitzungsberichten 1912, S. 191 ist diese Netzeinpassung wegen eines Fehlers in der Berechnung berichtigt und hiebei auch die scheinbare Lageänderung der Hauptdreieckspunkte Watzmann und Rettenstein näher untersucht und durch Seitenrefraktion zu begründen versucht worden.

Weitere Untersuchungen über Bodensenkungen und Lageänderungen von Hauptdreieckspunkten finden sich in den Sitzungsberichten der Jahre 1914 und 1915 mitgeteilt, von denen der letztgenannte Bericht auf S. 350/351 eine Zusammenstellung der bei drei verschiedenen Neuberechnungen der Netzeinpassung übrig bleibenden Koordinaten-Restfehler enthält.

Ordnet man die Beobachtungsstationen in der Reihenfolge von West nach Ost und faßt die Restfehler zu Mittelwerten zusammen, welche der Lageänderung der Mitten der die genannten Stationen in nordsüdlicher Richtung verbindenden Drei-

---

[1]) Sitzungsber. der mathematisch-physikal. Klasse, Bd. XXXVI, 1906, S. 139.

[2]) Sitzungsber. 1910, 11. Abh. und ebenda 1912, S. 191.

ecksseiten entsprechen, so erhält man eine von Osten nach Westen anwachsende Lageänderung dieser Seitenmitten, die sich als Westwanderung dieser Punkte darstellt und einen Betrag von beiläufig 27 cm auf 100 km zeigt.

Koordinaten-Restfehler einiger Dreieckspunkte der bayerischen Landesvermessung.

Nr.	Dreieckseiten der südbayer. Kette	R_x cm	R'_x cm	R_y cm	R'_y cm	$\Delta_x = R_x - R'_x$ cm	$\Delta_y = \frac{1}{2}(R_y + R$ cm
1	Roggenburg-Aenger	+ 15	− 3	+ 33	+ 43	+ 18	+ 38
2	Kirchheim-Grünten	+ 9	− 11	+ 29	+ 42	+ 20	+ 35
3	Stauffersberg-Peißenberg	+ 16	− 8	+ 20	+ 22	+ 24	+ 21
4	Altomünster-Peißenberg	+ 9	− 8	+ 8	+ 22	+ 17	+ 15
5	München-Peißenberg	− 3	− 8	+ 4	+ 22	+ 5	+ 13
6	München-Wendelstein	− 3	− 17	+ 4	+ 12	+ 14	+ 8
7	Aufkirchen-Wendelstein	0	− 17	− 4	+ 12	+ 17	+ 4
8	Mitbach-Wendelstein	− 6	− 17	− 6	+ 12	+ 11	+ 3
9	Asten-Hochgern	− 10	− 20	− 11	− 1	+ 10	− 6

Den Punkten der Landesvermessung kommen mittlere Koordinatenfehler von ± 20 bis ± 25 cm zu, den Punkten der südbayerischen Dreieckskette solche von ± 42 mm; die mittleren Winkelfehler sind aus der Netzausgleichung für die Landesvermessung zu ± 2.″45 und für die südbayerische Dreieckskette zu ± 0.″82 erhalten worden.

Die in der vorstehenden Tabelle angegebenen Restfehler der Punkte der Landesvermessung entsprechen der Lageänderung dieser Punkte bis zur Zeit ihrer Neubestimmung durch die Messung der südbayerischen Dreieckskette und können durch die oben bereits angedeuteten tektonischen Erdkrustenbewegungen im oberbayerischen Voralpengebiet erklärt werden. Sie stehen offenbar mit den eingangs erwähnten regionalen Höhenänderungen in ursächlichem Zusammenhang.

Als wichtiges Beweismittel für die erwähnten Lageände-

rungen von Dreieckspunkten können auch die in den Jahren 1887 bis 1893 auf einigen Punkten des bayer. Hauptdreiecksnetzes durch den damaligen Observator der Bayer. Erdmessungskommission, Dr. K. Oertel ausgeführten astronomisch-geodätischen Ortsbestimmungen dienen, deren Ergebnisse in den „Astronomisch-Geodätischen Arbeiten" der Bayerischen Erdmessungskommission Heft 3, 4, 5 veröffentlicht sind.

Oertel hat die geodätische Lage seiner Stationspunkte aus den Koordinaten der zunächst liegenden Hauptdreieckspunkte mit Hilfe der von ihm bis auf $\pm 0.^{s}5$ genau beobachteten astronomischen Azimute durch Rückwärtseinschneiden abgeleitet und dabei die beobachteten Richtungen rechnerisch derart verbessert, daß sie sich im Standort schneiden und durch die als unverändert angenommenen Zielpunkte gehen, deren Koordinatenwerte der bayerischen Landesvermessung entnommen sind.

Durch diese Verbesserungen sind die Winkelmessungen der Lage der Ausgangspunkte zur Zeit der Ausführung der Landesvermessung angepaßt worden. Die für die Standorte berechneten Koordinatenwerte entsprechen somit der Lage der Punkte zur Zeit der Ausführung der Landesvermessung in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts. Wenn nun seitdem Lageänderungen dieser Standorte infolge von Erdkrustenbewegungen eingetreten sein sollten, so müßten diese durch Abweichungen der Koordinaten der Landesvermessung von den für die Punkte der südbayerischen Dreieckskette neu berechneten Koordinatenwerten bemerkbar werden, wie das in der umstehenden Zusammenstellung in der Tat der Fall ist.

Die größeren Werte dieser Abweichungen gegenüber den oben angeführten Koordinaten-Restfehlern erklären sich dadurch, daß dort durch die Netzeinpassung, aus welcher die Koordinaten-Restfehler berechnet sind, die ursprünglichen Koordinaten der Landesvermessung bereits Verbesserungen erfahren haben, welche die Abweichungen der Koordinaten der Dreieckskette vermindern. Die größten Koordinatenabweichungen finden sich in beiden die Lageänderungen der Hauptnetzpunkte enthaltenden Tabellen zwischen München und dem Bodenseegebiet,

Lageänderungen von Hauptnetzpunkten in Südbayern.

Nr.	Standorte	Koordinaten der Landesvermessung von 1854	Mittlere Fehler	Koordinaten der südbayer. Dreiecks-kette von 1903/04	Mittlere Fehler	Lageänderung	$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$
		m	m	m	m	m	m
1	Aenger	$x = -$ 45909,16	$\pm$ 0,06	$-$ 45909,40	$\pm$ 0,04	$\Delta x = -$ 0,24	$\Delta s =$ 1,01
		$y = +$ 106021,60	$\pm$ 0,05	$+$ 106022,59	„	$\Delta y = +$ 0,99	
2	Grünten	$x = -$ 64145,84	$\pm$ 0,01	$-$ 64146,37	„	$\Delta x = -$ 0,53	$\Delta s =$ 1,05
		$y = +$ 94295,52	$\pm$ 0,02	$+$ 94296,45	„	$\Delta y = +$ 0,93	
3	Peißenberg	$x = -$ 37406,93	$\pm$ 0,01	$-$ 37407,17	„	$\Delta x = -$ 0,24	$\Delta s =$ 0,54
		$y = +$ 41984,87	$\pm$ 0,08	$+$ 41985,35	„	$\Delta y = +$ 0,48	
4	Wendelstein	$x = -$ 48294,69	$\pm$ 0,15	$-$ 48294,36	„	$\Delta x = +$ 0,30	$\Delta s =$ 0,43
		$y = -$ 32962,46	$\pm$ 0,12	$-$ 32965,15	„	$\Delta y = +$ 0.31	
5	Kammer	$x = -$ 23083,27	$\pm$ 0,11	$-$ 23083,33	$\pm$ 0,06	$\Delta x = -$ 0,06	$\Delta s =$ 0,14
		$y = -$ 80874,31	$\pm$ 0,06	$-$ 80874,44	$\pm$ 0,23	$\Delta y = -$ 0.13	

während östlich von der Linie Mitbach-Wendelstein diese Änderungen unter die Werte der mittleren Koordinatenfehler herabgehen. Letzteres gilt insbesondere auch für die astronomische Station Kammer, bei welcher die Bruchlinie von Laufen in einem Abstand von nur 10 km südlich vorüberstreicht. Die Lage dieses in die Koordinatenberechnung der südbayerischen Dreieckskette nicht einbezogenen Punktes ist im Sommer 1918 gegen dieselben 6 Ausgangspunkte der Landesvermessung wie im Jahre 1886 durch Winkelmessungen mit einem Mikroskoptheodolit von Hildebrand von 23 cm Kreisdurchmesser in 6 Kreisstellungen mit je 24 Doppeleinstellungen jeder Zielrichtung neu bestimmt worden.

Die Ergebnisse dieser Messungen sind mit den im Jahre 1886 auf dem gleichen Stationspunkt aus Azimutmessungen des Polaris abgeleiteten Richtungen nach den gleichen Zielpunkten in der nachstehenden Stationstafel zusammengestellt und haben zu einer Neuberechnung der Koordinaten desselben Standortes gedient, der auch im Jahre 1886 zur Aufstellung des astronomischen Universalinstruments benützt wurde.

Stationstafel Kammer.

Nr.	Zielrichtungen	Entfernung km	Beobachtet im Jahre 1886	Unterschied	Beobachtet im Jahre 1918	Restfehler
1	Wendelstein	54,13	$0^0\ 0'\ 0'' \pm 0''.26$	00	$0^0\ 0'\ 0'' \pm 0''.48$	$0''.00$
2	Schnaitsee	26,65	$64\ 21\ 12,11 \pm 0,32$	$+ 0,26$	$64\ 21'\ 12,37 \pm 0,40$	$- 1,03$
3	Oberweißenkirchen	4,64	96 00 29,75 —	$- 4,54$	96 00 25,21 —	$+ 2,29$
4	Hochstauffen	22,35	$264\ 44\ 35,41 \pm 0,38$	$- 2,24$	$264\ 44\ 33,17 \pm 0,20$	$+ 0,27$
5	Hochfelln	19,56	$318\ 31\ 59,82 \pm 1,51$	$- 2,33$	$318\ 31\ 57,49 \pm 0,35$	$+ 0,03$
6	Hochgern	22,04	$325\ 04\ 15,80 \pm 0,68$	$- 1,47$	$325\ 04\ 14,33 \pm 0,30$	$- 0,81$

Die Richtungen nach den einzelnen Dreieckspunkten sind bei den Beobachtungen beider Jahre auf den nächstliegenden Hauptdreieckspunkt Oberweißenkirchen als Nullrichtung be-

zogen, nunmehr aber auf den entferntesten Zielpunkt Wendelstein, der durch Heliotropenlicht sichtbar gemacht war, umgerechnet worden, um den schädlichen Einfluß kleiner Lageänderungen der schlanken Turmspitze von Oberweißenkirchen auf die Winkelmessung möglichst auszuschalten. Für die Azimutmessungen im Jahre 1886 ergeben sich mittlere Winkelfehler von $\pm$ 0.″52, bei den Winkelmessungen im Jahre 1918 solche von $\pm$ 0.″30.

Die Unterschiede der auf Wendelstein als Nullrichtung bezogenen Messungen beider Beobachtungsreihen ergeben, wie ein Blick auf die Stationstafel zeigt, Beträge bis zu 4.″5 und mit einer einzigen Ausnahme negative Vorzeichen, wodurch eine Lageänderung des Stationspunktes in der zwischen beiden Beobachtungsreihen liegenden Zeit deutlich zum Ausdruck kommt. Die neu ausgeführte Koordinatenberechnung und Ausgleichung ergab den Betrag dieser Lageänderung zu

$$\Delta x = -0{,}06 \pm 0{,}08 \text{ m}$$
$$\Delta y = -0{,}13 \pm 0{,}23 \text{ m}.$$

Durch die große Unsicherheit der Ordinatenänderung von $\pm$ 0,23 m kommt hiebei die seit der Zeit der Ausführung der Landesvermessung eingetretene und für die einzelnen Punkte offenbar verschiedene Lageänderung der Ausgangspunkte in der Ostwestrichtung deutlich zum Ausdruck.

Reduziert man die Beobachtungen vom Jahre 1886 auf den durch die neu berechneten Koordinaten bestimmten Standort vom Jahre 1918, der in seiner natürlichen Lage mit jenem vom Jahre 1886 identisch ist, so verschwinden die einseitigen Richtungsunterschiede und es verbleiben nur geringe Restfehler mit verschiedenen Vorzeichen, deren Größe lediglich für den nächstliegenden Zielpunkt Oberweißenkirchen den beträchtlichen Wert von + 2.″29 zeigt. Bei dem geringen Abstand des Zielpunktes von 4,6 km entspricht diesem Wert nur eine lineare Abweichung von 5,1 cm, die sich durch eine mit der Zeit wahrscheinlich eingetretene Lageänderung der hohen und schlanken Turmspitze erklärt.

Die geringe Verschiebung des Stationspunktes Kammer, die durch die Ordinatenänderung von $\Delta y = -0{,}13$ m ihren Ausdruck findet, liegt indessen noch innerhalb der mittleren Unsicherheit von $\pm 0{,}23$ m, die auch den Koordinaten der Ausgangspunkte zukommt und kann deshalb wohl nicht zum zuverlässigen Nachweis einer Lageänderung des Stationspunktes Kammer infolge tektonischer Erdkrustenbewegungen dienen, wie sie sich westlich der Linie Mitbach-Wendelstein gegen den Bodensee hin durch die Lageänderung von Hauptdreieckspunkten bis zum Betrag von 1 m bemerkbar gemacht haben.

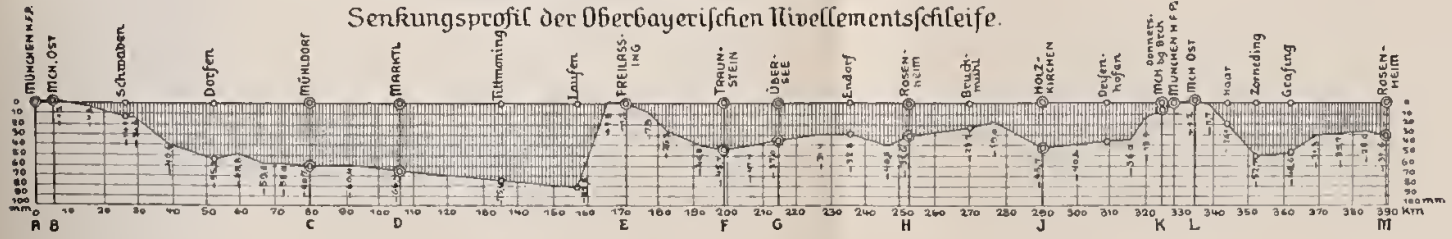
Nachtrag. Tektonische Erdkrustenbewegungen von 1 m Größe, wie sie aus den Koordinatenänderungen der Dreieckspunkte Aenger und Grünten hervorgehen, sind in jüngster Zeit infolge von Erderschütterungen in der 30 km südlich vom Grünten gelegenen Hornbachkette beobachtet worden.

Die Tagesblätter berichten hierüber folgendes:

Erdbeben. Der Seismograph der Münchener Sternwarte verzeichnete am 26. September, 1.17 Uhr nachts, ein Nahbeben in südwestlicher Richtung in einer Entfernung von etwa 140 Kilometer. Der Herd des Bebens war vermutlich Vorarlberg. Nach den eingelaufenen Berichten wurde die Erschütterung hauptsächlich im südlichen Teil des Allgäu verspürt; in München wurde sie nicht weiter wahrgenommen. Nach einer Meldung aus Immenstadt war das Erdbeben so stark, daß eine in der Kemptener Hütte nächtigende Gruppe württembergischer Jäger durch drei scharfe Stöße gerüttelt wurde, während um das Haus ein Poltern und Heulen losging. An vielen Stellen stürzten Felstrümmer nieder. In der gegen Osten sich anschließenden Hornbachkette spalteten sich zwischen der Hermannskarspitze und dem Hermannskarturm die Felsen. Dort gähnt eine 70 bis 80 Meter tiefe Kluft in einer Breite von fast 1 Meter. (Münchener N. N., 2. Okt. 1918, Morgenausgabe.)

Hiedurch erhält die Annahme, daß die auch an östlicher gelegenen Punkten der Alpen, wie am Watzmann und Rettenstein beobachteten Lageänderungen von Dreieckspunkten auf tektonische Vorgänge zurückzuführen sind, eine neue augenfällige Bestätigung.

Regionale Senkungsstufen des oberbayerischen Alpenvorlandes.
Kalkzone
Flyschzone
Molasse
Dorfen
MÜHLDORF
MAAKTL
371,410
413,423
450,933
509,902
Schwaben
Milbach
MÜNCHEN
514.670
O.Bh
532,947
543,333
Haar
Verwerfung
Zorneding
559,191
543,998
Grafing
596,985
Deisenhofen
Wasserburg
482,473
Schnaitsee
462,150
GARCHING
Asten
Tittmoning
389.559
Troßberg
Oberweißenkirchen
Hammer
LAUFEN
406,473
526,920
Endorf
685,399
HOLZKIRCHEN
Bruckmühl
513,768
450,474
ROSENHEIM
TAAUNSTEIN
599,157
ÜBERSEE
528,371
FREILASSING
423,307
Hochgern
Hohen Stauffen
Wendelstein
N
W
O
S
10 5 0 10 20 30 km


Senkungsprofil der Oberbayerischen Nivellementsschleife.
MÜNCHEN H.F.P.
MCH. OST
Schwaben
Dorfen
MÜHLDORF
MAAKTL
Tittmoning
Laufen
FREILASSING
TRAUNSTEIN
ÜBERSEE
Endorf
ROSENHEIM
Bruckmühl
HOLZKIRCHEN
Deisenhofen
MCH. OSTBAHNH.
MÜNCHEN H.F.P.
MCH. OST
Haar
Zorneding
Grafing
ROSENHEIM
A B C D E F G H J K L M
Km

Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen

(nach Ideen von Boltzmann und Jacobi).

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juli 1918.

§ 1. Boltzmanns „Beweis" für das Dirichletsche Prinzip.

1. Der Ansatz von Boltzmann und seine Bedeutung. Ludwig Boltzmann hat in München im Wintersemester 1892/1893 eine Vorlesung über das mechanische Potential gehalten, die nach dem tragischen Ende des Forschers in dankenswerter Weise von seinem Schüler, dem Astronomen Hugo Buchholz verarbeitet worden ist[1]). Einen Glanzpunkt erblickt der Bearbeiter in der Behandlung, die Boltzmann dem Dirichletschen Prinzip zu teil werden ließ; es sieht hier einen „neuen Beweis" des Prinzips und ruft den „reinen" Mathematiker herbei, um die Frage in diesem Sinne weiter zu behandeln.

Ungehört, so scheint es, ist dieser Ruf verklungen; ja, man berichtet, daß maßgebende Forscher den eingeschlagenen Weg für durchaus ungeeignet erachten, zu einem neuen strengen Beweis zu gelangen. Wir werden dazu unten (§ 2, 2) Stellung nehmen, dürfen uns im übrigen darauf berufen, daß angesichts der von C. Neumann, H. A. Schwarz, Poincaré und Hilbert gegebenen Beweise ein neuer Beweis wohl kaum als Bedürfnis

[1]) Hugo Buchholz, Das mechanische Potential nach Vorlesungen von L. Boltzmann und die Theorie der Figur der Erde. Leipzig 1908. (Insbesondere S. VIII und Kap. VIII, S. 150—176.)

empfunden wird. Wir wollen dahin gestellt sein lassen, ob in diesem Sinne — „dabei überhaupt gar nichts herauskommt", neigen aber zu einer milderen Auffassung.

Jedenfalls läßt sich Boltzmanns Idee *und darin dürfte ihr unbestreitbarer bleibender Wert liegen* — zu einer praktisch durchführbaren angenäherten Lösung der Randwertaufgabe ausbauen, die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt und wohl verdient, neben dem Verfahren von Runge[1]) in den Dienst der angewandten Mathematik gestellt zu werden.

Boltzmann ersetzt die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

durch die Differenzengleichung

$$D_2 u \equiv u(x-\varepsilon, y) + u(x+\varepsilon, y) + u(x, y-\varepsilon) + u(x, y+\varepsilon) - 4u(x, y) = 0,$$

und er kann dann die (erste) Randwertaufgabe zunächst für ein Quadrat angenähert in folgender Weise lösen: Das Quadrat wird durch äquidistante Parallelen zu den Seiten in ein Netz von n^2 Quadraten zerlegt, so daß ein Gitter von $(n-1)^2$ inneren Punkten und 4 $(n-1)$ Randpunkten entsteht — die vier Eckpunkte spielen zunächst keine Rolle. Zur Bestimmung der Werte u_{ik} der Lösung der Differenzengleichung dienen dann die $(n-1)^2$ Gleichungen, die der Forderung Ausdruck verleihen, daß — gemäß der Differenzengleichung — u_{ik} gleich

[1]) Das Gebiet der numerischen und graphischen Integration ist im Artikel II C 2 der math. Enzyklopädie (Runge und Willers) ausführlich dargestellt. In Betracht kommen hier vor allem die in Kap. III (Graphische und numerische Integration partieller Differentialgleichungen) besprochenen Arbeiten von Runge selbst (Fußnote 529, S. 165, 549, S. 173) und seinem inzwischen auf dem Felde der Ehre gefallenen Schüler Rottsieper, endlich die umfangreiche Arbeit von Richardson (Fußnote 548, S. 173). Auf die letztgenannte: Approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems (London R. S. Philos. Trans. A 210 (1910), p. 507—537) kommen wir noch zu sprechen (§ 3, 3), weil sie trotz gänzlich verschiedener Methode doch von allen genannten die engste Berührung mit unseren Darlegungen zeigt.

dem arithmetischen Mittel der Werte in den vier benachbarten Gitterpunkten sein soll; die 4 $(n-1)$ Werte am Rand sind gegeben. Man erhält dann die u_{ik} durch Auflösung dieser Gleichungen.

Ob sich der Grenzübergang für $n = \infty$ unmittelbar durchführen läßt, zu dieser Frage nehmen wir noch Stellung, unsere Hauptfrage ist: *Wie kann man die Differenzengleichung auflösen?*

2. Eine Reihe von Fragen. Wir haben, der durch Boltzmann (bzw. Buchholz) gegebenen Anregung folgend, eine Reihe von Aufgaben zu besprechen, die wir hier getrennt aufzählen.

1. Unmittelbare Bestimmung der Werte der Gitterfunktion durch Auflösung der Differenzengleichung für $n = 2, 3, 4 \ldots$ — Es zeigt sich, wie zu erwarten, bald eine Schranke, an der die Rechenfreudigkeit erlahmt.

2. *Angenäherte* Auflösung der Differenzengleichung und Nachweis der Konvergenz gegen die strenge Auflösung. Hierzu gab ein gelegentlich von Jacobi verwendeter Gedanke den Anlaß[1]); die Erinnerung an diese Überlegungen erst war es, *die die praktische Durchführung von Boltzmanns Idee möglich machte.*

3. Änderung des Gebietes: An Stelle des Quadrats können andere einfach zusammenhängende Gebiete der Ebene treten, die etwa durch einen Treppenpolygonzug oder, allgemein zu reden, durch eine gezeichnet vorliegende Kurve begrenzt sind.

4. Ersetzung des rechtwinkligen Parallelkoordinatennetzes durch andere isotherme Koordinaten, die der Randform angepaßt sind. Insbesondere kommt das von Runge mit bestem Erfolg verwendete Netz isotherm geteilter Polarkoordinaten in Betracht.

5. Anwendung auf die konforme Abbildung des Inneren eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf das Kreisinnere.

---

[1]) Jacobi gibt an, wie man lineare Gleichungen, deren unmittelbare Lösung unbequem ist, einem iterierenden Approximationsverfahren zugänglich machen kann (Ges. Werke III (Berlin 1884), S. 467—478). In erster Linie denkt Jacobi an die Normalgleichungen der Methode der kleinsten Quadrate.

Ist — durch eine eigentümliche aufs engste mit den jetzt so viel genannten „Verzerrungssätzen“ zusammenhängende Methode — diese Abbildung einmal geleistet, so ist damit (wovon auch Runge Gebrauch macht) die Randwertaufgabe für dieses Gebiet auf die Randwertaufgabe für den Kreis zurückgeführt. Wir werden weiter gehen und zeigen, wie man ein schlichtes, von einer äußeren und einer inneren Randkurve begrenztes Gebiet der Ebene konform auf das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen abbilden kann. Diese Aufgabe, bei der bekanntlich nur der Radius des einen Kreises willkürlich gewählt werden kann, hat auch eine hervorragende praktische Bedeutung für die Bestimmung des Auftriebs von Zweideckern[1]).

6. Ansatz für die Lösung der Randwertaufgabe im Raum, auf die Buchholz (später Richardson) in diesem naheliegenden Zusammenhang hingewiesen hat. Mit gehöriger Geduld wird auch das „ungelöste Problem Dirichlets“, die Lösung der Randwertaufgabe für den Würfel, der wirklichen Berechnung zugänglich. Freilich, zu geschlossenen Ausdrücken, die sich aus bekannten Funktionen und Operationssymbolen zusammensetzen, gelangt man von den Differenzengleichungen aus nicht. Aber es läßt sich z. B. die Temperaturverteilung im Innern eines Berges bei gegebenen Oberflächenwerten, dieses in der Literatur über Tunnelbau vielfach behandelte Problem, auf diesem Wege angreifen. Nebenbei bemerkt: Tabellarische Lösung, das war doch ursprünglich einer der Endzwecke analytischer Untersuchungen, und, wo die Zurückführung auf „bekannte Funktionen“ — also bekannte Tabellen — nicht gelingt, da setzt eben die angewandte Mathematik ein, die in jedem Fall den Weg zur unmittelbaren Tabulierung sucht.

Am geeignetsten wäre für das zu beschreibende Verfahren die Bezeichnung: *Methode des arithmetischen Mittels.* Da sie aber durch die grundlegenden Forschungen von C. Neumann

[1]) Die Kutta-Joukowski-Theorie des Auftriebs eines Tragflächenprofils (diese Berichte 1910 und 1911) erfordert die Ermittelung konformer Abbildungen. Vgl. auch v. Mises, Z. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, S. 157 ff. — Vgl. auch unten § 4, 3.

bereits in anderer Bedeutung festgelegt ist, so wählen wir das Wort *Ermittelung*, das den Gang der Rechnung vollkommen wiedergibt.

§ 2. Die direkte Lösung des Gitterproblems.

1. Die Randwertaufgabe für Quadrat, Rechteck und Würfel. Eine erste ganz rohe Annäherung für die Lösung der Randwertaufgabe beim Quadrat, zugleich die exakte Lösung der Differenzengleichung, oder, wie wir anschaulicher sagen wollen, des *Gitterproblems* für $n = 2$ beim Quadrat wäre, daß man dem Mittelpunkt des Quadrates, als Funktionswert das arithmetische Mittel der vier für die Mittelpunkte der Seiten vorgeschriebenen Werte zuweist.

Wir wollen noch die Ergebnisse für $n = 4$ (neun Punkte im Innern) und $n = 6$ (25 Punkte im Innern) mitteilen, teils in Form einer Tabelle der *Gewichte*, teils in Form einer Tabelle der *Koeffizienten* der Randwerte.

Für $n = 4$ geben die folgenden Tabellen die Gewichte

	1	2	1	
1	.	.	.	1
2	.	u_{22}	.	2
1	.	.	.	1
	1	2	1	

$[p] = 16$

	11	37	11	
11	.	u_{12}	.	11
7	.	.	.	7
3	.	.	.	3
	3	5	3	

$[p] = 112$

	67	22	7	
67	u_{11}	.	.	7
22	.	.	.	6
7	.	.	.	3
	7	6	3	

$[p] = 224$

Sie drücken aus, mit welchen Gewichten die 12 Werte am Rande zu versehen sind, um den betreffenden Wert der Gitterfunktion zu berechnen. Man hat also, um das gewünschte

u_{ik} zu erhalten, die Summe der Funktionswerte in den Randpunkten des Gitters, jedes Glied multipliziert mit seinem Gewicht, zu bilden und dann durch die betreffende Gewichtsumme $[p]$ zu teilen. Das folgende einfache Beispiel mit den Randwerten 1, 2, 3 und 4

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & a_{01}=1 & & a_{02}=1 & & a_{03}=1 & & \\
a_{10}=4 & u_{11}=\frac{35}{14}=2{,}50 & & u_{12}=\frac{109}{56}=1{,}95 & & u_{13}=\frac{25}{14}=1{,}79 & & a_{14}=2 \\
a_{20}=4 & u_{21}=\frac{171}{56}=3{,}05 & & u_{22}=\frac{5}{2}=2{,}50 & & u_{23}=\frac{123}{56}=2{,}20 & & a_{24}=2 \\
a_{30}=4 & u_{31}=\frac{45}{14}=3{,}21 & & u_{32}=\frac{157}{56}=2{,}80 & & u_{33}=\frac{35}{14}=2{,}50 & & a_{24}=2 \\
 & & a_{41}=3 & & a_{42}=3 & & a_{43}=3 & &
\end{array}$$

wird ohne weiteres verständlich sein, wenn auch die ersten Zwischenrechnungen fortgelassen sind.

Für $n=6$, also bei 25 inneren Gitterpunkten, steigt die Gewichtsumme — nachdem selbstverständlich die Gewichte so gewählt sind, daß sie keinen gemeinsamen Teiler mehr haben — im ungünstigsten Fall u_{12} immerhin schon auf 102960 an.

	3	6	8	6	3	
3	.	.	.	.	.	3
6	.	.	.	.	.	6
8	.	.	u_{33}	.	.	8
6	.	.	.	.	.	6
3	.	.	.	.	.	3
	3	6	8	6	3	

$$[p]=104$$

Es mag daher genügen, die Gewichtstabelle nur für den Mittelpunkt (u_{33}) anzugeben, im übrigen aber nur die Koeffizienten, also die Gewichte dividiert durch die Gewichtsumme $[p]$ auf vier Dezimalen, hier mitzuteilen. Die jeweils wegen der Symmetrie von selbst mitgegebenen Koeffizienten brauchen nicht nochmals geschrieben zu werden. Wir schreiben sie in der Folge an, daß wir zunächst mit dem Koeffizienten von a_{01}

beginnen und dann den Rand des Quadrats im Sinne des Uhrzeigers umlaufen.

Für u_{11}: 0,3012, 0,1035, 0,0402, 0,0169, 0,0064;
0,0064, 0,0088, 0,0079, 0,0055, 0,0027.

Für u_{22}: 0,0720, 0,1439, 0,0928, 0,0492, 0,0208;
0,0208, 0,0341, 0,0322, 0,0227, 0,0114.

Für u_{33}: 0,02885, 0,0577, 0,0769 usw.

Bei den Koeffiziententabellen für u_{13} und u_{23} beginnen wir mit dem Koeffizienten von a_{03} und enden mit dem von a_{53}. Es kommt

Für u_{13}: 0,3483, 0,1203, 0,0402;
0,0402, 0,0405, 0,0288, 0,0172, 0,0079;
0,0079, 0,0143, 0,0170.

Für u_{23}: 0,1527, 0,0928, 0,0405;
0,0405, 0,0690, 0,0577, 0,0367, 0,0172;
0,0172, 0,0322, 0,0396.

Die Koeffiziententabelle für u_{12} endlich zeigt gar keine Symmetrie mehr, ist daher vollständig anzuschreiben.

Für u_{12}: 0,1035, 0,3420, 0,1203, 0,0466, 0,0169;
0,0169, 0,0208, 0,0172, 0,0114, 0,0055;
0,0055, 0,0106, 0,0143, 0,0143, 0,0088;
0,0088, 0,0208, 0,0404, 0,0720, 0,1035.

Der Koeffizient des dem betreffenden u_{ik} nächsten Randpunktes wurde jedesmal unterstrichen, er hat immer den größten Wert in der Reihe; die Koeffizienten nehmen selbstverständlich mit zunehmender Entfernung von Gitterpunkt und Randpunkt ab.

Ob man auf diesem Wege zu einem Gesetz gelangt, mag dahingestellt bleiben; jedenfalls gelangt man bald zu einem Bild des Verlaufes, das für viele praktische Zwecke eine ausreichende Orientierung gibt.

Beiläufig seien noch einige Bemerkungen über *Rechteck* und *Würfel* gestattet. Bei dem Rechteck mit $3 \cdot 7 = 21$ inneren Gitterpunkten steigt die Gewichtsumme schon auf 161 352 128 an![1]) Die Rechnung wurde durch Anwendung eines *Verschmelzungsverfahrens* durchgeführt, das Verwandtschaft mit den Methoden der Potentialtheorie zeigt: Man legt zwei Quadrate, die je neun innere Gitterpunkte aufweisen, so aneinander, daß die rechte Seite des ersten mit der linken des zweiten zusammenfällt, drückt dann die neun Werte

$$u_{ik} \ (i = 1, 2, 3; \ k = 1, 2, 3)$$

und die neun Werte

$$u_{ik} \ (i = 1, 2, 3; \ k = 5, 6, 7)$$

durch die vorgeschriebenen Randwerte auf der linken und rechten Hälfte des Rechtecks aus und die unbekannten $u_{14}\ u_{24}\ u_{34}$ auf der mittleren Vertikalen. Nimmt man dann noch die drei Gleichungen hinzu, die aus dem Verbindungsstück

$$\begin{array}{ccc} . & a_{14} & . \\ u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ . & a_{44} & . \end{array}$$

entstehen, also die Gleichungen, die aus den Gewichtstabellen

$$\begin{array}{ccc} & 15 & \\ 15 & u_{14} & 15 \\ 4 & . & 4 \\ 1 & . & 1 \\ & 1 & \\ [p] = 56 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & . & 1 \\ 4 & u_{24} & 4 \\ 1 & . & 1 \\ & 1 & \\ [p] = 14 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & . & 1 \\ 4 & . & 4 \\ 15 & u_{34} & 15 \\ & 15 & \\ [p] = 56 & & \end{array}$$

abzulesen sind, so kann man die 21 Gleichungen lösen *mit Benützung früherer Ergebnisse.*

---

[1]) Zu ähnlichen Zahlenungetümen gelangt Runge bei der Integration von $\Delta u = \text{const}$ (Z. f. Math. u. Phys. 56 (1908), S. 225—233), wo 43 Unbekannte zu bestimmen waren.

Will man allgemein die Koeffizienten einer durch Verschmelzung zweier Figuren entstehenden Figur bestimmen, so ist dabei ein mißlicher Umstand zu beachten: Es ist schwer, die vorzuschreibende Genauigkeit für die Koeffizienten der Teilfiguren und des Verschmelzungsstreifens anzugeben, die erforderlich wäre, um bei der Gesamtfigur die Koeffizienten auf eine vorgeschriebene Anzahl von Dezimalen genau zu erhalten!

Endlich wollen wir noch ein Ergebnis für den *Würfel* anführen bei 125 inneren Gitterpunkten, also 25 Punkten auf jeder Seitenfläche. Im Raum hat man die Differentialgleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

zu ersetzen durch die Differenzengleichung

$$D_2 u \equiv u(x-\varepsilon, y, z) + u(x+\varepsilon, y, z) + u(x, y-\varepsilon, z) + u(x, y+\varepsilon, z) + u(x, y, z-\varepsilon) + u(x, y, z+\varepsilon) - 6\,u(x, y, z) = 0$$

und man erhält in dem betrachteten Fall, wenn man den Wert der Gitterfunktion im Mittelpunkt berechnen will, auf jeder Seitenfläche dieselbe, selbstverständlich wieder in sich symmetrische Gewichtstabelle

5	10	13	10	5
10	21	29	21	10
13	29	44	29	13
10	21	29	21	10
5	10	13	10	5

die auch wieder die überall erkennbare qualitative Verteilung mit Gewichtsmaximum bei dem Punkt der Berandung scharf hervortreten läßt, der dem inneren Gitterpunkt — hier also dem Mittelpunkt des Würfels — am nächsten liegt. Die Gewichtsumme ist hier

$$6 \cdot \{44 + 4(29 + 21 + 13 + 5) + 8 \cdot 10\} = 2376.$$

2. Die Konvergenz der Gitterfunktion gegen die harmonische Funktion. Wir glauben, mit dem rauhen Urteil beginnen zu müssen, daß eine *allgemein gehaltene* Untersuchung der Konvergenz der Gitterfunktion gegen die gesuchte

harmonische Funktion keinen Wert hat, so fest wir überzeugt sind, daß diese Konvergenz bei zunehmender Verdichtung des Gitters und Entnahme der vorzuschreibenden Werte der Gitterfunktion in den Randpunkten aus dem Werteverrat der am Rande vorgeschriebenen, im Innern zu bestimmenden harmonischen Funktion eben gegen diese Funktion hin sehr gut fortschreitet. Gewiß, man kann sehr wohl eine Schätzung vornehmen, bei der man die Gitterfunktion zerlegt in die harmonische, vermehrt um ein Restglied, dessen einer Faktor die dritte Potenz der Intervallgröße ε ist, während der andere durch ein mit Zahlenkoeffizienten versehenes Aggregat aus den Mittelwerten der dritten partiellen Differentialquotienten gegeben ist[1]). Aber diese dritten Differentialquotienten werden ja nur unter sehr engen Voraussetzungen im *ganzen Innern* innerhalb endlicher Schranken bleiben! Dieses schwere Bedenken gegen eine *gleichmäßige* Restschätzung ließe sich ja zum Teil durch die Überlegung besänftigen, daß man bei n^2 Punkten im Innern (n eine *gegebene* Zahl) doch niemals in die Nähe des kritischen Randes kommt, wo die Endlichkeit der Differentialquotienten aufhört.

Jedenfalls ist die Konvergenz der Gitterfunktion gegen die — *als existierend vorausgesetzte* — Lösung der Randwertaufgabe durch eine allen Fällen gerecht werdende Methode nur schwer zu erweisen, und um so schlimmer scheint es zu stehen mit dem Versuch, gar erst aus der Gitterfunktion für limes $n = \infty$ die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe nachweisen zu wollen!

Viel günstiger scheinen die Dinge zu liegen, wenn man z. B. die Differentialgleichung

$$\Delta u = k^2 u$$

und die zugeordnete Differenzengleichung

$$D_2 u \equiv u(x-\varepsilon, y) + u(x+\varepsilon, y) + u(x, y-\varepsilon) + u(x, y+\varepsilon) - 4u(x, y) = \varepsilon^2 k^2 u(x, y)$$

betrachtet.

---

[1]) Ähnlich bei Richardson, a. a. O., p. 310.

Wenn man nämlich für $\Delta u = 0$ und $\Delta u = k^2 u$, vielmehr für die beiden zugeordneten Differenzengleichungen die fortschreitende Teilung in der Weise vornimmt ($n = 2, 4, 8, 16 \ldots$), daß jeder bei einer Teilung auftretende Gitterpunkt bei allen folgenden wieder vorkommt, so zeigt sich, daß die Werte

$$u(x, y) \cdots \left(x = \frac{\mu}{2^m}, \quad y = \frac{\nu}{2^m} \cdots \mu, \nu, m \text{ gegeben}\right)$$

der Lösung der ersten Differenzengleichung mit zunehmender Feinteilung des Netzes eine (selbstverständlich konvergente) nicht monotone Folge bilden, während diese Folge bei der allgemeineren Differenzengleichung von Anfang an monoton ist und jedenfalls auch bei anderen Beispielen von einer bestimmten Stelle an monoton wird. Wenn sich der monotone Charakter der Folge erweisen läßt, wird der Konvergenzbeweis gewiß leichter zu führen sein. So scheinen alle näheren Umstände darauf hinzudeuten, daß auf dem Wege über die Differenzengleichung die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe zuerst für die allgemeinere Differentialgleichung geführt werden kann und dann wohl auch durch Grenzübergang für $k = 0$. Es würde sich dann bei der „Ermittelungsmethode" Boltzmanns genau wiederholen, was C. Neumann für seine Methode des arithmetischen Mittels festgestellt hat[1]): daß sie nämlich bei von Null verschiedenem k leichter zum Existenzbeweis führt, als für $k = 0$.

So viel vorläufig über die Durchführung der Idee des Boltzmannschen „Existenzbeweises".

3. Ein Beispiel. Wieweit die Übereinstimmung zwischen Gitterfunktion und harmonischer Funktion „unter günstigen Umständen" gehen kann, zeigt das Beispiel der harmonischen Funktion

$$u(x, y) = \sin x \, \mathfrak{sh} \, y.$$

Berechnet man sie für die Gitterpunkte

$$x = \frac{k}{8}, \quad y = \frac{l}{8} \cdots (k, l = 0, 1, \ldots 8),$$

[1]) Siehe Math. Enc. II A 7 c: Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (Sommerfeld), Nr. 11.

so gilt die Differenzengleichung im Quadrat genau bis auf drei Einheiten der fünften Dezimalstellen! Einige wenige Zahlen dieses Beispiels wollen wir anführen.

Es ist

$$u(0, \tfrac{1}{2}) = u(\tfrac{1}{2}, 0) = u(1, 0) = u(0, 1) = 0$$
$$u(1, \tfrac{1}{2}) = 0{,}43848, \quad u(\tfrac{1}{2}, 1) = 0{,}56329,$$
$$u(1, 1) = 0{,}98889$$

und endlich

$$u(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0{,}24982.$$

Mit diesem wirklichen Wert ist der ganz roh gebildete Mittelwert

$$f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}(u(0, \tfrac{1}{2}) + u(\tfrac{1}{2}, 0) + u(1, \tfrac{1}{2}) + u(\tfrac{1}{2}, 1)) = 0{,}25405$$

schon in sehr guter Übereinstimmung.

Man kann das Mittel auch — durch Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\pi : 4$ — so bilden, daß man von den Ecken statt von den Seitenmitten ausgeht (*Diagonal-* oder *Quincunx*-Mittel) und erhält dann

$$\bar{f}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}(u(0, 0) + u(0, 1) + u(1, 0) + u(1, 1)) = 0{,}24722.$$

Noch näher kommt man dem richtigen Wert, wenn man die Näherungswerte mittelt mit Rücksicht auf ihre Gewichte, die jedenfalls den Abständen des Gitterpunktes $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ von den zur Mittelbildung herangezogenen (hier sehr weit entfernten) „Nachbarpunkten“ umgekehrt proportional anzusetzen sind. Man erhält dann in unserem Fall

$$\frac{\sqrt{2} f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) + 1 \cdot \bar{f}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})}{1 + \sqrt{2}} = 0{,}24980 \text{ (statt } 0{,}24982).$$

Dieses Beispiel legt nun den Gedankengang nahe, der zum Ziel führt: Sollte man nicht zur Berechnung der Gitterfunktion gelangen, indem man zunächst durch rohe Mittelung einen Wert für den Mittelpunkt des Quadrats gewinnt, dann unter Benützung dieses Wertes weiter rechnet usw.? Und kann man nicht ein auf diesem oder anderem Weg erhaltenes System von Rohwerten der Funktion für n^2 Gitterpunkte nachträglich *aus-*

gleichen, so daß man den gesuchten Werten, die ja durch direkte Auflösung von n^2 Gleichungen nur auf dem Wege langer und mühseliger Rechnung zu gewinnen wären, unbegrenzt näher kommt?

§ 3. Die Anwendung der Methode von Jacobi.

1. Die Gitterfunktion beim Quadrat. Es handelt sich um die Auflösung des Gleichungssystems

$$4u_{ik} = u_{i-1,k} + u_{i+1,k} + u_{i,k-1} + u_{i,k+1}$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n-1),$$

wobei die Randwerte

$$u_{0k} = a_{0k}, \quad u_{nk} = a_{nk}, \quad u_{i0} = a_{i0}, \quad u_{in} = a_{in}$$

als gegebene Zahlen zu betrachten sind. Die Gleichungen entstehen aus der Forderung, daß die Summe der Quadrate der Differenzen

$$\sum\sum\{(u_{i-1,k} - u_{i,k})^2 + (u_{i+1,k} - u_{i,k})^2 + (u_{i,k-1} - u_{i,k})^2 + (u_{i,k+1} - u_{i,k})^2\}$$

über alle inneren Punkte des Quadrats erstreckt, bei gegebenen Randwerten möglichst klein werden soll — das war der an sich sehr nahe liegende Gedanke von Boltzmann. Auf der andern Seite hat Jacobi an der oben erwähnten Stelle die approximative Auflösung der „Normalgleichungen" gelehrt, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt. *Da liegt es eigentlich auf der Hand, die Jacobische Methode auf die Boltzmannschen Differenzengleichungen anzuwenden.*

Wir beschreiben das Verfahren für unseren Zweck, eine Modifikation des Gedankens von Jacobi, und beweisen dann seine Konvergenz, die sehr einfach zu erbringen ist.

Wenn man (bei gegebenem n) zunächst irgend welche Rohwerte u_{ik}° den inneren Gitterpunkten zuordnet und dann die Werte der dem Rande nächsten inneren Reihen und Zeilen mit Hilfe der Differenzengleichung selbst ausgleicht, also die Rohwerte

$$u_{ik}^{0} \quad (i = 1;\ k = 1, \ldots n-1)$$
$$(i = n-1;\ k = 1, \ldots n-1)$$
$$(i = 1, \ldots n-1;\ k = 1)$$
$$(i = 1, \ldots n-1;\ k = n-1)$$

jeweils ersetzt durch

$$u'_{ik} = \tfrac{1}{4}(u^{0}_{i-1,k} + u^{0}_{i+1,k} + u^{0}_{i,k-1} + u^{0}_{i,k+1})$$

— die Randwerte sind fest gegeben — so wird dadurch die Gitterfunktion der ersten und letzten inneren Zeile und Reihe verbessert. Mit diesen verbesserten Werten und den Rohwerten der dritten und $(n-3)^{\text{ten}}$ Reihe und Zeile verbessert man die Werte in der zweiten und $(n-2)^{\text{ten}}$ Zeile und Reihe usw. Ist man bis zum innersten Quadrat vorgeschritten, so beginnt man aufs neue von außen her, rechnet bis zur Mitte durch usw.

Wir behaupten, daß die in dieser Weise verbesserten Werte in geometrischer Progression gegen die gesuchten Werte konvergieren.

Wir wissen, daß es bei gegebenen Randwerten eine einzige, wohl bestimmte Gitterfunktion gibt, welche die Differenzengleichung streng erfüllt und daher durch das Approximationsverfahren nicht mehr verändert wird. Diese strenge Lösung sei mit U bezeichnet, bzw. mit U_{ik}. Ist dann v_{ik} ein beliebiger Ansatz, aber mit richtigen Randwerten, so ist zu zeigen, daß die Methode, angewendet auf

$$u_{ik}^{0} = U_{ik} - v_{ik}$$

bei unbegrenzter Wiederholung die Werte dieser Gitterfunktion gegen Null konvergieren läßt.

Zum Beweis genügt es also völlig, wenn wir zeigen, daß *bei einheitlich vorgeschriebenen Randwerten Null* die nach dem angegebenen Verfahren verbesserten Werte nach Null konvergieren. Sei in diesem Falle $-M_1$ der kleinste negative und $+M_2$ der größte positive unter den willkürlich angenommenen Rohwerten, so liegen nach der ersten Verbesserung die Werte auf dem ersten inneren Ring von Gitterpunkten zwischen den Schranken

$$-\frac{3M_1}{4} \text{ und } +\frac{3M_2}{4}.$$

Verbessert man dann auf dem zweiten Innenring, so erhält man für die verbesserten Werte die Schranken

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{3M_1}{4}+3M_1\right)=-M_1\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

und

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3M_2}{4}+3M_2\right)=M_2\left(1-\frac{1}{16}\right)$$

Allgemein gelten für den k^{ten} Innenring die Schranken

$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}+3\right)M_1=-M_1\left(1-\frac{1}{4^k}\right)$$

und

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^{k-1}}+3\right)M_2=M_2\left(1-\frac{1}{4^k}\right)$$

Für den innersten Ring, der sich übrigens bei geradem n auf einen Punkt reduziert, erhält man also nach Durchführung der ersten Verbesserung von außen nach innen die Schranken

$$-M_1\left(\frac{1}{4^{n_1}}\right) \text{ und } M_2\left(1-\frac{1}{4^{n_1}}\right)\cdots n_1=\frac{n}{2} \text{ bzw. } \frac{n-1}{2}.$$

Auf jeden Fall liegen nach der ersten vollständig durchgeführten Verbesserung alle Werte zwischen den Schranken

$$-M_1\,a \text{ und } M_2\,a,$$

wobei a ein echter Bruch ist. Die nächste Verbesserung verringert die Schranken auf

$$-M_1\,a^2 \text{ und } M_2\,a^2,$$

und damit tritt die Konvergenz klar zu Tage, die selbstverständlich viel rascher fortschreitet, als dieses äußerst rohe Abschätzungsverfahren angibt.

Wie aber hat man die ersten Rohwerte zu wählen? Auf diese Frage gibt das Beispiel § 2, 3 die Antwort. Im Falle $n=4$, wobei sich auf Grund der Gewichtstabelle (§ 2, 1) übrigens die Rechnung noch leicht direkt durchführen ließe, setzt man zuerst

$$u_{22}^0=\tfrac{1}{4}(a_{02}+a_{20}+a_{42}+a_{24}),$$

dann berechnet man auf den Diagonalschnittpunkten der vier Teilquadrate

$$u_{11}^0 = \tfrac{1}{4}(a_{00} + a_{02} + a_{20} + u_{22}^0)$$

usw., sodann

$$u_{12}^0 = \tfrac{1}{4}(a_{02} + u_{11}^0 + u_{13}^0 + u_{22}^0)$$

usw. und schließlich gleicht man aus, jeweils mit Benützung der nächsten Nachbarwerte. Man kann aber mit der vorläufigen Interpolation auch ohne Schaden noch einige Schritte weiter gehen, also von $n = 4$ zu $n = 8, 16 \ldots$ fortschreiten, ohne sich weit von den wirklichen gesuchten Werten zu entfernen. So wurde z. B. das oben § 2, 3 besprochene Beispiel behandelt, das nach dieser Methode auf vier Dezimalen berechnet, bei fünfmaliger Durchrechnung Übereinstimmung bis auf 2 Einheiten dieser Dezimale ergab.

Selbstverständlich erleichtern Symmetrieeigenschaften der zu berechnenden Funktion die Feinteilung sehr. Ist z. B. auf einem Quadrat als Randwert $+1$ für das eine Paar, -1 für das andere Paar von Gegenseiten vorgeschrieben, so ist auf der Diagonale die gesuchte Funktion Null und es genügt die Berechnung für einen Oktanten, wofür man in sehr kurzer Zeit die Tabelle findet:

0,789 0,784 0,766 0,733 0,677 0,579 0,395 0
0,591 0,581 0,549 0,490 0,395 0,243 0
0,414 0,401 0,359 0,285 0,170 0
0,266 0,251 0,205 0,122 0
0,150 0,133 0,084 0
0,066 0,050 0
0,016 0
0

die für $15^2 = 225$ innere Punkte ausreicht. Die starke Änderung in der Ecke erklärt sich aus der Unstetigkeit des von $+1$ zu -1 springenden vorgeschriebenen Wertverlaufes am Rande. Übrigens ist hier leicht durch nahe liegende Hilfsmittel der Funktionentheorie nachzuhelfen, die bei allen derartigen Aufgaben zur Verfügung stehen. Bezeichnet man den

Winkel, den ein von der Ecke ausgehender Strahl mit der oberen Quadratseite einschließt, durch φ, so ist in der Nähe der Ecke

$$u = 1 - \frac{4\varphi}{\pi}$$

zu setzen und damit sind die Richtungen bekannt, unter denen die Linien $u =$ const. von den Ecken ausgehen.

An solchen Stellen kann man sich auch dadurch helfen, daß man hier das Netz enger wählt, also die Randwertaufgabe nochmals für ein kleineres Gebiet löst, wobei einerseits die gegebenen Randwerte, anderseits, soweit nämlich der neue Rand im Innern des Grundgebietes verläuft, auf diesem die durch graphische und numerische Interpolation ergänzten Werte der bis dahin durchgeführten Rechnungen zu benützen sind.

[Analytisch könnte, wenn $u(x, y)$ eine erste Annäherung, eine für jeden Punkt gegebene Funktion ist, das Verfahren dahin verfeinert werden, daß man um jeden Punkt im Innern einen kleinen, den Rand nicht überschreitenden Kreis legt und $u(x, y)$ jedesmal durch den Mittelwert der Funktion auf der Kreisperipherie ersetzt. Man hätte dann die Radien dieser Kreise nach Null konvergieren zu lassen, um die harmonische Funktion zu erhalten. Auf diese Weise ließe sich der Grundgedanke von Boltzmann umformen, um für die Analysis verwendbar zu werden]. —

Wir haben bisher nur vom Quadrat gesprochen. Ist der Rand sodann ein Treppenpolygonzug, so ändert sich im Grunde nichts am Konvergenzbeweis, nur tritt an die Stelle der Zahl $\frac{1}{4}$ die Zahl $\frac{1}{8}$, woraus zu entnehmen ist, daß auch rechnerisch die Konvergenz etwas langsamer fortschreiten wird.

Liegt als Rand eine gezeichnete oder analytisch gegebene Kurve vor, so ist dort die Differenzengleichung in leicht erkennbarer Weise umzuwandeln. Sind z. B. $P(x, y)$, $P_1(x + \varepsilon, y)$, $P_2(x, y - \varepsilon)$ Punkte im Innern mit „Rohwerten“ u^0, u_1^0, u_2^0 und schneiden die durch P gehenden Parallelen zu den Achsen die Randkurve in den Punkten $S_1(x - a_1\varepsilon, y)$ bzw. $S_2(x, y + a_2\varepsilon)$, wobei a_1 und a_2 zwischen Null und Eins liegen, sind ferner

in diesen Punkten die Randwerte a_1 und a_2 vorgeschrieben, so wird der verbesserte Wert in P

$$u' = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a_1 + a_1 u_1^0}{1 + a_1} + \frac{a_2 + a_2 u_2^0}{1 + a_2}\right\}$$

2. Die Ermittelung der konjugierten Funktion. Verwendung isothermer Netze. Mit der Funktion $u(x, y)$, die man für ein hinreichend enges Gitter berechnet hat, ist zugleich bis auf eine Integrationskonstante die konjugierte harmonische Funktion $v(x, y)$ bestimmt, welche die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder allgemein zu reden

$$\frac{\partial v}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial s_2}$$

erfüllt, wobei in der letzten Formel die Differentialquotienten nach zwei zueinander senkrechten, im positiven Drehungssinn aufeinander folgenden Richtungen auftreten.

Je enger das Netz, mit um so mehr Recht kann man den Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten ersetzen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir einmal annehmen, es sei u berechnet für die Punkte

$$y = 0,\ x = 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots\ (u = u_0^0,\ u_1^0,\ u_2^0,\ u_3^0\ \ldots),$$
$$y = \varepsilon,\ x = 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots\ (u = u_0^1,\ u_1^1,\ u_2^1,\ u_3^1\ \ldots).$$

Wenn man dann beachtet, daß der Differentialquotient in der Mitte des Intervalls durchschnittlich dem Differenzenquotienten am nächsten kommt, so gelangt man dazu, auf der Geraden $y = \varepsilon : 2$ vom Anfangswert $v(0, \varepsilon/2) = c$ ausgehend, die Werte aufzutragen

$$v(\varepsilon/2,\ \varepsilon/2) = c + \tfrac{1}{2}(u_0^1 - u_0^0),$$
$$v(3\varepsilon/2, \varepsilon/2) = c + \tfrac{1}{2}(u_0^1 - u_0^0) + (u_1^1 - u_1^0) = v(\varepsilon/2, \varepsilon/2) + (u_1^1 - u_1^0)$$
$$v(5\varepsilon/2,\ \varepsilon/2) = v(3\varepsilon/2,\ \varepsilon/2) + (u_2^1 - u_2^0)$$

usw., also sind nur Rechnungen zu vollziehen, die sich bequem im Kopf ausführen lassen. Noch gewissenhafter wäre es freilich, die Simpsonsche Regel zu benützen. Man kann auch durch einen Punkt die Geraden oder auch ein Kurvenbüschel legen und auf jeder dieser Kurven die Schnittpunkte mit den Linien $v =$ const. bestimmen, sobald nur das Gefälle von u in der Richtung senkrecht dazu hinreichend genau bekannt ist. Die Linien $u =$ const. braucht man also gar nicht zu zeichnen. Selbstverständlich wird man zum Schluß die Augenprobe des Senkrechtschneidens der beiden Kurvenscharen nicht versäumen. Auf diese Weise kann man die Kurven

$$u = a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \ldots$$

leicht mit den Orthogonaltrajektorien

$$v = c,\quad c + a,\quad c + 2a,\ \ldots$$

zu einem isothermen Netz ergänzen.

Endlich kann man auch auf einem isothermen Netz, etwa Polarkoordinaten $(\log r, \varphi)$ oder elliptischen Koordinaten von vorneherein rechnen, statt auf rechtwinkligen Parallelkoordinaten, denn die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ bleibt ja erhalten, wenn man vom gewöhnlichen Koordinatensystem zu beliebigen isothermen Koordinaten übergeht. Man kann auch bei einer Aufgabe mit dem Netz wechseln in verschiedenen Teilen des Gebietes. Alles das sind Fragen, die mit ganz einfachen „strategischen“ Grundgedanken im einzelnen mit taktischem Geschick behandelt sein wollen, das durch Übung ziemlich schnell erworben wird.

3. Die Untersuchungen von Richardson. Schon die Vollständigkeit verlangt eine Stellungnahme zu der umfangreichen und verdienstvollen Arbeit Richardsons, die mir übrigens erst zu Gesicht kam, als meine Gedankengänge in allen Einzelheiten feststanden.

Bei Richardson findet sich derselbe Grundgedanke, nämlich die auch von Runge in seiner mehrfach angeführten

Arbeit gebrauchte Zurückführung der Differentialgleichung auf eine Differenzengleichung, sodann aber die Aufstellung und Durchführung von Überlegungen, welche gleichfalls das Ziel verfolgen „ausgehend von einer Werttabelle, die die Randbedingungen genau erfüllt und im Innern (für innere Gitterpunkte) den gesuchten Werten möglichst nahe kommt, nach bestimmten Methoden die Tabelle zu modifizieren und zu bewirken, daß sie sich unbegrenzt dem Integral der Differenzengleichung nähert" (a. a. O., p. 318).

Der Weg aber ist ein völlig anderer, nicht die Jacobische, so einfache und handliche Approximaticusmethode.

Seine Methode erstreckt sich auf Differenzengleichungen, die aus der Forderung hervorgehen, „daß eine bestimmte homogene quadratische positive Funktion ein Minimum wird."

Unsere auf Jacobi fußende Methode gilt jedenfalls auch für alle Differentialgleichungen, die aus der Forderung

$$\delta \int\int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + k^2 u^2 \right) dx\, dy = 0$$

oder jeder anderen durch Koordinatentransformation hervorgehenden entspringen. Denn einerseits kann Koordinatentransformation an ihrer Giltigkeit nichts ändern, anderseits gilt sie, wie wir sogleich sehen werden, für die aus dem genannten Variationsproblem folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 u.$$

Hier erhält man die erweiterte Differenzengleichung

$$u(x - \varepsilon, y) + u(x + \varepsilon, y) + u(x, y - \varepsilon) + u(x, y + \varepsilon) = (4 + \varepsilon^2 k^2)\, u(x, y)$$

und wenn man sie im Sinne von Jacobi zur Korrektur der angesetzten Rohwerte benützt, so erkennt man alsbald, daß die Konvergenz noch kräftiger ist als für den Fall $k^2 = 0$. — Im übrigen ist mit den hier aufgezählten Fällen das Anwendungsgebiet sicher noch nicht erschöpft. —

Richardson geht dann hauptsächlich auf physikalisch-technische Probleme ein, z. B. die Druckverhältnisse in Staudämmen und belegt seine Methoden durch umfangreiche Tabellen[1]).

Die Einführung beliebiger isothermer Systeme, die Berechnung von Paaren konjugierter harmonischer Funktionen und schließlich die Einbeziehung der konformen Abbildung, auf die besonderes Gewicht zu legen ist, lag den Zielen des englischen Autors fern.

§ 4. Die konforme Abbildung.

1. Die Technik der Köbeschen Methode. Es hieße Eulen nach Athen tragen, wollte man über die Bedeutung der konformen Abbildung des Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf das Kreisinnere sprechen, die P. Köbe gegeben hat — liegt doch bereits eine Literatur vor, welche diese Ideen dem klassischen Bildungsschatz der Mathematik einzuverleiben und einzuarbeiten als eines ihrer vornehmsten Ziele sich gesetzt hat[2]). Da indessen neben der Bedeutung für die bis dahin ungelösten Probleme der Funktionentheorie auch ihre Wichtigkeit für praktische Durchführung sehr stark unterstrichen worden ist, so wäre es in diesem Zusammenhang geradezu eine Pflichtversäumnis, nicht zu der technischen Durchführung Stellung zu nehmen.

---

[1]) Über die Hilfsmittel des englischen Forschers gibt folgende Stelle Auskunft, die durch jeden Übersetzungsversuch nur verlieren würde und die deshalb in der Ursprache angeführt werden möge: „So far J have paid piece rates [Stücklohn] for the operation $D_2 u$ of about $n/18$ pence per coordinate point, n being the number of digits [Stellen]. The chief trouble to the computers has been the intermixture of plus and minus signs. As to the rate of working, one of the quickest boys [!!] averaged 2000 operations $D_2 u$ per week, for number of three digits, those done wrong being discounted."

[2]) Z. B. seien genannt: E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, zweites Heft (Leipzig 1913). — L. Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung. Sammlung Göschen. Leipzig 1915.

Köbe benützt bekanntlich die Abbildung[1])

$$\frac{\sqrt{a}-w}{1-\sqrt{\bar{a}}\sqrt{w}}=\sqrt{\frac{a-z}{1-\bar{a}z}},$$

wobei a und $\bar{a}$ konjugiert imaginäre Zahlen sind, und $|a|<1$ angenommen ist. Man kann übrigens a als reelle positive Zahl annehmen, wenn man immer noch Drehungen und Spiegelungen, die den Einheitskreis auf sich selbst abbilden, hinzunimmt. Will man jetzt die Köbesche Kette von Abbildungen durchführen und das Innere eines Gebietes, das den Einheitskreis nirgends überschreitet und für das der Nullpunkt ein innerer Punkt ist, konform auf das gesamte Innengebiet des Kreises abbilden, so ergibt sich die Folge von Schritten, die wir jetzt schildern wollen.

Man bestimmt auf dem Rand des abzubildenden Gebietes den einzigen — oder, falls mehrere vorhanden sind — einen dem Nullpunkt nächst gelegenen Punkt A. Man legt dann die x-Achse durch diesen Punkt und führt die Transformation aus mit $a = OA$. Auf der neuen Randkurve sucht man wieder den innersten Punkt A_1 und wiederholt die Transformation mit $a_1 = OA_1$ und Verlegung der positiven x-Achse durch A_1. Dieses Verfahren ist unbegrenzt durchzuführen und verwandelt asymptotisch den Rand in die Peripherie des Einheitskreises.

Bei der ersten Transformation geht das Innere des von $x = a$ bis $x = 1$ aufgeschnittenen Einheitskreises über in das Gebiet, das teils von der Peripherie des Einheitskreises, teils

[1]) Die wesentliche geometrische Eigenschaft dieser Transformation ist, daß sie zwei bestimmte zueinander orthogonale Kreisbüschel der z-Ebene in zwei entsprechende der w-Ebene überführt. Die von ihr grundsätzlich nicht verschiedene Transformation

$$z = w + \frac{a^2}{w}$$

tritt in der Kuttaschen Theorie auf und dient hier dazu, die Berechnung des hydrodynamischen durch Zirkulationsstrom bedingten Auftriebs einer Tragfläche (senkrecht zur z-Ebene) mit kreisbogenförmigem Profil auf die entsprechende Berechnung für einen (die w-Ebene senkrecht schneidenden) Kreiszylinder zurückzuführen.

von dem innerhalb des Einheitskreises gelegenen Peripheriestück des Kreises begrenzt wird, der über dem Durchmesser $A_1 A_1'$ steht, wobei A_1 die Koordinaten $x = \sqrt{a}$, $y = 0$ und A_1' die Koordinaten $x = 1 : \sqrt{a}$, $y = 0$ besitzt. Jedem Punkt P werden zwei Punkte Q_1, Q_1' zugeordnet, die, nebenbei bemerkt, durch Spiegelung an dem Schnittkreis und der x-Achse auseinander hervorgehen. Uns interessiert aber hier nur der eine Teil, für den der Nullpunkt ein innerer Punkt ist.

Zur Vervollständigung der Abbildung ist zu beachten, daß die Kreise des hyperbolischen Büschels mit den Nullkreisen A und A' ($y = 0$, $x = 1 : a$) in die Kreise des hyperbolischen Büschels mit den Nullkreisen A_1 und A_1' übergehen. Dasselbe gilt dann auch für die Kreise der dazu orthogonalen elliptischen Büschel. Bei den erstgenannten Kreisen rechnet man einfach die Schnittpunkte mit der x-Achse aus, bei dem zweiten (elliptischen) Büschel und seinem Bild hat man zu beachten, daß im Punkt A die Winkeltreue aufhört und jeder Winkel bei der Abbildung durch den halben ersetzt wird. Danach ist die Zeichnung auszuführen. Wir wählten hier (Fig. 1) $a = e^{-\frac{\pi}{8}}$, um ein isothermes Netz von 64 quadratischen Feldern sowohl in der z-Ebene wie in der w-Ebene bequem zeichnen zu können. Auf der linken Seite ist fast kein Unterschied zwischen beiden Figuren, Abweichungen machen sich naturgemäß um so mehr

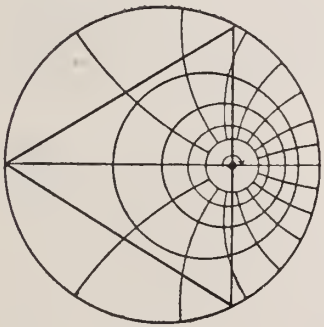


Fig. 1

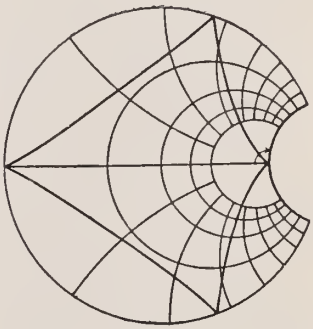


Fig. 2

bemerklich, je mehr man sich dem singulären Punkt nähert. In die beiden Figuren wurde dann noch ein Dreieck und sein erstes Bild eingezeichnet.

Damit ist der erste Schritt ausgeführt. Man hat dann weiter in diesem Bild den Randpunkt zu bestimmen (B), der dem Mittelpunkt am nächsten ist, und den auf der Verlängerung von OB aufgeschnittenen Kreis auf einen neuen Einheitskreis abzubilden, jetzt mit der Konstanten $b = OB$ an Stelle von a.

Im ganzen also hätte man sich eine Reihe von Paaren von „Köbenetzen" anzulegen für verschiedene Zentralabstände des singulären Punktes — das muß im einzelnen dem Genauigkeitsbedürfnis des Richardsonschen „quick boy", beziehungsweise seines gestrengen Auftraggebers überlassen werden — und den Rand so lange umzuzeichnen, bis er, bekanntlich mit einer Fülle von Ecken, der Kreisperipherie überall hinreichend nahe gekommen ist. Dabei darf aber auch die Umzeichnung des Innern nicht vergessen werden. Man wird also im Innern der abzubildenden Figur ein Gitter zeichnen, und hat sorgfältig darauf zu achten, daß bei der Umzeichnung dieser inneren Gitterpunkte genau verfahren wird. Dies erfordert seinerseits wieder eine möglichst engmaschige Anlage der benützten Köbenetze, zum mindesten jeweils in der Umgebung des singulären Punktes. Es dürfte sich empfehlen, A ein wenig außerhalb des Gebietsrandes bei den ersten Schritten anzunehmen, um eben die kritischen Stellen so lange wie möglich zu vermeiden.

Ein unbedingter Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß es rein zeichnerisch, allerdings unter Voraussetzung allergrößter Sorgfalt, durchgeführt werden kann.

Wir dürfen wohl nochmals betonen, daß diese Sorgfalt wegen der, sagen wir mindestens 10—20 mal erforderlichen Umzeichnung des inneren Netzes nicht aus dem Auge gelassen werden darf, da ja die Fehler sich leicht häufen können.

Auf diese Einzelheiten mußte wohl hingewiesen werden, denn der einmal apodiktisch aufgestellte Satz, daß nicht „zwischen reiner und angewandter Mathematik, sondern zwischen

richtiger und falscher Mathematik zu unterscheiden" ist, erfordert doch wohl in anderen Regionen die Ergänzung, daß man sich über die technischen Einzelheiten einer zur Anwendung empfohlenen Methode Rechenschaft gibt nach dem — kategorisch ausgesprochenen — Grundsatz der angewandten Mathematik: „Zeichne so genau wie möglich und mißtraue Deinen Zeichnungen möglichst."

2. Eine andere Methode. Nachdem die in § 3 entwickelte Boltzmannsche Methode der Lösung der Randwertaufgabe ausgearbeitet war, ergab sich die weitere Aufgabe, sie für die konforme Abbildung anzuwenden. Wir stellen uns also mit Runge die Aufgabe, für ein gegebenes Gebiet (von einfachem Zusammenhang) mit gegebenem „Quellpunkt" die „Zirkulationslinien" und die „Quell-Linien", oder, wie wir sagen wollen, die „Niveaulinien" und die „Kraftlinien" zu ermitteln. Damit ist dann die konforme (oder vielmehr eine der ∞^3) Abbildung des Gebietes auf das Kreisinnere geleistet; den Niveaulinien entsprechen die konzentrischen Kreise ($\log r = \text{const.}$) und den Kraftlinien die Halbstrahlen ($\varphi = \text{const.}$). Wir bringen zunächst eine Figur mit sehr „allgemeinem" Umriß, die gelegentlich eines Seminars nach der Rungeschen Methode auf Veranlassung von Herrn Geheimrat Finsterwalder gezeichnet worden ist.

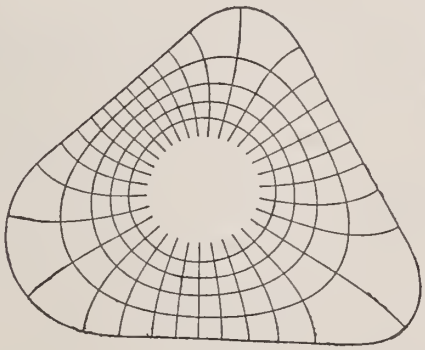


Fig. 3

Sodann aber geben wir die neue Methode an. Wir gehen zunächst von der Tatsache oder Erfahrung aus, daß die Niveaulinien in der Nähe des Quellpunktes nahezu kreisförmig sind, was ja auch unmittelbar aus der Reihenentwicklung

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

einer Abbildungsfunktion folgt. Mit Benützung dieses Umstandes berechnet man dann nach unserer Methode die Funktion, die sowohl auf dem Rand des Gebietes wie auf einem dem Quellpunkt „hinreichend nahe" gelegenen Kreis einen konstanten Wert annimmt, selbstverständlich mit Benützung eines isotherm geteilten Polarkoordinatennetzes, wie es Runge empfohlen hat. Der Pol ist mit dem Quellpunkt zur Deckung zu bringen; auch nimmt man für die beiden an sich willkürlichen Konstanten runde Zahlenwerte. Die errechnete — vielmehr ermittelte und approximierte — Funktion wird, gleich const. gesetzt, *nahezu* die gesuchten Niveaulinien ergeben. Die Kraftlinien sind nach § 3, 2 ebenfalls zu bestimmen, können übrigens *ganz unabhängig* von den Niveaulinien gezeichnet werden, so bald auf die Gitterpunkte die Zahlenwerte der Niveaulinienfunktion eingetragen sind. Hervorzuheben ist, *daß dabei gerade auch die Ansatzpunkte der Kraftlinien am äußeren Rand genau berechnet werden können*, der bei der Köbeschen Methode ja in stark verbeultem Zustand der Kreisperipherie sich nähert.

Bei einspringenden Ecken häufen sich die Kraftlinien, aber hier kann man leicht durch Reihenentwicklung Genauigkeit erreichen. Selbstverständlich ist die Anlage eines isothermen Gitters erwünscht, dessen Kraftlinien im Quellpunkt unter gleichen Winkeln $\pi : 2^n$ einlaufen. Demgemäß hat man nachträglich die Niveaulinien auszusuchen bzw. zu interpolieren.

Das beigefügte Beispiel des Quadrates (Fig. 4), das nach dieser Methode gerechnet ist, zeigt deutlich die starke Tendenz der Niveaulinien, sich der Kreisgestalt zu nähern. Überhaupt, wenn das abzubildende Gebiet die Symmetrie des regulären n-Ecks besitzt und man als Quellpunkt den Mittelpunkt wählt,

so ist ja die Abbildung auf den Kreis (modulo einer Drehstreckung) gegeben durch

$$w(z) = z(1 + a_1 z^n + a_2 z^{2n} + \cdots),$$

wobei die Koeffizienten reelle Zahlen sind. Hieraus geht „allgemein zu reden" hervor, daß mit zunehmendem n die Schwankung von $|w(z)|$ bei konstantem $|z|$, wir wollen sie die „Rundung der Niveaulinien" [1]) nennen, in der Nähe des Quellpunktes stark zunimmt.

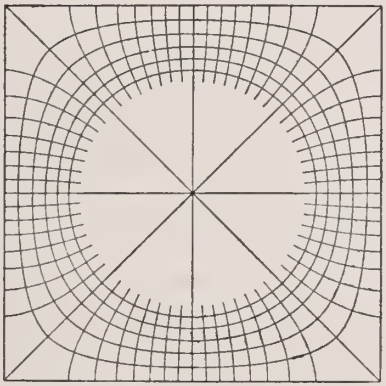


Fig. 4

Einen anderen, weitere Forschungen im Gebiet der „Verzerrungssätze" erfordernden Gesichtspunkt gibt die folgende allgemeine Frage: Es sei

$$w(z) = z + \cdots$$

die Abbildungsfunktion und es sei

$$m(\varrho) \leqq |w(z)| \leqq M(\varrho) \qquad |z| = \varrho.$$

Dann soll die *Rundungsfunktion*

$$F(\varrho) = \frac{m(\varrho)}{M(\varrho)},$$

[1]) Vgl. a. Study, a. a. O., S. 110.

die für $\varrho = 0$ den Wert Eins annimmt, betrachtet werden. Verlangt wird vor allem, es soll, wenn $F(r)$ bekannt ist, der Verlauf an $F(\varrho)$ im Gebiet

$$r \geq \varrho \geq 0$$

geschätzt werden. Herr Bieberbach teilte mir auf meine schriftliche Anfrage mit, daß die Beziehung gilt

$$\left(\frac{R-\varrho}{R+\varrho}\right)^2 \leq F(\varrho) \leq 1,$$

wobei R die obere Schranke für die Radien der Kreise der z-Ebene ist, die durch die analytische Funktion noch auf ein schlichtes Gebiet der w-Ebene abgebildet werden[1]).

Die Schätzung der Rundungsfunktion wäre notwendig für die Kritik der neuen Methode. *Im übrigen gibt auch hier die Rechnung selbst eine Richtschnur.* Wenn nämlich die Schwankungen der errechneten harmonischen Funktion auf dem Kreis, der dem innersten bei der bisherigen Rechnung benützten Kreis (auf dem die Funktion konstant angenommen wurde), nach außen als nächster folgt, sehr gering sind, so genügt die Approximation. Wenn sie aber noch zu groß sind, so geht man auf den nächstinneren Kreis des isothermen Netzes zurück.

Die neue Methode kann bei analytisch gegebenen Konturen, wie z. B. dem Quadrat, rein rechnerisch durchgeführt werden; *sie bedarf zur Durchführung keines gezeichneten Entwurfes.* Zur nachträglichen Zeichnung der Niveau- und Kraftlinien ist selbstverständlich ein so sorgfältig gezeichnetes isothermes Polarkoordinatennetz erwünscht, wie es mir Herr Runge gütigst zur Verfügung gestellt hat.

Bei der Rechnung genügen mehr schematisch angelegte Netze. Man braucht für eine Abbildung zwei Netze. Auf dem ersten trägt man in den Ecken eines weitmaschigen Netzes — also mit Unterdrückung der feineren Maschen — geschätzte

[1]) In einer späteren Mitteilung hat Herr Bieberbach die Schätzung verfeinert; ich bin ihm wie auch Herrn Köbe für das Interesse verpflichtet, das sie für diese Fragen zeigen.

Werte ein; das zweite dient zur Korrektur. Alsdann radiert man die Zahlen des ersten Netzes fort und benützt es zur Eintragung der korrigierten — sowohl auf engere Maschen wie auf mehr Stellen berechneten — Werte des zweiten Netzes. Dieses „alternierende Verfahren“ wird so lange fortgesetzt, bis die an entsprechenden Punkten stehenden Zahlen die gewünschte Übereinstimmung zeigen. Dabei stellt sich dann sehr bald von innen nach außen eine *Stabilisierung der Zahlenwerte* ein, so daß die späteren Rechnungen — mit nach Bedarf immer feiner verengenden Maschen — mehr und mehr nur in der Nähe des Randes auszuführen sind. Nebenrechnungen auf besonderem Papier können durchaus vermieden werden, da ja die späteren Rechnungen bei der Mittelbildung nur immer höhere Dezimalen beeinflussen.

Auch *ringförmige Gebiete* können in dieser Weise behandelt werden. Um z. B. (Fig. 5) das ringförmige Gebiet, das von zwei konzentrischen gleich gestellten Quadraten begrenzt ist, auf das Ringgebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen abzubilden, berechnet man am besten mit Benützung von Koordinatenpapier die harmonische Funktion aus, die sowohl auf dem äußeren wie auf dem inneren Rand einen konstanten Wert (etwa Null und Hundert) annimmt. Dann fügt man die Niveau-

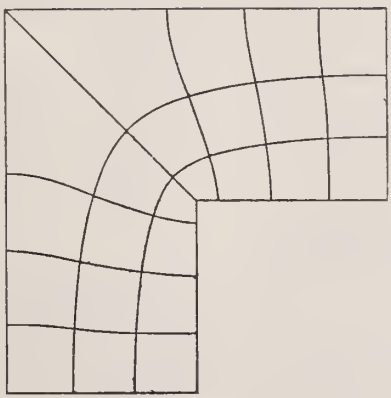


Fig. 5

linien dieser Funktion und die „Kraftlinien“ ein, welche die konjugierte Funktion gibt. Verlangt man eine bestimmte Anzahl, z. B. 64 Kraftlinien bei isothermer Teilung, so kommt dann auch dem inneren quadratischen Rand eine bestimmte Ordnungszahl bei der Zählung der Niveaulinien zu. Dementsprechend ergibt sich der innere Rand des Kreisrings (Fig. 6), wenn der äußere gegeben ist. — Auch die weitergehenden, von Köbe bewiesenen Sätze über die Abbildung mehrfach durchlöcherter Gebiete auf Gebiete, die von Kreisen begrenzt sind, werden dem Verfahren zugänglich.

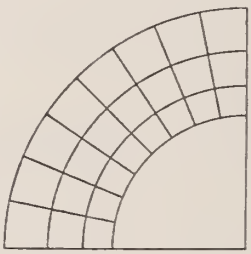


Fig. 6

3. Der Auftrieb von Tragflächen. Zum Schluß mag noch angegeben werden, wie sich nunmehr die Bestimmung des Auftriebs von Tragflächen mit gegebenem Profil in (zweidimensionaler) Luftströmung gestaltet.

Die in übersichtlicher Weise alle Hauptpunkte herausarbeitende Darstellung von Mises zeigt, daß es nur darauf ankommt, das Äußere des Profils auf das Äußere eines bestimmten in derselben Ebene gelegenen Kreises K konform abzubilden. Der Kreis ist so zu wählen, daß die Abbildung „im Unendlichen kongruent“ wird.

Wir bilden zunächst auf das Äußere des Einheitskreises ab, was sich leicht erreichen läßt, indem wir zunächst durch eine Inversion das Äußere des Profils in das Innere des invertierten Profils überführen, dieses nach unseren Methoden auf das Innere des Einheitskreises konform abbilden, und dann

durch Inversion einerseits zum Äußern des Profils, andererseits zum Äußern des Einheitskreises übergehen. Wir haben dann eine Abbildung, die sich analytisch in der Form

$$Z = a_0 + a_1 z + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots$$

darstellen würde und die das Gebiet

$$|z \geqq 1$$

auf das Äußere des Profils konform abbildet.

Ordnen wir jetzt jedem Punkt z den Punkt

$$z_1 = a_0 + a_1 z$$

zu, so nimmt die Abbildungsformel die von Mises geforderte Gestalt an

$$Z = z_1 + b_{-1} z_1^{-1} + \cdots,$$

und man sieht, daß der gesuchte Kreis K den Mittelpunkt

$$z_1 = a_0$$

und den Radius

$$r = |a_1|$$

besitzt. Wie aber bestimmt man die Konstanten a_0 und a_1, wenn doch die analytische Darstellung der Abbildung nicht bekannt ist? Sie wären analytisch bestimmt durch die längs des geschlossenen Umfangs des Einheitskreises zu erstreckenden Integrale

$$\int \frac{Z}{z}\, dz = 2\pi a_0,$$

$$\int \frac{Z}{z^2}\, dz = 2\pi a_1,$$

und diese Integrale können wir, da die Zuordnung $z \longrightarrow Z$ mit ausreichender Annäherung konstruiert ist, tatsächlich auch durch numerische Approximation bestimmen.

Mit der einfachen Kuttaschen Transformation lassen sich bekanntlich Kreise in sogenannte „Joukowskiprofile“ unmittelbar überführen. Als Ergänzung dazu und *für allgemein ge-*

wählte Profile anwendbar ist unsere Entwickelung gedacht, die außer der konformen Abbildung noch zwei numerische Integrationen erfordert.

So erweisen sich die Ideen Boltzmanns, für praktische Durchführung handlich gemacht und nach einer Bemerkung von Jacobi über die approximative Auflösung eines Systems linearer Gleichungen zu einem konvergenten Verfahren durchgebildet, als eine Quelle aussichtsreicher, und, wie wir dargelegt zu haben hoffen, bereits erprobter Berechnungsmethoden, die einerseits einen Beitrag zur angewandten Mathematik liefern, anderseits im einzelnen Stützung finden, aber auch Anregung geben in neu erschlossenen, noch in lebhafter Entwickelung begriffenen Untersuchungen der Funktionentheorie.

Über elektrische Wellen in geschichteten Medien.

Von **R. Emden.**

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Oktober 1918.

Die nachfolgende Untersuchung befaßt sich mit dem Fortschreiten einer ebenen, elektro-magnetischen Welle in einem Medium, dessen Dielektrizitätskonstante in Richtung der Wellennormale sich stetig ändert. Ist diese Änderung durch eine Potenz oder eine Exponentialgröße gegeben, so lassen sich die auftretenden Differenzialgleichungen durch Zylinderfunktionen integrieren. Es zeigt sich, daß, obwohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die Raumdichte der Energie, der elektrische und der magnetische Vektor, letztere nach verschiedenen Gesetzen, sich ändern, die Intensität der Strahlung, der Poyntingsche Vektor, konstant bleibt. Geht ein Strahl in beliebiger Anfangsrichtung durch ein parallel geschichtetes Medium von veränderlichem Brechungsexponenten, so ist die Bahn stetig gekrümmt; dabei ist die Richtungsänderung des Strahles dieselbe, ob die Differenz zweier Brechungsexponenten in gekrümmter Bahn stetig oder in einmaliger Brechung unstetig ausgeglichen wird. Da mit Brechung von endlichem Betrage stets Reflexion verbunden ist, liegt die Vermutung nahe, daß auch bei stetigem Ausgleich der Brechungsexponenten unendlich kleine reflektierte Mengen sich zu endlichen Beträgen addieren. Ihre Unrichtigkeit wird durch vorliegende Untersuchung wenigstens für senkrechte Incidenz nachgewiesen; bei stetiger, aber beliebig rascher Änderung des Brechungsexponenten bleibt der Poyntingsche Vektor konstant. Damit ist

in diesem Einzelfalle ein Resultat bestätigt, das allgemein auf anderem Wege von v. Seeliger[1]) erhalten wurde.

Die gefundene Lösung gestattet noch eine weitere Anwendung. In der gewöhnlichen Behandlungsweise des Vorganges der Reflexion und Brechung wird die Berührungsfläche zweier Medien als mathematische Fläche aufgefaßt, an welcher der Brechungsexponent sich sprungweise ändert. Eine Reihe von Beobachtungen sprechen gegen diese Auffassung und verlangen vielmehr stetigen Ausgleich in einer dünnen Übergangsschicht. Von diesem Gesichtspunkte aus habe sich mit dem Reflexionsproblem L. Lorenz[2]) und Drude[3]) befaßt. Da die vorliegende Lösung das Verhalten der Wellen bei stetigen Verhältnissen wiedergibt, läßt sie wenigstens für senkrechte Incidenz das Reflexionsproblem ungleich strenger behandeln. Es zeigt sich, daß bei stetigem Übergange zu beliebig großem Quotienten des Brechungsexponenten der reflektierte Betrag der Wellen, die den Maxwellschen Gleichungen folgen, die also groß sind gegen molekulare Dimensionen, bestimmt ist durch die Größe der Änderung auf der Strecke gleich einer Wellenlänge. Sie bestimmt die relative Menge reflektierter Energie, die von 0 bis 1 variieren kann.

§ 1. Eine ebene polarisierte Welle bewege sich in Richtung der z Achse, den elektrischen Vektor parallel der x Achse, den magnetischen Vektor parallel der y Achse gerichtet. Die Dielektrizitätskonstante ε und infolgedessen auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V seien längs der z Achse veränderlich. Dann lauten die Maxwellschen Gleichungen

1 a) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}$$

1 b) $$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}$$

[1]) H. v. Seeliger, Bemerkung zu dem Aufsatze des Hrn. A. Schmidt: „Beobachtung der Helligkeitsabnahme durch Brechung". Physikalische Zeitschrift, S. 237, 1904.

[2]) L. Lorenz, Über die Reflexion des Lichtes an den Grenzflächen zweier isotropen, durchsichtigen Mittel. Poggendorf. Annalen, Bd. 111, S. 460, 1860.

[3]) D. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl., S. 272 ff., 1906.

mit der Folge

2a) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_x}{\partial z^2}$$

2b) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right)$$

Um periodische Lösungen von der Schwingungszahl $n = \frac{2\pi}{\tau}$ zu erhalten, setzen wir

3a) $$\mathfrak{E}_x = \Re e^{int} \cdot F(z)$$

3b) $$\mathfrak{H}_y = \Re e^{int} \cdot \varphi(z)$$

und erhalten aus 2) für $F(z)$ und $\varphi(z)$ die Bestimmungsgleichungen

4a) $$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\varepsilon n^2}{c^2} F = 0$$

4b) $$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{d\varphi}{dz} + \frac{\varepsilon n^2}{c^2} \varphi = 0$$

Für die weitere Untersuchung muß ε als Funktion von z gegeben sein; sie soll unter zwei verschiedenen Annahmen durchgeführt werden.

§ 2. Als erste Annahme setzen wir

5) $$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + az)^m = \varepsilon_0 \zeta^m; \quad \zeta = 1 + az$$

und erhalten damit die spezialisierten Gleichungen 4)

6a) $$\frac{d^2 F}{d\zeta^2} + \frac{\varepsilon_0 n^2}{a^2 c^2} \zeta^m F = 0$$

6b) $$\frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} - \frac{m}{\zeta} \frac{d\varphi}{d\zeta} + \frac{\varepsilon_0 n^2}{a^2 c^2} \zeta^m \varphi = 0$$

Beide Gleichungen können aus der Gleichung[1])

$$y'' + \frac{1 - 2\alpha}{x} y' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2\gamma^2}{x^2}\right] y = 0$$

[1]) E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909, S. 166. Wir benützen für die Zylinderfunktionen die Bezeichnungsweise dieses Werkes, auf welches wir im folgenden unter J und E verweisen. Um

die durch die Zylinderfunktion

$$y = x^{\alpha} Z_p(\beta x^{\gamma})$$

gelöst wird, durch Spezialisierung der Konstanten α, β, γ, p gewonnen werden. Von den zur Verfügung stehenden partikulären Integralen erweisen sich die dritter Art (die Hankelschen Integrale) $H_p^{(1)}$ und $H_p^{(2)}$ besonders geeignet, da sie die Trennung der reellen und imaginären Teile der Lösungen einfach bewerkstelligen lassen. Die in p quadratische Gleichung stellt $+$ und $-p$ Werte zur Verfügung. So erhalten wir die Lösungen

$$F = \zeta^{\frac{1}{2}}\left[A_1 H^{(1)}_{\pm \frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}n}{ac}\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) + A_2 H^{(2)}_{\pm \frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}n}{ac}\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] \tag{7 a}$$

$$\varphi = \zeta^{\frac{m+1}{2}}\left[B_1 H^{(1)}_{\pm \frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}n}{ac}\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right) + B_2 H^{(2)}_{\pm \frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}n}{ac}\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] \tag{7 b}$$

Um Aufschluß über das Vorzeichen der p Werte und den Zusammenhang der Konstanten A_1, A_2, B_1, B_2 zu erhalten, gehen wir mit 7 a), 7 b) in Gleichung 1 a) ein, benutzen die Fundamentalgleichung der Zylinderfunktionen

$$\frac{d Z_p(x)}{dx} = -\frac{p}{x} Z_{p-1}(x)$$

beachten, daß

$$\frac{m+1}{m+2} + \frac{1}{m+2} = 1$$

und finden, daß

$$-\frac{1}{m+2} \quad \text{und} \quad +\frac{m+1}{m+2}$$

Mißverständnis auszuschließen, sei angemerkt, daß das N_p bei J und E dem $Y^{(\nu)}$ des Handbuches der Zylinderfunktionen von H. Nielsen entspricht.

für die p Werte angesetzt und

$$B_1 = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,A_1, \quad B_2 = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,A_2$$

gesetzt werden müssen, so daß sich ergibt

8a)
$$F = \zeta^{\frac{1}{2}}\left[A_1 H^{(1)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right.$$
$$\left. + A_2 H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{1}{2}m+2}\right)\right]$$

8b)
$$\varphi = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,\zeta^{\frac{+1}{2}}\left[A_1 H^{(1)}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)\right.$$
$$\left. + A_2 H^{2}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+1}{2}}\right)\right]$$

Weiter beachten wir, daß für 8a) und 8b) die semiekonvergenten Entwicklungen[1]) gelten:

9)
$$H^{(1)}_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(P_p(x) + i\,Q_p(x))\,e^{+i\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)}$$
$$H^{(2)}_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,(P_p(x) - i\,Q_p(x))\,e^{-i\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)}$$
$$P_p(x) = 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!\,(8x)^2} +$$
$$Q_p(x) = \frac{4p^2-1}{8x} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!\,(8x)^3}$$

Mit Rücksicht auf 3a), 3b) liefern für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ die Gleichungen 9) die Exponentialausdrücke

$$e^{i\left(nt+x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)} \text{ und } e^{i\left(nt-x+\frac{2p+1}{4}\pi\right)},$$

also Wellen, die in Richtung $-z$ und $+z$ fortschreiten. Da nur letztere in Betracht kommen, muß $A_1 = 0$ sein. Somit ergeben sich für $F(x)$ und $\varphi(x)$ die Lösungen

[1]) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 58, J und E, S. 98—99.

10 a) $$F = A\zeta^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\cdot\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

10 b) $$\varphi = -i\sqrt{\varepsilon_0}\,A\zeta^{\frac{m+1}{2}} H^{(2)}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

§ 3. Das x der Gleichungen 9) haben wir zu setzen

$$x = \frac{2}{m+2}\,\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}\,\zeta^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2}\cdot\frac{2\pi}{a\lambda}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}$$

11)
$$= > \frac{2}{m+2}\cdot\frac{2\pi}{a\lambda} + 2\pi\frac{z}{\lambda}$$

Indem wir die Untersuchung des Eintritts der Wellen in das Medium, ($z = 0$), den §§ 6—8 vorbehalten, ergeben sich, unabhängig von a, für Werte von z, die nur wenige λ betragen, Werte von x, genügend groß gegen 1, wie gegen

$$p = \frac{1}{m+2} \quad \text{und} \quad \frac{m+1}{m+2}$$

so daß die Reihen 9) sich auf die ersten Glieder beschränken. Setzen wir in der Gl. 9 für $H^{(2)}_p$

11)
$$P_p(x) - i\,Q_p(x) = Ce^{i\delta}$$
$$C = P_p(x)\sqrt{1+\left(\frac{Q_p(x)}{P_p(x)}\right)^2}; \quad \delta = -\operatorname{arctg}\frac{Q_p(x)}{P_p(x)}$$

und beachten, daß stets $p < 1$, $x > 2\pi\frac{z}{\lambda}$, so können schon für $z = 2\lambda$, die in x quadratischen Glieder, da sie $< \frac{1}{100}$ sind, gegen 1 weggelassen werden. Wir erhalten so $C = P_p(x) = 1$, und im Exponenten kann $\delta = \frac{4p^2-1}{8x}$ gegen x wegbleiben. Beachten wir weiter, daß

$$e^{-i\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)} = e^{-i\left(x-\frac{m\pi}{4(m+2)}\right)} \text{ für } p = -\frac{1}{m+2}$$

$$-ie^{-i\left(x-\frac{2p+1}{4}\pi\right)} = e^{-i\left(x-\frac{m\pi}{4(m+2)}\right)} \text{ für } p = \frac{m+1}{m+2}$$

so erhalten wir die so behandelten Werte von $H_p^{(2)}$ in 8a) und 8b) eingesetzt und A entsprechend abgeändert

12a) $$F = A(1+az)^{-\frac{m}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}} - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)}$$

12b) $$\varphi = \sqrt{\varepsilon_0}\,A(1+az)^{+\frac{m}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\,n}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}} - \frac{m\pi}{4(m+2)}\right)}$$

Um $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ zu erhalten, haben wir nach 3a), 3b) mit e^{int} zu multiplizieren und die reellen Teile zu nehmen, so daß wir schließlich mit geeigneter Wahl des Nullpunktes der Zeit erhalten

13a) $$\mathfrak{E}_x = A(1+az)^{-\frac{m}{4}} \cos n\left(t - \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

13b) $$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\varepsilon_0}\,A(1+az)^{+\frac{m}{4}} \cos n\left(t - \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{ac}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}\right)$$

Diese Ausdrücke geben die gesuchte Lösung und sind zu diskutieren.

§ 4. Wir finden für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

14) $$V = \frac{dz}{dt} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}(1+az)^{\frac{m}{2}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Als Konsequenz der Maxwellschen Gleichungen ergibt sie sich unabhängig von der Wellenlänge; es findet keine Dispersion statt und Phase und Energie wandern mit derselben Geschwindigkeit.

Der elektrische und der magnetische Vektor ändern sich beim Fortschreiten der Welle nach verschiedenen Gesetzen; ersterer nimmt im Verhältnis $(1+az)^{\frac{m}{4}}$ a b, letzterer im gleichen Verhältnisse z u.

Wir suchen weiter die Raumdichte der elektrischen und der magnetischen Energie und erhalten für deren Mittelwerte während einer Periode

15a) $$\varrho_{\text{elektr.}} = \frac{1}{8\pi}\varepsilon\overline{\mathfrak{E}_x^2} = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}(1+az)^m \cdot \frac{A^2}{2}(1+az)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{16\pi}(1+az)^{\frac{m}{2}} A^2$$

15b) $$\varrho_{\text{mag.}} = \frac{1}{8\pi}\overline{\mathfrak{H}_y^2} = \frac{\varepsilon_0}{16\cdot\pi}(1+az)^{\frac{m}{2}} A^2$$

also gleiche Werte. Für die gesamte Energiedichte (Dichte der Strömung) ergibt sich somit

16) $$\varrho = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_0(1+az)^{\frac{m}{2}} A^2 = \varrho_0(1+az)^{\frac{m}{2}}$$

Die Dichte der Strahlung steigt somit in Richtung z wie $\sqrt{\varepsilon}$.

Wir suchen weiter die Strahlungsintensität S, das ist die Energiemenge, welche in der Zeiteinheit die Flächeneinheit in Richtung der z Achse durchsetzt. Da die Energie sich mit der Geschwindigkeit $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ bewegt, ergibt sich

17) $$S = \varrho V = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} A^2$$

Derselbe Wert ergibt sich, wenn wir nach dem Poyntingschen Satze $S = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{E}_x \cdot \mathfrak{H}_y$ bilden.

Die Strahlungsintensität bleibt während des Fortschreitens der Welle konstant. Trotz des variabeln Brechungsexponenten finden keinerlei Reflexionen statt.

§ 5. Diese für den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_0(1+az)^m$ gewonnenen Resultate lassen sich durch Grenzübergang für die Änderung des ε nach der Annahme $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{az}$ umformen. Aus $\lim_{q=\infty}\left(1+\frac{1}{q}\right)^q = e$ folgt $\lim\left(1+\frac{1}{q}\right)^{qaz} = e^{az}$ und für $q = \frac{m}{az}$ folgt

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{az}{m}\right)^m = e^{az}.$$

Ersetzen wir in den gewonnenen Gleichungen a durch $\frac{a}{m}$ und gehen mit $m = \infty$ zur Grenze über, so erhalten wir für die Änderung der Dielektrizitätskonstanten

5') $$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{az}$$

die Lösungen:

13a) $$\mathfrak{E}_x = A e^{-\frac{az}{4}} \cos n \left(t - \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{ac} e^{\frac{az}{2}} \right)$$

13b) $$\mathfrak{H}_y = \sqrt{\varepsilon_0} A e^{\frac{az}{4}} \cos n \left(t - \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{ac} e^{\frac{az}{2}} \right)$$

14) $$V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} e^{-\frac{az}{2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

15'a) $$\varrho_{\text{elektr.}} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon_0 A^2 e^{\frac{az}{2}}$$

15'b) $$\varrho_{\text{mag.}} = \frac{1}{16\pi} \varepsilon_0 A^2 e^{\frac{az}{2}}$$

16') $$\varrho = \cdot \frac{1}{8\pi} \varepsilon_0 A^2 \varepsilon^{\frac{az}{2}} = \varrho_0 e^{-\frac{az}{2}}$$

17') $$S = \varrho V = \frac{c\sqrt{\varepsilon_0}}{8\pi} A^2$$

Die in § 4 gezogenen Schlüsse bleiben unverändert.

Die Mechanik des Vorganges läßt sich in beiden Fällen klar übersehen. In gleichem Maße, wie längs des Weges die Geschwindigkeit der Strahlung zu- oder abnimmt, nimmt deren Dichte ab oder zu, so daß das Produkt aus beiden, die Strahlungsintensität, konstant bleibt.

Stellen wir der Strahlung an verschiedenen Stellen eine auffangende Fläche (das Auge), gegenüber, so wird diese von Strahlung verschiedener Dichte getroffen, während die in der Zeiteinheit (durch die Pupille) hindurchgehende Energiemenge konstant bleibt. Es kann wohl kein Zweifel sein, daß letztere die „Helligkeit" bedingt. Diese schlechthin durch die „Energie" der Strahlung messen zu wollen, kann leicht zu Zweideutigkeit Veranlassung geben, da zwischen an Ort und Stelle vorhandener und transportierter Energie unterschieden werden muß.

§ 6. Wir wenden uns dem 2. Teil unserer Untersuchung zu und behandeln das Problem der Reflexion senkrecht einfallender Wellen an der Berührungsfläche zweier Medien, indem wir die mathematische Trennungsfläche ersetzen durch eine Übergangsschicht, in welcher die Dielektrizitätskonstante (der Brechungsquotient) stetig variiert. In dieser Übergangsschicht gelten dann die in den §§ 1—5 gewonnenen Gleichungen.

Die ebene, polarisierte Welle bewege sich durch ein Medium 1 mit konstantem ε_1 in Richtung $+z$; von der Stelle $z = 0$ ab beginnt sich ε zu ändern, wobei wir wieder die beiden Annahmen $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + az)^m$ und $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ unterlegen. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ gibt dann stetigen Übergang von ε_1 in ε bei unstetigem Gefälle. Dann gelten in 1 für die einfallende und die reflektierte Welle die bekannten Beziehungen

$$(\mathfrak{E}_x)_e = \Re\, E e^{in\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{H}_y)_e = \Re\, \sqrt{\varepsilon_1}\, E e^{in\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{E}_x)_r = \Re\, - R_p e^{in\left(t + \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

$$(\mathfrak{H}_y)_r = \Re\, \sqrt{\varepsilon_1}\, R_p e^{in\left(t + \frac{\sqrt{\varepsilon_1} z}{c}\right)}$$

und für die durchgehende Welle fanden wir für $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + az)^m$ und für $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ die Ausdrücke für $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ in den §§ 3—5 entwickelt. Dann gelten für $z = 0$ die Grenzbedingungen

$$(\mathfrak{E}_x)_e + (\mathfrak{E}_x)_r = (\mathfrak{E}_x)_d$$
$$(\mathfrak{H}_y)_e + (\mathfrak{E}_y)_r = (\mathfrak{H}_r)_d$$

die in unserem Falle geschrieben werden können:

18) $$\frac{E - R}{(E + R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{\Re\, H^{(2)}_{-\frac{1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_2} n}{ac}\right)}{\Re - i\sqrt{\varepsilon_2}\, H^{(2)}_{\frac{m+1}{m+2}}\left(\frac{2}{m+2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_2} n}{ac}\right)}$$

für $\varepsilon = \varepsilon_2 (1 + az)^m$

19) $$\frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = -\frac{\Re H_0^{(2)}\left(2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}n}{ac}\right)}{\Re - i\sqrt{\varepsilon_2}H_1^{(2)}\left(2\frac{\sqrt{\varepsilon_2}n}{ac}\right)} \quad \text{für } \varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$$

Wir behandeln sie unter den beiden verschiedenen Annahmen, daß a erstens sehr langsam, zweitens sehr rasch sich ändert, wodurch starke resp. schwache Änderung von ε auf der Strecke gleich 1 Wellenlänge bedingt ist.

§ 7. Erster Fall: a ändert sich sehr langsam. Die Gleichung 13) und 13') hatten wir aus der allgemeinen Lösung unter Benützung der semikonvergenten Entwicklung 9) spezialisiert unter Voraussetzung eines hinreichend großen Argumentes x der Zylinderfunktionen

$$x = \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_2}n}{a\lambda}(1+az)^{\frac{m+2}{2}}$$

Steht wie dort wachsendes z zur Verfügung, so läßt sich dies stets erreichen. Jetzt soll diese Bedingung für $z=0$ befriedigt werden, was bei gegebenem n oder λ_2, $\frac{\sqrt{\varepsilon_2}n}{ac} = \frac{\pi}{a\lambda_2}$ nur durch hinreichend kleines a, geringe Änderung des ε auf der Strecke gleich einer Wellenlänge, erreicht werden kann. Es muß dazu, wie dort

$$\frac{4p^2-1}{8x^2}, \quad x = \frac{2}{m+2}\cdot\frac{2\pi}{a\lambda_2}$$

klein gegen 1 sein. Sehen wir dies als befriedigt an, wenn wir haben

20) $$\frac{4p^2-1}{8x^2} < \frac{1}{100}$$

und wählen von den beiden p Werten

$$-\frac{1}{m+2} \text{ und } \frac{m+1}{m+2}$$

den zweiten, welcher a enger begrenzt, so erhalten wir für die gesuchte Bedingung

$$21) \qquad a\lambda_2 < 1{,}13 \cdot \pi \sqrt{\frac{1}{3m^2+4m}} = \frac{3{,}55}{\sqrt{3m^2+4m}}$$

Die folgende, kleine Tabelle enthält einige Zahlenwerte, zu welchen diese Bedingung führt

$$22) \qquad \begin{array}{lcccc} & m=1 & 2 & 10 & \infty \\ a\lambda_2 < & \frac{1}{0{,}75} & \frac{1}{1{,}26} & \frac{1}{5{,}20} & \frac{1}{0{,}49 \cdot m} \\ \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} : \frac{\Delta z}{\lambda} < & \frac{1}{0{,}75} & \frac{1}{0{,}63} & \frac{1}{0{,}52} & \frac{1}{0{,}49} \end{array}$$

Für den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_2 e^{az}$ ergibt sich durch Grenzübergang

$$a\lambda_2 < \frac{1{,}13 \cdot \pi}{\sqrt{3}} = \frac{1}{0{,}49}; \quad \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} : \frac{\Delta z}{\lambda} < \frac{1}{0{,}49}$$

Gehen wir nun mit 13) in die Grenzbedingung 18) ein, so erhalten wir

$$\frac{E-R}{(E+R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

und daraus

$$23) \qquad R = E\frac{\sqrt{\varepsilon_2}-\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}+\sqrt{\varepsilon_1}} = E\frac{n-1}{n+1}, \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Das ist die bekannte Fresnelsche Reflexionsformel für senkrechte Incidenz. Für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wird $R = 0$. Bei stetigem Übergange der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + az)^m$ resp. $\varepsilon = \varepsilon_1 e^{az}$ findet, so lange $a\lambda_2$ die durch 22) gegebene Grenze nicht überschreitet, keine meßbare Rexion statt; die Welle tritt ungeschwächt von 1 nach 2 über. So wird z. B. die Sonnenstrahlung ungeschwächt in die mit abnehmender Dichte auslaufende Atmosphäre eindringen können.

§ 8. Im zweiten Falle, rasche Änderung des ε durch große Werte von a, führt die semikonvergente Entwicklung

nicht zum Ziele. In Gleichung 18) sondern wir mit Hülfe der Beziehung[1])

$$H_p^{(2)} x = J_p(x) - i\, N_p(x)$$

die reellen Teile ab und erhalten

$$\frac{E - R}{(E + R)\sqrt{\varepsilon_1}} = - \frac{J(x)^{-\frac{1}{m+2}}}{\sqrt{\varepsilon_2}\, N(x)^{\frac{m+1}{m+2}}}$$

Nun gelten für kleine x die asymptotischen Beziehungen[2])

$$J_{-p}^{(x)} = \left(\frac{2}{x}\right)^p \frac{1}{\Pi(-p)}(1 + \delta_1);$$

$$N_p(x) = -\left(\frac{2}{x}\right)^p \frac{1}{\pi}\, \Pi(p-1) \cdot (1 + \delta_2)$$

$$\delta_1 \text{ und } \delta_2 = < \frac{e^{\frac{x^2}{4}} - 1}{|p-1|}$$

und vernachlässigen wir Glieder mit x^2 gegen 1 und setzen die p Werte $-\frac{1}{m+2}$ resp. $\frac{m+1}{m+2}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{E - R}{(E + R)\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}$$

und daraus

$$24)\quad R = E \frac{1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{m}{m+2}} \frac{\Pi}{\Pi^2\left(-\frac{1}{m+2}\right)}}; \quad x = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{2\pi}{a\lambda_2}$$

Da $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ergibt sich für $m = 0$ wieder die Fresnelsche Formel und für $m = \infty$ bei stetigem Übergange $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ tritt vollständige Reflexion ein.

---

[1]) *J.* und *E.*, S. 95.

[2]) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 2 und § 3.

Um die Größe von δ_1 und δ_2 abzuschätzen, bei welcher wir $\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = 1$, δ_1 und δ_2 die in x quadratischen Glieder setzen dürfen, kann für $J(x)_{-\frac{1}{m+2}}$ für alle Werte von m die bekannte Reihenentwicklung angesetzt werden, wodurch sich $\delta_1 = -\frac{x^2}{4}\frac{m+2}{m+1}$ ergibt. Da

$$N_p(x)\sin p\pi = J_p(x)\cdot\cos p\pi - J_{-p}(x),\quad p = \frac{m+1}{m+2},$$

läßt sich für größere Werte von m kein einfacher Ausdruck für δ_2 angeben. Beschränken wir uns auf die kleinen m Werte, $m = 1, 2$, so kommt nur der Wert von $J(x)_{-\frac{m+1}{m+2}}$ in Betracht mit der Folge $\delta_2 = -\frac{x^2}{4}(m+2)$. Somit ergibt sich

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = \frac{1-\frac{x^2}{4}\frac{m+2}{m+1}}{1-\frac{x^2}{4}(m+2)} = 1+\frac{x^2}{4}\cdot\frac{m(m+2)}{m+1}$$

Für sehr große m benützen wir die Beziehung

$$\frac{\pi}{2}N_1 = Y_1\lg x - J_1\lg\frac{2}{\gamma} = J_1(x) - \frac{1}{x}J_0(x) + \frac{3}{1.2}J_3(x) + \cdots + -J_1\lg\frac{2}{\gamma}$$

und erhalten

$$\lim\frac{\pi}{2}N_1 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{2}\lg\frac{2}{\gamma} = -\frac{1}{x}(1+x^2\cdot 1{,}1)$$

und somit

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} = \frac{1-\frac{x^2}{4}}{1+\frac{11}{10}x^2} = 1-\frac{5}{4}x^2$$

Vernachlässigen wir wieder die quadratischen Glieder gegen 1, falls sie $< \frac{1}{100}$ sind, so erhalten wir als Bedingung für Bildung der Gleichung 24)

$$a\lambda_2 > 20\pi \sqrt{\frac{m}{(m+1)(m+2)}} \text{ für kleine } m$$

$$a\lambda_2 > \frac{40\pi}{m} \text{ für große } m$$

und daraus folgende Zahlwerte

25)

$m = 1$	2	∞
$a\lambda_2 > 25{,}6$	$25{,}6$	$\frac{40 \cdot \pi}{m} = \frac{125{,}6}{m}$
$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\Delta z}{\lambda_2} > 51{,}2$	$51{,}2$	$40 \cdot \pi = 125{,}6$

Wir berechnen noch die Amplituden R des reflektierten Lichtes nach Gleichung 24) für diese unterm Grenzwert von $a\lambda_2$ und erhalten für stetigen Übergang $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ nach dem Ansatze $\varepsilon = \varepsilon_1 (1 + az)^m$

für $m = 1$	2	∞
$R > 0{,}15\, E$	$> 0{,}32\, E$,	$= E$

und nach dem Ansatze $\varepsilon = \varepsilon_1 e^{az}$

$$R > 0{,}73\, E.$$

Von diesen unteren Werten an steigt mit wachsendem a die Menge des reflektierten Lichtes bis zur vollständigen Reflexion.

§ 8. Aus den in den beiden letzten Paragraphen gewonnenen Beziehungen ziehen wir einige Folgerungen. Mancherlei Erscheinungen sprechen dafür, daß sich bei Berührung zweier Medien der Übergang der Brechungsexponenten nicht sprungweise, sondern in einer Übergangsschicht stetig vollzieht. Wir versuchen deren Dicke abzuschätzen, haben dabei aber im Auge zu behalten, daß unseren Untersuchungen die Maxwellschen Gteichungen zu Grunde liegen, welche Dispersion ausschließen. Diese regeln die Ausbreitung von Wellen, deren

Dimensionen groß sind gegen molekulare Abmessungen, wie sie etwa in der drahtlosen Telegraphie zur Anwendung kommen. In welcher Annäherung sie auch für den sichtbaren Teil des Spektrums gelten, in welchem allein sicheres Beobachtungsmaterial vorliegt, läßt sich nicht allgemein angeben.

Aus den Beziehungen 22) folgt für senkrechte Incidenz: Bei sprungweisem Übergange von ε_1 in ε_2 gilt die Fresnelsche Reflexionsformel, und tritt bei stetigem Übergang keine Reflexion ein, falls für linearen Anstieg des ε, $m = 1$

$$26) \qquad \Delta z > 0{,}75\,\lambda \cdot \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$$

und treten auch bei stetigem Übergange reflektierte Lichtmengen auf, die sich nach Gleichung 24) berechnen, falls

$$27) \qquad \Delta z < \frac{\lambda}{25}\,\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$$

Für wachsendes m und den Ansatz $\varepsilon = \varepsilon_2\, e^{az}$ ändern sich diese Grenzwerte bis

$$26') \qquad \Delta z > 0{,}5\,\lambda \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} \text{ resp. } 27') \; \Delta z < \frac{\lambda}{126}\,\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$$

Für den Übergang von Luft in Benzol gilt auch im sichtbaren Teile des Spektrums die Maxwellsche Beziehung $n = \sqrt{\varepsilon}$; für gelb ist $n = 1{,}48$, $\sqrt{\varepsilon} = 1{,}49$. Dann ist $\varepsilon = 2{,}2$; $\Delta \varepsilon = 1{,}2$ und nach Gleichung 26) und 26') wird $\Delta z = 0{,}9\,\lambda$ resp. $0{,}6 \cdot \lambda$. Gilt bei senkrechter Incidenz die Fresnelsche Formel, so muß die Dicke der Übergangsschicht kleiner wie diese Beträge, also rund kleiner wie λ sein. Auch bei andern festen und flüssigen Körpern, bei welchen die Maxwellsche Beziehung gilt, ergeben sich Δz von derselben Größenordnung. Um Lichtmengen zu erhalten, wie sie nach der Fresnelschen Formel auftreten müssen und durch die Messung bestätigt werden, braucht an der Grenzfläche kein Sprung der Brechungsexponenten aufzutreten, sondern genügt eine Übergangsschicht von molekularen Abmessungen. (Für Wasser, Luft gilt die Maxwellsche Beziehung nicht; hier ist $\varepsilon = 81$, also $\Delta \varepsilon = 80$. Und

nach 26), 27) ergeben sich $\Delta z > 172\,\lambda$ resp. $112\,\lambda$ und $\Delta z < 3\,\lambda$ resp. $< 0{,}65\,\lambda$).

Wir berechnen weiter nach Gleichung 24) den Betrag an reflektierter Strahlung, den wir bei senkrechter Incidenz sehr langwelliger Strahlung erwarten können. Wir gehen nicht fehl, wenn wir die Dicke Δz der Übergangsschicht, in welcher wir an der Berührungsfläche zweier Körper den Ausgleich der Dielektrizitätskonstanten sich vollziehen lassen, der Größenordnung nach gleich einigen Wellenlängen sichtbarer Strahlung setzen, also in Mikrons messen, was wir durch $\Delta z = [\mu]$ ausdrücken. Den Unterschied der ε setzen wir gleich $\Delta\varepsilon = q\varepsilon$, wobei wie bei Wasser-Luft q bis zu 80 ansteigen kann, berechnen den Wert von a aus der Beziehung $\varepsilon = \varepsilon_1(1 + a\Delta z)^m$ und erhalten $a\Delta z = (1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = q'$. Damit gehen wir in Gleichung 24) ein und erhalten $x = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{2\pi}{q'} \cdot \frac{[\mu]}{\lambda_2}$. Da $\frac{\lambda_2}{[\mu]}$ der Größenordnung nach die Wellenlänge λ_2 in Mikron ausdrückt, ergeben sich so kleine Werte von x, daß bereits für Wellen von einigen Zentimetern Länge $R = E$ wird. Die Wellen der drahtlosen Telegraphie werden deshalb bei senkrechter Incidenz auf Erd- und Wasseroberflächen vollständig reflektiert.

Wir fragen weiter nach dem Verhalten dieser Wellen bei unstetiger, atmosphärischer Schichtung. Der Brechungsquotient der Gase kann angesetzt werden $\mu = 1 + \nu\varrho$, für atmosphärische Luft $\mu = 1 + 0{,}0002927\,\frac{\varrho}{\varrho_0}$, ϱ_0 die normale Luftdichte. Bei der Kleinheit des ν können wir auch setzen $\varepsilon = \mu^2 = 1 + 2\nu\varrho$, also für Luft $\varepsilon = 1 + 0{,}0006\,\frac{\varrho}{\varrho_0}$. Wir nehmen an, daß zwei Luftschichten mit einer Temperaturdifferenz von 10^0 aneinander grenzen und der Ausgleich dieser Temperaturen sich stetig in einer Schicht von der Dicke Δz vollzieht. Da an dieser die Luftschichten unter gleichem Drucke stehen, verhalten sich

die Dichten wie die Temperaturen. Da 1° Temperatur die Dichte um rund 4‰ ändert, unterscheiden sich die Luftdichten um rund 4%. Damit erhalten wir

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = 0{,}0006 \cdot \frac{4}{100} = 2{,}4 \cdot 10^{-5},$$

und damit keine Reflexion eintritt, muß nach § 7 rund sein $\Delta z > 2\lambda \cdot 2{,}4{,}10^{-5} = 5.10^{-5}\lambda$. Beträgt die Wellenlänge k km $= k\,10^5$ cm, so ergibt sich $\Delta z > 5k$ cm. Für Wellen von 10—20 km Länge muß also sein $\Delta z > 0{,}5 - 1$ m. Da so scharf ausgeprägte Schichtung kaum auftreten wird, können wir schließen, daß Temperaturschichtung selbst diese langen Wellen bei senkrechtem Auftreffen ungeschwächt durchgehen läßt. An Wolkengrenzen können die Verhältnisse wesentlich anders liegen. Über die Dielektrizitätskonstanten der Wolken liegen keine Beobachtungen vor; der außerordentlich große Wert des ε für Wasser läßt an der Grenze Luft-Wolke weit größere $\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$ erwarten wie zwischen ungleich temporierten Luftschichten. Nehmen wir dasselbe nur 10 mal größer an wie oben zwischen den beiden Schichten von 10° Temperaturdifferenz, geben also der Wolke ein ε rund $\varepsilon = \varepsilon$ Luft $+ 0{,}00024$, so erhalten wir jetzt $\Delta z > 5$ m $- 10$ m. Da nach meinen Beobachtungen bei Bodennebeln und an Wolken im Gebirge und bei Ballonfahrten sich der Übergang von klarer Luft zu Wolke sich innerhalb dieser Strecken vollziehen kann, sind von Wolken reflektierte Strahlungsmengen zu erwarten. Damit Gl. 24) zur Anwendung kommen kann, müßte allerdings $\Delta z < \frac{k}{10}$ also $< 1-2$ cm sein, was ausgeschlossen erscheint. Nun haben wir bei dieser Überlegung das ε der Wolken sehr niedrig abgeschätzt. Wir können anderseits versuchen, die Dielektrizitätskonstante der Wolken aus ihren Werten für Luft und Wasser nach der Mischungsregel zu berechnen. Nach Hann[1]) sind im

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 6. Aufl., S. 105 ff.

Kubikmeter Wolke höchstens 5—8 Gramm flüssiges Wasser vorhanden. A. Wagner fand auf dem Sonnenblick bei 50 m Sehweite 1,6 g; bei 30 m 3,3 g und bei 25 m Sehweite 4,5 g. Dann erhalten wir nach der Mischungsregel für die Wolke rund bei 1 g Wassergehalt $\varepsilon = \frac{1000 + 80}{1000} = 1{,}08$ und bei 5 g ein $\varepsilon = 1{,}4$, also außerordentlich große Werte, die denen bei vielen flüssigen und festen Körpern nahe kommen. Wie leicht ersichtlich, kann Gl. 24) zur Anwendung kommen, und berechnen wir wie in § 8 das x, so ergeben sich, da $\frac{[\mu]}{\lambda^2}$ jetzt von der Größenordnung 10—20 m/10—20 km wird, so kleine Werte, daß R rund gleich E wird. Ist die Dielektrizitätskonstante der Wolken von einer Größenordnung, wie sie sich durch Berechnung nach der Mischungsregel ergibt, so kann es bei senkrechtem Einfallen der langen Wellen der drahtlosen Telegraphie auf Wolken bis zu Totalreflexion kommen.

Über eine ostafrikanische Naturkatastrophe.

Von **Siegmund Günther.**

Vorgelegt in der Sitzung am 2. November 1918.

Zu den furchtbarsten Ereignissen gehört neben solchen, die sich auf vulkanische oder seismische Einwirkungen zurückführen lassen, zweifellos der Ausbruch einer großen Wassermasse, mag er nun ausschließlich durch Naturkräfte oder auch durch ein wie immer beschaffenes Hereinspielen menschlicher Tätigkeit wenigstens teilweise bedingt sein. Nach dieser letzteren Seite hin ist vorzugsweise an den gewaltsamen Ausfluß von künstlichen Stauseen oder Talsperren zu denken, deren Stirnmauer sich einem ungeheuer gesteigerten Seitendrucke gegenüber zu schwach erwiesen hat; meistenteils sind die in solchem Falle eintretenden Verheerungen weit schlimmer als die Folgen gewöhnlicher Überschwemmungen, obschon uns die Strompathologie, um einen Peschelschen[1]) Ausdruck zu gebrauchen, auch mit schweren morphologischen und wirtschaftlichen Folgen derartiger Vorkommnisse[2]) und der von ihnen häufig abhängigen Stromverlegungen[3]) bekannt ge-

[1]) O. Peschel, Neue Probleme der vergleichenden Erdkunde, als Versuch einer Morphologie der Erdoberfläche, Stuttgart 1878, S. 141 ff.

[2]) Von den vielen Bearbeitungen des Fragenkomplexes, welche die Literatur aufweist, sei als besonders lehrreich die folgende namhaft gemacht: Honsell, Die Hochwasserkatastrophen am Rhein im November und Dezember 1882, Berlin 1883.

[3]) Vgl. hiezu insbesondere Stefanovics von Vilóvo, Ungarns Stromregulierungen, Wien 1883. Seit 140 Jahren stehen diese Probleme auf der wissenschaftlichen Tagesordnung (Zallinger zum Thurn, De causis et remediis inundationum in Tiroli, Innsbruck 1778).

macht hat. Die Möglichkeit eines Talsperrenbruches ist viel geringer geworden, seit Intze[1]) das einschlägige Problem auf eine ganz neue Grundlage zu stellen gelehrt hat. Ganz spontan vermag ferner die Befreiung der irgendwie von einem Gletscher zurückgehaltenen Gewässer zu erfolgen; ein Vorgang, der nur dann verhältnismäßig harmlos sich vollzieht, wenn er bis zu einem gewissen Grade erwartet war, und wenn dem ausströmenden Wasser schon einigermaßen der Weg vorgezeichnet ist, den es zu nehmen hat. So pflegt der nahezu eine gewisse Periode aufweisende Ausbruch des Märjelensees[2]) ohne begleitende Unglücksfälle sich zu vollziehen. Im allgemeinen ist die Frage, von welchen Bedingungen der Austritt des Wassers aus seinem Gletschergefängnis abhängig sein kann, noch keineswegs als geklärt zu erachten; denn es lassen sich von vornherein offenbar zwei Möglichkeiten denken. Es kann die vorwärts schreitende Gletscherzunge einen im Hochgebirge abwärts strömenden Wasserlauf aufstauen, so daß ein See entsteht, und dieser kann sich alsdann, wenn er stark angewachsen, die Gletscherwandung dagegen nach Gossets Ausspruch „porös" geworden ist, den Weg nach aus- und abwärts gewaltsam erzwingen. Andererseits wäre auch an eine „Gletscherstube", d. h. an eine Wasseransammlung im Inneren der Eismasse, zu denken, während beidemale natürlich der Schlußeffekt der nämliche sein müßte. Daß erstere Annahme die physikalisch weit näher liegende ist, versteht sich von selbst, und gar häufig ist auch der Tatbeweis dafür, daß es sich so verhalten kann, an einer Reihe alpiner Geschehnisse

[1]) Intze, Über den Zweck, die erforderlichen Vorarbeiten und die Bauausführung von Talsperren im Gebirge, sowie über deren Bedeutung im wirtschaftlichen Leben der Gebirgsbewohner, Verhandlungen der 70. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, I, S. 61 ff.

[2]) Gosset, Der Märjelensee, Jahrbuch des Schweizer Alpenklubs, 1887, S. 340 ff. Der Bericht eines Augenzeugen (J. V. Widmann, Spaziergänge in den Alpen. Frauenfeld 1892, S. 242 ff.) über den „Rollibock", wie er bei den Deutschen, oder „Bozo", wie der Ausbruch bei den Wälschen im obersten Rhônetale heißt, läßt immerhin erkennen, daß die ganze Naturerscheinung einen schreckhaften Eindruck hervorruft.

erbracht worden[1]). Gegen die andere Auffassung hat sich sachkundiger Widerspruch erhoben[2]), und wie sich ein geschlossener Raum füllen, schließlich aber doch auch wieder entleeren soll, ist nicht leicht abzusehen. Die trefflichen Photogramme jedoch, zu deren Aufnahme die Vernichtung des savoyischen Badeortes St. Gervais im Montblancgebiete Veranlassung gab, haben auch der zweiten Alternative zu einem gewissen Rechte verholfen[3]). Die größtmögliche Wahrscheinlichkeit dürfte indessen dafür sprechen[4]), daß zwar ein interner Gletschersee entstanden war, daß jedoch derselbe von oben her mit der Außenwelt in Verbindung blieb und folglich nur bedingt mit dem vorhin erwähnten Namen belegt werden konnte. Bei den Eruptionen von Vulkanseen, wie sie in Südamerika schon wiederholt wahrgenommen worden sind[5]), wird es sich ähnlich verhalten.

---

[1]) Die Periodizitätsfrage, wenn diese Bezeichnung gestattet ist, behandelt am ausführlichsten an einem Sonderfalle E. Richter (Urkunden über die Ausbrüche des Vernagt- und Gurglergletschers im 17. und 18. Jahrhundert, aus den Innsbrucker Archiven herausgegeben, Stuttgart 1892). Des weiteren gehören hierher: S. Finsterwalder, Die Gletscheraus, brüche des Martelltales, Zeitschrift des deutsch-österreichischen Alpenvereins, 21. Band, S. 21 ff.; E. Richter, Der Gletscherausbruch im Martelltal und seine Wiederkehr, Mitteilungen des deutsch-österreichischen Alpenvereins, 1889, S. 19.

[2]) E Richter, Die Katastrophe von St. Gervais, Globus, 63. Jahrgang, S. 185 ff., zumal S. 190.

[3]) Die maßgebende Arbeit ist diese: Duparc-Vallot-Delebecque-Sur la catastrophe de St. Gervais, Archives des sciences physiques et naturelles, (3) 28. Band, S. 177 ff., S. 460 ff.

[4]) Eingehendere Erörterungen hierüber geben u. a. nachstehende Abhandlungen: S. Finsterwalder, Der Vernagtferner, Wissenschaftliche Ergänzungshefte des deutsch-österreichischen Alpenvereins, I, S. 71; F. Toula, Die Katastrophe von St. Gervais, Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse, XXXIII, Wien 1893, S. 473 ff.; G. Greim, Der Ausbruch des Schwemserferners, Globus, 64. Jahrgang, S. 187 ff.; Durier, La catastrophe de St. Gervais — les Bains, Tour du Monde, 31. Dezember 1892.

[5]) Diese Schlammausbrüche („Lozodales"), bei denen auch nicht selten lebende Fische den Kegel hinabgeschwemmt werden, haben nach

Allen diesen Naturkatastrophen, denen wir auch nach als hier nicht in Betracht kommend Bergrutsche, Muhrbrüche und Gletscher- oder Schneelawinen zuzählen dürfen, liegen nun ganz andere ursächliche Umstände zugrunde als derjenigen, mit der wir es nachstehend zu tun haben werden. Sie ereignete sich erst vor kurzer Zeit, gerade vor dem Kriege, und deshalb ist auch wohl von auswärts noch keine Notiz zu unserer Kenntnis gelangt. Was wir wissen, verdanken wir dem Missionsorden der weißen Väter[1]), dessen Oberer von seinem Genossen, P. Canonica, eine entsprechende Mitteilung erhalten hatte. Am 25. April 1912 war ein Sumpf (Mafunse in der Sprache der Bantu-Neger), östlich vom Flusse Ruvuvu, mit einem male verschwunden. Der letztere mündet, nachdem er den Muwarasi und Luwicosa in sich aufgenommen, in den Kagera, jenen größeren Strom, der mehrfach, wiewohl kaum mit vollem Rechte, als der am meisten diesen Namen verdienende Niloberlauf angesprochen worden ist. Das durch und durch versumpfte Tal war mit einem Schlage in ein sandiges, kieselreiches verwandelt worden, durch welches sich nur noch ein klarer Bach schlängelte. Vom Kamaramagamboberge hatte sich der gewaltige Wasserstrom herabgewälzt, der diese tiefgreifende Wirkung ausübte, und nur vereinzelte Pflanzenreste an den Talrändern ließen ahnen, wie es vorher da ausgesehen hatte. Eine einzige Stunde hatte genügt, um die radikale Umgestaltung zuwege zu bringen, welche von ungeheurem Getöse begleitet war. Menschen und Tiere flohen in größter Eile; soweit letztere nicht von der Flut fortgerissen worden waren, fielen sie unschwer den Eingeborenen als Beute

---

A. v. Humboldt den fraglichen Bergen den Namen der „Wasservulkane" eingetragen. M. Wagner hat in seinem südamerikanischen Reisewerke (Naturwissenschaftliche Reisen, Stuttgart 1870, S. 410 ff.) jene Fischart genauer untersucht und ermittelt, daß man als ihren ursprünglichen Wohnort einen durch Erdstöße gewaltsam geöffneten inneren Behälter anzusehen habe.

[1]) P. J. M. M. van der Burgt, Ein Naturereignis in Urundi (Deutsch-Ostafrika), Petermanns Geographische Mitteilungen, 1913, II, S. 24).

anheim. Fische, meistenteils Aale, blieben in stattlicher Menge zurück. Die Neger glauben, wie P. Canonica von ihnen erfuhr, an eine gewisse Regelmäßigkeit dieser Talausfegung; vor vierzig und vor achtzig Jahren hätten ihre Vorfahren in Urundi[1]) ganz dasselbe erlebt, und dann sei eine gute Ernte (Sorghum, Eleusine) nachgefolgt. Daß man als Urheber des großen Reinigungsaktes ein Ungeheuer (kikoko) gelten lassen wollte, leuchtet einem jeden ein, der etwas mit der Psyche der Naturvölker vertraut ist. Von Erdbeben und Vulkanausbrüchen hat man ja zumeist die nämliche Vorstellung.

P. van der Burgt deutet an, wie man sich vielleicht den Hergang kausal zurecht legen könne. Starke Niederschläge hätten möglicherweise eine Unterspülung der Pflanzendecke bewirkt, und auch die in der Gegend häufigen heißen Quellen[2]) möchten ihren Beitrag geleistet haben. Der das Tal durchziehende Wasserlauf wäre auch wohl imstande gewesen, durch die mitgeführten Detritusmassen einen Damm zu bilden, an dem sich das Wasser staute, und wenn derselbe dann plötz-

---

[1]) Urundi ist das südlichste Land des sogenannten „Zwischenseegebietes" (H. Meyer, Das Deutsche Kolonialreich, eine Länderkunde der deutschen Schutzgebiete, 1. Band, Berlin-Wien 1909, S. 322 ff.), d. h. des Landstriches zwischen Viktoria- und Tanganjikasee; unter den Randländern östlich von letzterem ist es das nördlichste (a. a. O., S. 336) und zugleich die südlichste Fortsetzung von Ruanda. Ehemaliges Plateau, durch die Erosion in eine Vielzahl von Kuppen aufgelöst, stellt es sich dar als ein ausgesprochenes Grasland mit tief eingeschnittenen, von Papyrus erfüllten Tälern, deren eines eben das uns bekannte Schicksal erlitt. Die Bewohner von Urundi sind, den Sprachgesetzen der Bantu zufolge, die Barundi, denen H. Meyer vor kurzem eine selbständige Monographie gewidmet hat (Die Barundi, eine völkerkundliche Studie aus Deutsch-Ostafrika, Leipzig 1916). Auch der uns bereits bekannte P. van der Burgt hat dazu Beiträge geliefert.

[2]) Die Gegenden ostwärts vom Tanganjikasee sind bekanntlich ein typisches Vulkangebiet (H. Simmer, Der aktive Vulkanismus auf dem afrikanischen Festlande und den afrikanischen Inseln, Münchener Geographische Studien, 18. Stück, 1906, S. 92 ff.). Wo sich tätige Feuerberge finden, da ist auch mit dem Vorhandensein von Thermalquellen als mit einer Naturnotwendigkeit zu rechnen.

lich barst, so hätte man — es wird das nicht ausdrücklich gesagt, aber der Vergleich liegt nahe — die gleichen Erfahrungen zu machen gehabt, wie sie der Bruch eines Stauwehrs (s. o.) an die Hand gibt. Man wird nicht in Abrede stellen können, daß es sich da um ganz verständige Gedanken handelt, allein sehr mit Fug meint der Autor, eine wissenschaftliche Bearbeitung seines Berichtes müsse erst noch erwartet werden.

Der Missionar nennt als Hauptbestandteil des ehemaligen Sumpfes die Papyrusstaude[1]). Sie ist es, welche bei der so ausgedehnten Sumpfbildung in Afrika eine geradezu entscheidende Rolle spielte und spielt. Natürlich wirken jedoch auch andere Gewächse mit, so vorzugsweise der Ambadsch (Herminiera Elaphroxylon), der wesentlich dazu beigetragen hat, das südliche Ende des Albertsees zu verfestigen. Hier und am Ukerewe ist die Schwingrasenbildung[2]) in großem Maßstabe fortgeschritten. Da überhaupt im tropischen Afrika nicht heftige Regengüsse hindernd auftreten, unterliegen die Flüsse der Verlandungsgefahr, und es können sich alle jene Formen halb fester, halb flüssiger Pflanzenaggregate herausbilden, mit denen sich die Wissenschaft zu beschäftigen hat[3]).

---

[1]) Ein Verzeichnis der an der Barrenbildung der afrikanischen Flüsse meistbeteiligten Gewächse verdankt man G. Schweinfurth (vgl. die Schrift von O. Deuerling über dieses Phänomen, Münch. Geogr Studien, 24. Stück, 1909, S. 177 ff.). Darunter spielt eine Hauptrolle Cyperus Papyrus L., auch unter dem Namen Papyrus antiquorum bekannt, von Schweinfurth (a. a. O., S. 101) als „Vater der Hindernisse" der Flußschiffahrt gekennzeichnet.

[2]) Unter Schwingrasen verstehen Früh und Schröter (Die Moore der Schweiz, Bern 1904, S. 54 ff.) „stark verfilzte, bis über 1 m mächtige, zusammenhängende Rasendecken, welche auf wasserdurchtränkter Unterlage aufruhen oder auf dem Wasser schwimmen und beim Auftreten deutlich in schwingende (oft buchstäblich wellenförmige) Bewegung geraten." Es sind meist Depressionen mit torfigem Boden, über die sich der nahezu ebene, flottierende Rasenteppisch erstreckt.

[3]) In der genannten Schrift von Deuerling treten als solche auf die schwimmenden Inseln, die Obä oder Flußwiesen und die Ssedds; letzteres ist der arabische Name für die zwar schon lange bekannten und gefürchteten, aber erst ziemlich spät durch Marno und Emin

Moore in dem uns geläufigen Wortsinne[1]) finden verhältnismäßig seltener Erwähnung, allein die Flüsse und Seen des oberen Kageragebietes können sehr wahrscheinlich auch hierher gerechnet werden, insofern zum mindesten der Moorcharakter mit dem der Obä[2]) und Ssedds[3]) abwechselt. Mancher in die Karten eingetragene Fluß ist in Wirklichkeit blos ein ungeheurer Papyrussumpf auf mooriger Unterlage. So stellte Junker[4]) z. B. am Kafu, einem Nebenflusse des Bahr el Abiad fest, daß er zwar mehrere hundert Schritte breit erschien, daß aber der größte Teil dieser Breite auf die Papyrusvegetation entfiel. Zweifellos ist ohne die Zuhilfenahme der Hypothese eines ausgedehnten Vermoorungsprozesses die auch für die Kageragegend so überzeugend nachgewiesene Entstehung gigantischer Papyrus- und Ambadschsümpfe kaum verständlich; die Ansicht, Torfmoorbildungen seien in der Tropenzone überhaupt etwas Unerhörtes, läßt sich in dieser Allgemeinheit nicht aufrecht erhalten.

Gerade die Moore nun, mögen sie der einen oder anderen Klasse der Frühschen Nomenklatur angehören, unterliegen

---

Pascha einer genetischen Untersuchung gewürdigten Pfanzenbarren, die übrigens auch in Asien und Amerika (a. a. O., S. 37 ff.) keineswegs unbekannt sind. Jene Treibinseln wurden schon vor mehr denn zweihundert Jahren bemerkt, haben jedoch erst viel später die ihnen zukommende Würdigung erfahren (Munz, De insulis natantibus, Altdorf 1711; Früh, Schwimmende Inseln, 2. Jahrgang, S. 216 ff.; Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band, Stuttgart 1899, S. 633 ff.).

[1]) Zu Frühs Klassifikation (s. o.) möge noch hinzutreten das Buch von Senfft (Die Humus-, Marsch-, Torf- und Limonitbildungen, Leipzig 1862).

[2]) Diese Gebilde hat zuerst der große Reisende Junker in die Geographie eingeführt (Reisen in Zentralafrika, I, Peterm. Geogr. Mitteil., Ergänzungsheft Nr. 92, S. 19 ff.).

[3]) Vgl. Junker, a. a. O., II, S. 73 ff.; Deuerling, a. a. O., S. 83 ff., S. 110 ff.

[4]) Auch diese Beobachtung Junkers (a. a. O., III, S. 595) ist von bleibendem Werte. Vgl. auch De Martonne (Die Hydrographie des oberen Nilbeckens, Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin, 32. Band, S. 326). Auch er bezeugt, daß die Tributären des Kafu durchweg sumpfige Papyruswälder sind.

gelegentlich einem Zerstörungsprozesse, der mit demjenigen, welche der obengenannte Talsumpf von Urundi zum Opfer fiel, die entschiedenste Ähnlichkeit besitzt. Diesem Probleme hat neuerdings Klinge[1]) besondere Aufmerksamkeit zugewendet. Ein Moor schwillt mitunter unter begleitenden Geräuschen plötzlich an, und indem die Decke an einer schwachen Stelle zerbricht, ergießt sich ein dunkler Schlammstrom über das nächst anliegende Gelände. Völlig das gleiche Bild würde sich auch in Urundi geboten haben, wenn der Akt selbst von einem halbwegs aufmerksamen Beobachter verfolgt worden wäre, während wir eben so, wie die Dinge llegen, lediglich auf eine Schilderung der Folgeerscheinungen uns angewiesen sehen. Das klassische Land der Moorkatastrophen ist das regenreiche Irland, dieses natürliche Wasserkissen, welches unter dem Einflusse des die Küsten bespülenden Golfstromes unausgesetzt mit Feuchtigkeit getränkt wird. Die erste chronologisch festzustellende Episode dieser Art verlegte Bronn[2]) auf das Jahr 1745. Ein zweites mal barst ein irländisches Torfmoor bei Tullamoore in Leinster am 8. Juli 1821; wir können uns für diesen Ausbruch auf das Zeugnis des bekannten Geologen v. Leonhard[3]) berufen. Der Strom durchmaß mit enormer Geschwindigkeit die Gefilde der Umgebung, bis er sich einen Weg ins Meer geöffnet hatte, seine Oberfläche gewährte den Anblick schäumenden, gährenden Bieres, und seine Tiefe wurde auf 60 (engl.) Fuß geschätzt. Wiederum sah Irlands Westküste bei Sligo in Connaught einen Vorfall dieser Art im Januar 1831, und am 17. September 1835 wurde in Ulster der Fluß

---

[1]) J. Klinge, Über Moorausbrüche, (Englers) Botanische Jahrbücher für Systematik, Pflanzengeschichte und Pflanzengeographie, 14. Bd., S. 426 ff. Ein deutsches Analogon bespricht A. v. Naegelein: Über Moorausbrüche, Mitteilungen des Vereins zur Förderung der Moorkultur, 16. Band (1898), S. 35 ff.

[2]) H. G. Bronn, Handbuch einer Geschichte der Natur, 2. Band, Heidelberg 1843, S. 498 ff.

[3]) K. C. v. Leonhard, Mineralogisches Taschenbuch, 1823, S. 861 ff. Wohl der erste Versuch, sich mit den einschlägigen Erscheinungen theoretisch auseinanderzusetzen.

Maine aufgestaut[1]). Von einer „Moorlawine" nächst einer „Stadt Kanturk" wird aus dem Jahre 1840 berichtet; am 26. Januar 1883 platzte ein Hochmoor bei Castlereagh in Connaught[2]), und die schlimmste Katastrophe war die, welche am 27. und 28. Dezember 1896 das Knocknawaymoor in Munster auseinander sprengte[3]). Aus unseren Angaben erhellt, daß alle vier Provinzen der Grünen Insel von Mooreruptionen betroffen worden sind, so daß es sich verbietet, an die Bevorzugung dieser oder jener Erdstelle durch die auslösenden Agentien zu denken. In der Tat lassen sich auch den irischen Phänomenen solche in anderen Ländern gegenüber stellen. Das an der Grenze zwischen England und Schottland gelegene Solwaymoor wurde am 16. Dezember 1772 vernichtet[4]). Klinge vermochte zwei Berichte aus Java und einen Bericht

---

[1]) Vgl. W. P. Hunter, Bericht über den Ausbruch eines Torfmoores in der Grafschaft Antrim, Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geognosie, Geologie und Petrafaktenkunde, 1839, S. 482 (Übersetzung aus dem Maihefte des „Magazine of Natural History", 1836). Es sind darin auch allgemeine Erörterungen über die hibernischen Moore enthalten.

[2]) Klinge, a. a. O., S. 429. Die Notiz über den Moorausbruch von Kanturk (?) brachte die Zeitschrift „Das Ausland" (13. Jahrgang, S. 83 ff.), die sich wieder auf das „Echo du Monde Savant" (8. Januar 1840) bezog. Die auf Castlereagh bezüglichen Angaben wurden dem Werke von Röttger (Das Wetter und die Erde, Jena 1885, S. 159 ff.) entnommen.

[3]) Es liegt bei Killarney, in der äußersten Südwestecke der Insel. Als die Nachricht von dem großartigen Naturereignis die Hauptstadt erreichte, entsandte die Royal Dublin Society zu dessen Untersuchung eine Kommission, deren Führer der bekannte Geologe W. J. Sollas (Oxford) war. Aus dem in den „Proceedings" jener Akademie niedergelegten Berichte ist ein ausführlicher deutscher Bericht veröffentlicht worden (Der jüngste Moorausbruch in Irland, Deutsche Rundschau für Geographie und Statistik, 20. Jahrgang, S. 75 ff.). Es wird u. a. mitgeteilt, daß schon vor dem genauer bekannten Falle von 1745, mit welchem Klinge (s. o.) seine Liste beginnt, 1697 und 1708 schwere Zerstörungen auf diese Weise angerichtet worden seien. Auch sonst wird Klinges Verzeichnis noch etwas vermehrt.

[4]) Hierüber verbreitet sich, anscheinend als einziger Originalschriftsteller, Ch. Lyell (Principles of Geology, 2. Band, London 1867, S. 503).

von der esthländischen Insel Dagöe ausfindig zu machen. Auch unser Vaterland bleibt nicht ganz unbeteiligt. Von fremden Erdteilen kommt wesentlich nur Südamerika in Betracht, und zwar sind es dort einerseits die Falkland-Inseln und andererseits, gerade entgegengesetzt, der Staat Columbia, aus deren Bereiche verwandte Mitteilungen in die Öffentlichkeit gelangt sind[1]). Was allerdings diese letzterwähnte Katastrophe anlangt, so kann ihre Ursache nicht eindeutig aufgeklärt werden. Den columbischen Tagesblättern zufolge ergossen sich am 19. Februar 1845 gewaltige Massen dunklen Schlammes über die Küstenebene, so daß nach kurzer Zeit „auf 4 Quadratstunden über 250,000,000 Tonnen" — dies die naive Ausdrucksweise des deutschen Referates — angesammelt waren. Ob nicht vielleicht auch an die Betätigung eines Schlammsprudels[2]) zu denken wäre, bleibe dahingestellt; ferne läge der Gedanke jedenfalls nicht. Denn eine der wenigen autoptischen Angaben über die Eruption eines Schlammvulkans[3]) würde sich mit unserem spärlichen Wissen von dem, was sich 1845 im nördlichen Südamerika zutrug, gut vereinbaren lassen.

---

[1]) Daß die Falkland-Inseln der Schauplatz eigenartiger Bewegungen von jener Art sind, wie sie uns E. Reyer (Bewegungen in losen Massen, Jahrbuch der K. K. Geologischen Reichsanstalt, 31. Band, S. 432 ff.) näher kennen gelehrt hat, ist eine Tatsache (s. auch B. Stechele, Die Steinströme der Falkland-Inseln, Münch. Geogr. Studien, 20. Stück, 1906). Die morphologischen Folgen des Lagunilla-Vorkommnisses — dieser ist ein Nebenfluß des Magdalenenstromes — machte in Deutschland bekannt ein an eine englische Quelle (Quarterly Geological Journal, 1845, S. 410 ff.) sich haltender Artikel (Neues Jahrbuch etc., 1845, S. 862 ff.).

[2]) Wir machen hier Gebrauch von der zweckmäßigeren Terminologie W. v. Gümbels (Das Eruptionsmaterial der Schlammvulkane von Paterno, Sitzungsberichte der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Mathem.-Physik. Klasse, 1879, S. 217). Nicht jeder „Schlammvulkan" hat eben etwas zu tun mit endogenen Agentien.

[3]) Abrinzkij, Ausbruch eines Schlammvulkans auf der Halbinsel Taman, Neues Jahrbuch etc., 1856, S. 715 fl. Vgl. über den Gegensatz zwischen Schlammsprudeln uud ächten vulkanischen Schlammauswürfen auch A. Supan, Grundzüge der physischen Erdkunde, Leipzig 1916, S. 413 ff.

Den ursächlichen Zusammenhang der sich bei einer Mooreruption vereinigenden Vorgänge scheint zuerst Lesquereux[1]) näher untersucht zu haben, nachdem Bronn[2]) mit einer kurzen Andeutung vorangegangen war. Der französische Autor nimmt an, daß die unteren Schichten eines Moores durch einsickerndes Wasser in eine breiartige Masse verwandelt seien, und diese dränge, wenn ihre Durchtränkung ein bestimmtes Maß einmal erlangt habe, nach auswärts, könne ihre Befreiung aber, da ihr der umgebende feste Grund einen zu starken Widerstand entgegensetze, nur durch Aufsprengung der über ihr liegenden Decke erreichen. So urteilt auch Senfft[3]), der das in den Beschreibungen als charakteristisch hervorgehobene blasenförmige Auftreiben der von unten her wirkenden Kräfte besonders als maßgebend betrachtet. Etwas, jedoch nur mehr graduell verschieden war die Auffassung, welche sich Noeggerath von dem Wesen des Ausströmungsprozesses gebildet hatte[4]). Neben dem Wasser läßt er nämlich eine kräftige Gasentwicklung als eine der das Platzen bewirkenden Triebfedern gelten; halbflüssige und gasförmige Stoffe vereinigten sich, und

---

[1]) Lesquereux-Lengerke-Lasius-Sprengel, Untersuchungen über die Torfmoore im allgemeinen, Berlin 1847, S. 165 ff.

[2]) Bronn, a. a. O., 2. Band, Stuttgart 1896, S. 496.

[3]) Senfft, Die Torfmoorbildungen, Gaea 1881, S. 173 ff.

[4]) Die in einer nachgelassenen Schrift dieses Geologen (Der Torf, Berlin 1875, S. 12) zur Geltung gekommene Anschauung weicht nicht eben von derjenigen ab, die oben dargelegt ist. Früher allerdings bestand ein gewisser Gegensatz, indem Noeggerath die „intermittierenden Torfinseln“ (s. o.) mit den schwimmenden Inseln überhaupt und mit den „Schwebemooren“ (auf Cuba als „trembladores“ bekannt; s. G. Marinelli, La Terra, 1. Band, Mailand 1884, S. 460) auf gleiche Stufe stellt. Anscheinend tat er dies nur bei einer Diskussion des von einem nicht weiter zu identifizierenden Bonner Gelehrten Schmidt (Neu entstandene Torfinsel im Berlersee in Holstein, Verhandlungen der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn, 16. Dezember 1852) gehaltenen Vortrage. Ganz zutreffend bemerkt Klinge (a. a. O., S. 441), Noeggerath habe da mehrere ihrem Wesen nach verschiedenartige Naturerscheinungen ohne Berechtigung der nämlichen Kategorie eingeordnet. Die Ähnlichkeiten sind blos äußerliche.

das Aufbersten der Decke war das Ergebnis. Beiläufig sei konstatiert, daß bereits v. Leonhard[1]) die Gärung als ein Hauptmotiv des Ausbruches von Tullamoore (s. o.) angesprochen hatte.

Die am meisten erschöpfende Arbeit über die Kausalbedingungen der Ausbrüche ist unstreitig die von Klinge, dessen Ansichten dann auch ein erprobter Kenner des in Rede stehenden Problemzyklus, Früh in Zürich[2]), in der Hauptsache beigepflichtet hat. Es wird grundsätzlich die Meinung abgelehnt, daß „gewaltsame Wasserfiltrationen von unten her" das bestimmende Agens der sogenannten Eruptionen seien[3]); was Junghuhn[4]) in Niederländisch-Indien (s. o.) beobachtet, gäbe den sichersten Schlüssel für das Verständnis an die Hand[5]). Nicht nach und nach bilde sich die tiefer gelegene breiige Schicht, welche man lange für die Aufblähung und Zersprengung der ganzen Moormasse habe verantwortlich machen wollen, sondern nur plötzlich und gewaltsam eingedrungene Wassermengen vermöchten solchen Effekt hervorzubringen. Nicht die typischen Eigenschaften des Moores als solchen spielen eine bedeutsame Rolle, und so ist der Moorausbruch vielmehr als nächster Verwandter jener Schlamm-

---

[1]) v. Leonhard, Mineralogisches Taschenbuch, 1823, S. 861 ff.

[2]) J. Früh, Moorausbrüche, Globus, 72. Jahrgang, S. 213 ff.

[3]) Klinge, a. a. O., S. 253.

[4]) F. Junghuhn, Java, seine Gestalt, Pflanzendecke und innere Bauart, deutsch von Haßkarl, II, Leipzig 1854, S. 375 ff. Der betreffende Abschnitt hat die Überschrift: „Erhebung von Teilen der Erdoberfläche und Bildung neuer Hügel auf Java." Die Bewohner des Ambarawatales hatten während des Vorbereitungsstadiums eine der dort ja gar nicht seltenen Kraterneubildungen erwartet, allein das Emporsteigen und Zerbrechen des gehobenen Bodenstückes spielte sich ohne jede vulkanische Begleiterscheinung ab. Eine sehr eingehende Inhaltsübersicht des wertvollen Werkes verdankt man M. C. P. Schmidt (Franz Junghuhn, biographische Beiträge zur 100. Wiederkehr seines Geburtstages gesammelt und bearbeitet, Leipzig 1909, S. 137 ff.).

[5]) Klinge, a. a. O., S. 453. Die Darstellung des Javaforschers liefert für den Autor die volle Bestätigung der von ihm aufgestellten Theorie.

ergüsse anzusehen, welche als Erdschlipfe oder Muhrbrüche[1]) längst bekannt sind. Wohl möglich, daß auch bei tieferem Eindringen in deren Entstehungsgeschichte Spuren derartiger Umwälzungen in geologisch älteren Schichtfolgen erkennbar sind[2]). Soviel also darf als gewiß hingenommen werden, daß Irland nicht sowohl als Heimat vieler Moore, sondern vielmehr nur als ein ungewöhnlich niederschlagsreiches Gebiet das klassische Land der Moorausbrüche geworden ist, weil eben nirgendwo sonst so gute Gelegenheit zur Bildung ausgiebiger Grundwasseransammlungen, der unerläßlichen Vorbedingung jedes Überquellens der aufgespeicherten Schlammvorräte, vorhanden ist.

Die britischen Fachleute, von deren Studien an dem überschwemmten Gelände von Killarney vorhin die Rede war, haben sich zum Teile der von Klinge vertretenen Doktrin angeschlossen, während andere mehr an die Einflüsse unterirdischer Quellen denken und auch die Mitwirkung von Erderschütterungen nicht als ausgeschlossen erachten möchten[3]). In manchen Fällen sei eine kombinierte Aktion der verschiedenen Momente wahrscheinlich, in anderen jedoch sei das Moor eben nur die Örtlichkeit gewesen, welche ihrer geringeren Widerstandsfähigkeit halber dem aufstrebenden Bodenwasser die beste Gelegenheit geboten habe, sich als zerstörendes Element zu offenbaren.

---

[1]) Vgl. Günther, Handb. d. Geophysik, 2. Band, S. 899 ff. Die umfassendste Analyse dieser Gattung von „Massentransporten" rührt her von F. Frech (Über Muhren, Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereins, 29. Band, S. 1 ff.). Ihnen ist auch in seinem kleinen Lehrbuche ein stattlicher Raum zugeeignet worden (Allgemeine Geologie, 3. Aufl., Leipzig 1917/18).

[2]) Klinge, a. a. O., S. 458 ff. Die in manchen Flözen anzutreffenden vertikal stehenden Baumstämme fossilen Charakters weisen möglicherweise hierauf hin. In anderem Sinne hat viel früher v. Leonhard (Min. Taschenb., a. a. O.) einen Gedanken angedeutet; die vom Meere verschlungenen Stämme sollten die Quellen aufstauen.

[3]) Vgl. auch einen zweiten deutschen Bericht (H. J. Klein, Jahrbuch der Astronomie und Geophysik, X, S. 268 ff.).

Mit diesen Einsichten ausgerüstet, kehren wir zurück zu den Nachrichten van der Burgts, welche uns zur Erkundung des ein selbständiges Kapitel der Geomorphologie behandelnden Schrifttums veranlaßt haben. Daß von einem Moorausbruche in dem durch die irländische Landeskunde nahe gelegten Sinne nicht gesprochen werden könne, dürfte keinem Zweifel unterliegen; Vermoorung ist zwar, wie wir uns überzeugten, auch in Innerafrika nicht vollständig ausgeschlossen, aber das Auftreten richtiger Moore ist für Urundi gewiß nicht nachgewiesen. An die ältere Doktrin eines Lesquereux und Senfft (s. o.) dürfen wir sonach nicht denken. Diejenige von Klinge und Früh hingegen verdient es vollauf, unserer Prüfung der näheren Umstände der Urundi-Katastrophe zu grunde gelegt zu werden.

Das Tal des Ruvuvuflusses war, wie wir wissen, bis zum Frühling 1912 einer jener ungeheuren Papyrus- und Ambadschsümpfe, wie sie die Bodenbeschaffenheit eines großen Teiles des Seengebietes bestimmen. Es hatte im Jahre zuvor sehr stark geregnet, und wenn auch nach Canonica (s. o.) im nächsten Jahre, eben dem der großen Veränderung, die Niederschläge nicht ungewöhnlich reichlich gefallen waren, so genügte doch die aufgespeicherte Regenmenge, um das Grundwasser über seinen durchschnittlichen Stand zu erhöhen und die ihm eigene Expansionstendenz auf den Grad zu bringen, wie er erforderlich war, um den an sich lockeren Boden, auf dem die Sumpfpflanzen gewachsen waren, noch viel unsicherer und schwankender zu machen[1]). Alsdann genügt eine kurze Regenzeit

[1]) Solchen ergiebigen Regen erhalten die dem Indischen Ozean einigermaßen benachbarten Landschaften, zu denen auch Urundi zählt, vom Indischen Ozean her (Supan, a. O., S. 163). Indessen dringt er nicht zu allen Jahreszeiten tief in das Innere des Kontinentes ein. Immerhin darf der Jahresniederschlag des Zwischenraumes zwischen Viktoria- und Tanganiykasee auf ungefähr 1000 bis 2000 mm veranschlagt werden; er entfällt hauptsächlich auf die Sommermonate. Wahrscheinlich reichen die ganz und gar vom Passate abhängigen „Seeregen" (J. Hann, Handbuch der Klimatologie, 3. Band, 2. Teil, Stuttgart 1911 S. 460) von Natal her, wo sie sich am meisten bemerklich machen, noch

in der Übergangsjahreszeit, um auslösend zu wirken und sozusagen den Schlußstein einzusetzen. Sowie das geschehen, sowie die Spannung des Bodenwassers über jene Grenze hinaus gelangt war, stürzte sich dasselbe mit der ganzen Energie eines Schwellhochwassers[1]) von den höheren Regionen, wo es einem bekannten physikalischen Gesetze zufolge kräftiger als weiter abwärts geregnet hatte, in die Tiefe hinab und rasierte förmlich alle die Pflanzenbestände, durch welche seinen Weg zu nehmen ihm vorgezeichnet war, von der Oberfläche hinweg. Und auch, was sich als unmittelbare Folgeerscheinung zeigte, stimmt vollkommen mit dem überein, was die Klingesche Hypothese, angewandt auf unseren Fall, erwarten ließ.

Bei den gewöhnlichen Moorausbrüchen pflegt „ein See oder Teich von klarem Wasser“[2]) die Stelle des Kataklysmus zu bezeichnen; zurückgebliebene Moorsubstanz ist nicht erkennbar. Statt der im ebenen Lande selbstverständlichen Reliktenseen war in Urundi nur ein Reliktenbach, dessen Wasser gleichfalls fremder Beimengungen entbehrte, als letzter Zeuge übrig geblieben, ein Überrest des versumpften und nun so gründlicher Reinigung anheim gefallenen Flusses. Alle diese einzelnen Belege zusammenfassend, hat man gewiß das Recht, zu sagen: Die wenigen zuverlässigen Daten, welche uns bezüglich der Umgestaltung des Ruvuvutales zu gebote stehen, lassen sich ungezwungen mit der neueren Hypothese für die Entstehung der uneigentlich so genannten Moorausbrüche vereinbaren.

---

weiter nach Norden hinauf. Ihr auszeichnendes Merkmal ist das Gebundensein an hohen Barometerstand.

[1]) Wir schlossen uns hier der von Penck (Morphologie der Erdoberfläche, 1. Band, Stuttgart 1894, S. 267) vorgeschlagenen Einteilung der Überschwemmungen in Stau- und Schwellhochwasser an.

[2]) Klinge, a. a. O., S. 451.

Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon.

Von F. Lindemann.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1918.

Wie bei dem Parabelpolygon die Differentialgleichung aller Parabeln den Ausgangspunkt für die Behandlung des Problems in meiner früheren Abhandlung[1]) bildet, so hier bei dem allgemeinen Problem die Differentialgleichung fünfter Ordnung aller Kegelschnitte. Durch Einführung der Variabeln $z = x + iy$ und $z_1 = x - iy$ läßt sie sich in eine Differentialgleichung vierter Ordnung in z', z'', z''', $z^{(4)}$ umformen (wo die oberen Striche die Differentiation nach Z, d. i. nach der Variabeln in der Bildebene andeuten), deren linke Seite außer diesen Größen z', z'' . . . Funktionen von z_1 und z, z_1' und z' usf. enthält, die auf dem Rande des Polygons reell sind und sich infolgedessen als Funktion von Z bestimmen lassen, da ihre in den Brennpunkten der Kegelschnitte und in den Ecken des Polygons liegenden singuläreu Punkte bekannt sind, und da auch ihr Verhalten in den entsprechenden Bildpunkten sich bestimmen läßt. Es ergibt sich schließlich nach Ausführung einer Quadratur eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung für z, deren Koeffizienten von den Lösungen W einer anderen Differentialgleichung abhängen, die dadurch gegeben wird, daß der Schwarzsche Differentialausdruck $\{W, Z\}$ gleich einer rationalen Funktion von Z sein muß. Die Formeln für

[1]) Diese Sitzungsberichte, oben S. 203 ff.

das Parabelpolygon entstehen, wenn die durch die erste Quadratur eingeführte willkürliche Konstante gleich Null genommen wird. Es entsteht dann eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, deren Koeffizienten sich in den singulären Punkten verhalten wie rationale Funktionen (deshalb aber nicht, wie in meiner letzten Arbeit gesagt wurde, selbst rationale Funktionen sind).

§ 1. Die Differentialgleichung der Kegelschnitte.

Bei unserer Behandlung des Abbildungsproblems für ein Parabelpolygon gingen wir von der Differentialgleichung der Parabel

$$3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} - 5\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = 0 \tag{1}$$

aus. Die linke Seite der Gleichung ist eine Reciprokante im Sinne Sylvesters[1]); zur Abkürzung wenden wir dessen Berechnungsweise an und setzen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a,\quad \frac{d^3y}{dx^3} = b,\quad \frac{d^4y}{dx^4} = c,\quad \frac{d^5y}{dx^5} = d; \tag{2}$$

dann erscheint die Gleichung (1) in der Form

$$P \equiv 3ac - 5b^2 = 0. \tag{3}$$

Entsprechend benutzen wir jetzt die Differentialgleichung der allgemeinen Kurve zweiter Ordnung in der Form:[2])

$$L \equiv 9a^2d - 45abc + 40b^3 = 0. \tag{4}$$

Die linke Seite läßt sich auf P und P'_x (den Differentialquotienten von P nach x) zurückführen; es ist nämlich

$$P'_x = 3ad - 7bc; \tag{5}$$

---

[1]) Sylvesters Arbeiten über Reciprokanten sind abgedruckt in Bd. IV seiner Mathematical Papers, Cambridge 1912.

[2]) Diese Gleichung hatte ich a. a. O. unter Bezugnahme auf eine Abhandlung von Halphen abgeleitet. Wie Sylvester (l. c. p. 283 und 380) bemerkt, wurde sie schon von Monge aufgestellt: Corresp. sur l'École Polytechnique, Paris, II, 1809—13, p. 51—54.

folglich wird:

$$L = 3a \cdot P'_x - 8b \cdot P. \tag{6}$$

In der Tat muß ja die Gleichung $L = 0$ auch von allen Parabeln erfüllt sein.

Ebenso muß sich L auf die linke Seite der Differentialgleichung aller Kreise, nämlich

$$K \equiv (1 + t^2)b - 3a^2 t = 0, \quad \text{wo } t = \frac{dy}{dx}, \tag{7}$$

zurückführen lassen. Es ist:

$$K'_x = (1 + t^2)\, c - 4abt - 3a^3$$
$$K''_x = (1 + t^2)\, d - 2act - 4b^2 t - 13a^2 b$$

und folglich:[1])

$$-L \cdot a \cdot t = K \cdot (3ad - 13bc) + 13K'_x \cdot b^2 - 3K''_x ab. \tag{8}$$

In ähnlicher Weise wird man ein von gewissen Parametern abhängiges System von Kegelschnitten durch eine Differentialgleichung charakterisieren können; durch die linke Seite derselben und durch die Differentialquotienten dieser linken Seite wird sich dieser unserer Ausdruck L darstellen lassen. Es sei dies noch an einem weiteren Beispiele gezeigt.

Die Kegelschnitte mit gemeinsamem Mittelpunkt im Anfangspunkte, deren Hauptaxen mit den Koordinatenaxen zusammenfallen, sind gegeben durch:

$$Ax^2 + By^2 - 1 = 0, \quad \text{also: } Ax + Byt = 0$$
$$A + Bt^2 + Bay = 0;$$

durch Elimination von A und B findet man:

$$M \equiv t(y - xt) - axy = 0$$

folglich durch Differentiation nach x:

[1]) Das Bestehen von Relationen der Form (6) und (8) kann man auch aus einem allgemeinen Satze Sylvesters schließen, nach welchem das von ihm mit G bezeichnete Operationssymbol (a. a. O., p. 394), welches zur Ableitung höherer Reciprokanten aus niederen dient und die partiellen Differentialquotienten a, b, c . . . enthält, sich auf eine Differentiation nach x zurückführen läßt.

$M' = -bxy - 3axt$; dies gesetzt $= -M_1 x$; dann ist:

$$M_1' = cy + tb + 3a^2 + 3bt$$

$bM_1 - cM_1 = 4tb^2 + 3a^2 b - 3act$, gesetzt $= M_2$; dann ist

$$M_2 = 10ab^2 + t(5bc - 3ad),$$

also: $$M_2(5bc - 3ad) - M_2(4b^2 - 3ac)$$
$$= ab(45abc - 40b^3 - 9a^2 d) = -abL,$$

wenn L wieder durch (4) definiert ist. Nun wird:

$$M_1 = -\frac{M'}{x}, \quad M_1' = \frac{M' - xM''}{x^2}, \quad M_2 = \frac{bM' - bxM'' + cxM'}{x^2}$$

$$M_2 = \frac{1}{x^3}[(dx^2 - 2b)M' + 2bM''x - bx^2 M'''],$$

also:

$$abx^3 \cdot L = M'[x^2(4b^2 d - 5bc^2) + x(3abd - 5b^2 c)$$
$$+ 6abc - 8b^3] + M''[x^2(5b^2 c - 3abd) + x(8b^3 - 6abc)]$$
$$+ M'' bx^2(3ac - 4b^2).$$

Hier ist L eine Differentialinvariante für die Gruppe aller ebenen Kollineationen, M eine Differentialinvariante für die Gruppe der Transformationen $\xi = ax$, $\eta = \beta y$. In analoger Weise wird sich allgemein eine Differentialinvariante einer Gruppe rational darstellen lassen durch die Differentialinvarianten einer Untergruppe und durch deren Differentialquotienten.

Es kommt (wie bei den Parabeln a. a. O.) darauf an, statt der Differentialquotienten von y nach x oder von x nach y die Differentialquotienten von x und y nach einem Parameter X einzuführen. Setzen wir

$$x' = \frac{dx}{dX}, \; x'' = \frac{d^2 x}{dX^2}, \; y' = \frac{dy}{dX}, \; y'' = \frac{d^2 y}{dX^2} \cdots,$$

so ist bekanntlich:

$$t = \frac{y'}{x'}, \quad a = \frac{y''x' - x''y'}{x'^3}, \quad \text{und wenn}$$

$$U = y''x' - x''y', \quad U' = \frac{dU}{dX}, \quad U'' = \frac{d^2 U}{dX^2}$$

gesetzt wird:

$$a = \frac{U}{x'^3}, \quad b = \frac{U'x' - 3Ux''}{x'^5},$$

$$c = \frac{U''x'^2 - 7U'x'x'' + 15Ux''^2 - 3Ux'x'''}{x'^7}, \tag{9}$$

$$d = \frac{1}{x'^9}[U'''x'^3 - 12U''x'^2x'' + 57U'x'x''^2 - 10U'x'^2x''' + U(48x'x''x''' - 105x''^3 - 3x'^2x^{(4)})]$$

Diese Ausdrücke wären in die Gleichung (4) einzuführen. Es ist einfacher, zunächst den Differentialausdruck P umzuformen und dann L (d. i. die linke Seite von (4)) mittelst (6) zu berechnen. Es ergibt sich

$$P = \frac{1}{x'^{10}}[3 \cdot U(U''x'^2 - 7U'x'x'' + 15Ux''^2 - 3Ux'x''') - 5 \cdot (U'x' - 3Ux'')^2]$$

$$= \frac{1}{x'^9}[-9U^2x''' + 9UU'x'' + (3UU'' - 5U'^2)x'], \tag{10}$$

also ferner:

$$P'_x = \frac{P'_X}{x'} = \frac{1}{x'^{10}}[3UU'''x' + 12UU''x'' - 7U'U''x' + 4U'^2x' + 9UU'x'''] \tag{10a}$$

$$- \frac{9}{x'^{11}}[-9U^2x''' + 9UU'x'' + (3UU' - 5U'^2)x']x''$$

$$= \frac{1}{x'^{11}}[81U^2x''x''' - 9UU'(x'''x' + 9x''^2) - (15UU'' - 41U'^2)x'x'' + (3UU''' - 7U'U'')x'^2]$$

und es wird:

$$x'^{14} \cdot L = 3UP'x' - 8(U'x' - 3Ux'')P, \tag{11}$$

wo P' den Differentialquotienten von P nach X bezeichnet, oder entwickelt:

$$27U^3x''x''' + 45U^2U'x'x''' - 27U^2U'x''^2 + 3U(9UU'' - 23U'^2)x'x'' - (9U^2U''' - 45UU'U'' + 40U'^3)x'^2 = 0. \tag{11a}$$

§ 2. Die Differentialgleichung des Problems.

Die Gleichung $L = 0$ ist für alle Kurven zweiter Ordnung erfüllt. Führt man statt der Variabeln x und y die Variabeln

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad z_1 = x - iy,$$

ein, so wird die allgemeinste Gleichung zweiten Grades in x, y ersetzt durch eine ebenso allgemeine Gleichung zwischen z und z_1. Dabei ist

$$z_1'' z' - z_1' z'' = -2i(y'' x' - x'' y').$$

Setzen wir also

$$(12) \quad -2iU = V = z_1'' z' - z_1' z'', \quad V' = \frac{dV}{dX} = z_1''' z' - z_1' z''' \cdots,$$

$$(12a) \quad \Pi = \frac{1}{z'^9}[-9V^2 z''' + 9VV' z'' + (3VV'' - 5V'^2) z'], \quad \Pi' = \frac{d\Pi}{dX}$$

so geht zufolge (11) die Differentialgleichung $L = 0$ über in:

$$(13) \qquad 3V \cdot \Pi' \cdot z' - 8(V' z' - 3Vz'')\Pi = 0.$$

Gelingt es, die Ausdrücke V, V', V'' . . . oder ihre Verhältnisse als Funktion von $Z = X + iY$ darzustellen, so gibt (13) eine Differentialgleichung, welche z als Funktion von X längs der das gegebene Flächenstück begrenzenden Kegelschnitte (d. h. in der Z-Ebene längs der reellen Axe) definiert und welche folglich nach dem Prinzipe der Fortsetzung auch für die ganze obere Halbebene z als Funktion von Z im Sinne der gestellten Abbildungsaufgabe liefert.

Als singuläre Punkte der Funktionen V, und damit der Integrale der Differentialgleichung (13), kommen auf dem Rande des gegebenen Flächenstückes die Ecken des Polygons in Betracht, im Innern desselben die Brennpunkte der den Rand bildenden Kegelschnitte, bzw. die diesen Punkten in der Halbebene $Y > 0$ entsprechenden Punkte. Der Beweis dafür ist genau, wie bei den Parabelpolygonen meiner früheren Abhandlung. Da die durch (12) gegebene Funktion V nur in Wendepunkten der Kurve verschwindet, auf welcher der Punkt x, y (d. i. z, z_1) liegt, so kommen andere singuläre Punkte nicht in

Betracht. Eine Ausnahme von dieser Betrachtung tritt ein, wenn einer der Kegelschnitte in eine gerade Linie ausartet; dann ist die Gleichung (13) identisch erfüllt. Man wird diesen Fall als Grenzfall im folgenden mit einschließen können.

§ 3. Die Ecken des Polygons als singuläre Punkte.

Die zu betrachtende Polygonecke liege im Nullpunkte ($z = 0$); wir denken uns eine Transformation gegeben, welche die beiden dort zusammenstoßenden Kegelschnitte in zwei unter dem gleichen Winkel zusammentreffende gerade Linien verwandelt; diese in der Umgebung der Stelle $z = 0$, welcher die Stelle $\zeta = 0$ entsprechen möge, konforme Abbildung sei durch die Gleichung

$$z = F(\zeta) \tag{14}$$

dargestellt, in welcher die rechts stehende Funktion F noch von einer willkürlichen Funktion abhängt, da das aus der z-Ebene auf die ζ-Ebene abzubildende Gebiet in der Umgebung der Stelle $z = 0$ noch durch eine willkürliche Kurve (die den Winkelraum zwischen den beiden Kegelschnitten abschließt) begrenzt zu denken ist. Der eine Kegelschnitt sei durch die Gleichung

$$z = \frac{a_1 t + a_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2} \tag{14 a}$$

in seiner Parameterdarstellung gegeben; dabei sind a_1 und a_2 komplexe, hingegen c_0, c_1, c_2 reelle Konstante. Durch Auflösung ergibt sich hieraus

$$t = \varphi(z) = f(\zeta), \tag{14 b}$$

wo die Funktion $\varphi(z)$ in der Umgebung von $z = 0$ holomorph ist, denn sie hat nur in den Brennpunkten des Kegelschnittes singuläre Punkte; sie hängt folglich auch holomorph von ζ ab. Reellen Werten von t entsprechen reelle Punkte des Kegelschnittes; und es kann die Funktion F so gewählt werden, daß ihnen auch reelle Werte von ζ zugehören. Durch die Transformation

(15) $$\zeta = Z^{\lambda}$$

werden dann, wenn $\lambda\pi$ den Winkel des Polygons an der Ecke $z = 0$ also auch den Winkel zwischen den beiden durch die Transformation (14) erzeugten geraden Linien bedeutet, diese beiden (den Kegelschnitten entsprechenden) Geraden der ζ-Ebene in die reelle Axe der Z-Ebene übergeführt, so daß auf dem ersten Kegelschnitte reellen Werten von ζ auch reelle Werte von Z entsprechen, und es werde

(16) $$t = f(\zeta) = f(X^{\lambda}) = \psi(X) = \varphi(z)$$

gesetzt. Sei nun

(16a) $$U = \frac{d^2 z_1}{dt^2}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{dz_1}{dt},$$

so wird längs des ersten Kegelschnittes:

(17) $$\left(\frac{V'}{V}\right)_1 = \frac{U'}{U}\cdot\psi'(X) + 3\,\frac{\psi''}{\psi'}, \quad \text{wo } U' = \frac{dU}{dt},$$

$$= \left[\frac{U'}{U}\cdot\varphi'(F)F'(\zeta_1) + 3\,\frac{\varphi''(F)}{\varphi'(F)}F'(\zeta_1) + 3\,\frac{F''(\zeta_1)}{F'(\zeta_1)}\right]\zeta_1' + 3\,\frac{\zeta_1''}{\zeta_1'},$$

wo ζ_1' den Differentialquotienten von ζ_1 nach X bezeichnet und ζ_1 ein Punkt der Kurve (14a) ist.

Der zweite Kegelschnitt sei durch die Gleichung

(17a) $$z = \frac{b_1\tau + b_2\tau^2}{e_0 + e_1\tau + e_2\tau^2}$$

in seiner Parameterdarstellung gegeben, und umgekehrt, analog zu (16):

$$\tau = \chi(z).$$

In der Z-Ebene geschieht der Übergang von dem ersten zum zweiten Kegelschnitte dadurch, daß man X durch $Xe^{\pi i\lambda}$ ersetzt; in der Umgebung von $z = 0$ wird damit jedem Punkte des ersten ein Punkt des zweiten Kegelschnittes zugeordnet. Man kann daher setzen:

(17b) $$\tau = \chi(z) = \chi(F(\zeta_2)) = \chi(F(\zeta_1 e^{\pi i\lambda})) = \Phi(t),$$

wo ζ_2 einen Punkt der Kurve (17a) bezeichnet. Auf dem zweiten Kegelschnitte ist dann:

$$(17\,c)\quad \left(\frac{V'}{V}\right)_2 = \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \cdot \chi'(F'(\zeta_2))F'(\zeta_2) + 3\frac{\chi''(F'(\zeta_2))}{\chi'(F(\zeta_2))}F'(\zeta_2) + 3\frac{F''(\zeta_2)}{F'(\zeta_2)}\right]\zeta_2' + 3\frac{\zeta_2''}{\zeta_2'},$$

wo nun:

$$(17\,d)\qquad \zeta_2' = \zeta_1' e^{\pi i\lambda},\quad \frac{\zeta_2''}{\zeta_2'} = \frac{\zeta_1''}{\zeta_1'} = \frac{\lambda - 1}{X}.$$

Hier wird ferner, wenn man gemäß (17 b) τ als Funktion von t auffaßt:

$$U_t = \Phi'(t)^3 U_\tau,\quad \left(\frac{U'}{U}\right)_t = \left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \Phi'(t) + 3\frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)}.$$

Die Gleichungen (17) und (17 c) gelten für die Punkte je eines der beiden Kegelschnitte; nach dem Prinzipe der stetigen Fortsetzung ist folglich für einen beliebigen Punkt ζ in der Umgebung der Stelle $\zeta = 0$ (bzw. $Z = 0$)

$$\frac{V'}{V} = \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \varphi'(F)F'(\zeta)\Phi'(t) + 3\frac{\varphi''(F)}{\varphi'(F)}F'(\zeta) + 3\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} + 3\varphi'(F)F'(\zeta)\frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)}\right]\zeta' + 3\frac{\zeta''}{\zeta'} = \left[\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau \chi'(F)F'(\zeta) + 3\frac{\chi''(F)}{\chi'(F)}F'(\zeta) + 3\frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right]\zeta' + 3\frac{\zeta''}{\zeta'},$$

(18)

wo nun t und τ als Funktionen von z bzw. ζ gemäß (14 b) und (17 b) einzusetzen sind. Diese Gleichung aber ist eine Identität; erstens nämlich haben wir:

$$\chi'(F) - \varphi'(F)\Phi'(t) = 0,$$

denn diese Gleichung ist mit der Identität

$$\Phi'(t) = \frac{d\tau}{dt} = \frac{\dfrac{d\tau}{dz}}{\dfrac{dt}{dz}}$$

gleichbedeutend, und hieraus folgt die weitere Identität

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \varphi'\frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{\chi''}{\chi'}.$$

Die Identität (18) gilt insbesondere für $\zeta = \zeta_1$ und für $\zeta = \zeta_2$. Die linke Seite ist auf dem Rande (sowohl für $X > 0$ als für $X < 0$) reell, also auch die rechte Seite. Nun ist $\zeta' = \lambda Z^{\lambda-1}$ auf dem ersten Kegelschnitte reell, auf dem zweiten gleich einer reellen Zahl mal $e^{\pi i \lambda}$, während $\zeta'' : \zeta'$ nach (17 d) auf beiden Kurven reell ist. Infolgedessen läßt sich der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} U' \\ U \end{pmatrix}_\tau \varphi'(F) F'(\zeta) \Phi'(t) + 3 \frac{\varphi''}{\varphi'} F'(\zeta) + 3 \frac{F''(\zeta)}{F'(\zeta)} + 3 \varphi'(F) F'(\zeta) \frac{\Phi''(t)}{\Phi'(t)} \tag{19}$$

in eine nach Potenzen von $\zeta = Z^\lambda$ fortschreitende Reihe der Form

$$C_0 + C_1 Z^\lambda + C_2 Z^{2\lambda} + C_3 Z^{3\lambda} + \cdots \tag{19 a}$$

entwickeln, die in der Umgebung von $Z = 0$ konvergent ist und reelle Koeffizienten C_i besitzt. Auf dem zweiten Kegelschnitte wird diese Reihe gleich (ab $X = R$ gesetzt)

$$C_0 + C_1 R^\lambda e^{\pi i \lambda} + C_2 R^2 e^{2\pi i \lambda} + C_3 R^3 e^{3\pi i \lambda} + \cdots$$

und muß dann infolge der Identität (18) gleich demselben Ausdrucke (19) sein, wenn man dort $\zeta = \zeta_1$ durch $\zeta_2 = \zeta_1 e^{\pi i \lambda}$ ersetzt, und muß ferner nach Multiplikation mit $e^{\pi i \lambda}$ (wegen des Faktors ζ_2') auf dieser zweiten Kurven ebenfalls reelle Werte annehmen, denn die linke Seite von (18) ist auf beiden Randkurven reell. Hieraus ergibt sich aber, daß alle Konstanten C_i gleich Null sind. Denselben Schluß kann man wiederholen, wenn man von dem nach obigem zu (19) äquivalenten Ausdrucke in der zweiten eckigen Klammer der Gleichung (18) ausgeht.

Der Übergang von der ζ-Ebene zur Z-Ebene geschah durch die Gleichung $\zeta = Z^\lambda$, welche den Winkelraum zwischen den beiden betrachteten Geraden der ζ-Ebene in seiner ganzen Ausdehnung auf die obere Halbebene ($Y > 0$) der Z-Ebene abbildet, während durch die Gleichung $z = F(\zeta)$ ein endlicher Teil aus der Umgebung der betrachteten Ecke ($z = 0$) des Polygons auf einen endlichen Teil des genannten Winkel-

raumes abgebildet wurde und dieser Teil dann auf die Halbebene weiter abzubilden war. Allgemein werden wir daher

$$\zeta = Z^{\lambda} \cdot (c_0 + c_1 Z + c_2 Z^2 + \cdots) \tag{19 b}$$

zu setzen haben. Aus dem Verschwinden der in (19 a) eingeführten Konstanten C_i folgt daher nicht, daß der Quotient $V' : V$ gleich $3(\lambda - 1) X^{-1}$ zu setzen sei, sondern daß derselbe nur gleich diesem Ausdruck bis auf eine hinzutretende Potenzreihe ist, denn aus (19 b) erhält man an Stelle von (17 d) allgemein:

$$\frac{\zeta''}{\zeta'} = \frac{\lambda - 1}{X} + \gamma_0 + \gamma_1 X + \gamma_2 X^2 + \cdots$$

Ersetzen wir noch den Punkt $z = 0$ durch eine beliebige Ecke $z = a$ des Polygons mit dem Winkel $\lambda\pi$, und den Punkt $Z = 0$ durch einen beliebigen reellen Punkt $X = A$, so folgt, daß die Funktion

$$\frac{V'}{V} - 3\,\frac{\lambda - 1}{Z - A} \tag{20}$$

in der Umgebung der Stelle $Z = A$ nicht mehr singulär ist; damit haben wir die erste Gleichung (20) meiner früheren Abhandlung (S. 209 dieser Sitzungsberichte) wieder gewonnen. Für Parabeln, auf die sich die damalige Untersuchung bezog, vereinfachen sich vorstehende Formeln dadurch, daß die Funktion U' identisch Null wird. Führt man die Funktion $f(\zeta)$ mittels (14 b) ein, so führt das Verschwinden des Ausdrucks (19) auf die Gleichung

$$f'(\zeta) = 0.$$

In der Umgebung von $Z = 0$ ist also im Falle des Parabelpolygons t eine quadratische Funktion von Z^{λ}:

$$t = \alpha Z^{\lambda} + \beta Z^{2\lambda}, \tag{20 a}$$

denn bei den Parabeln ist der Nenner der Gleichung (14 a) bzw. (17 a) durch 1 zu ersetzen.

Aus der an (20) geknüpften Bemerkung folgt das Resultat:

Wenn mit A_1, A_2 ... diejenigen Punkte der X-Axe in der Z-Ebene bezeichnet werden, die den Ecken a_1.

$a_2 \ldots$ des gegebenen Kegelschnittpolygons entsprechen sollen und sind $\lambda_1 \pi_1$, $\lambda_2 \pi_2 \ldots$ die Winkel in diesen Ecken, so ist die Differenz

$$\frac{V'}{V} - 3 \sum_s \frac{\lambda_s - 1}{Z - A_s} \tag{21}$$

an den Stellen A_s nicht mehr singulär.

Hierbei sind die Zahlen λ_s von Null verschieden vorausgesetzt; auf den Fall $\lambda = 0$ kommen wir am Schlusse zurück (vgl. § 11).

§ 4. Die Brennpunkte als singuläre Punkte.

In denjenigen Brennpunkten der begrenzenden Kegelschnitte, welche im Innern des gegebenen Polygons liegen, verhält sich die Funktion $V' : V$ ebenso, wie es bei dem Parabelpolygon auseinandergesetzt wurde. Sind p und q Brennpunkte eines solchen Kegelschnittes, so erhält man durch Auflösung seiner in z und z_1 quadratischen Gleichung eine Formel der Form:

$$z_1 = a z + b + A \sqrt{(z-p)(z-q)} = a z + b + \sqrt{R}, \tag{22}$$

wo a, b und A Konstante bezeichnen, also durch Differentiation nach Z

$$z_1' = a z' + \tfrac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} R' z'$$
$$z_1'' = a z'' - \tfrac{1}{4} R^{-\frac{3}{2}} R'^2 z'^2 + \tfrac{1}{2} R^{-\frac{1}{2}} (R'' z'^2 + R' z'')$$

und hieraus:

$$V = z_1'' z' - z'' z_1' = \tfrac{1}{2} R^{-\frac{3}{2}} z'^3 (R R'' - \tfrac{1}{2} R'^2),$$

folglich, da die Klammer der rechten Seite gleich einer Konstanten ist:

$$\frac{V'}{V} = 3 \frac{z''}{z'} - \frac{3}{2} \frac{R'}{R},$$

d. h. eindeutig in der Umgebung der beiden Punkte $z = p$ und $z = q$, demnach auch eindeutig an den entsprechenden Stellen der Halbebene $Y > 0$, insofern die Brennpunkte im Innern des Polygons liegen. Werden diese Stellen mit P und Q

bezeichnet und seien P_1 und Q_1 die konjugiert imaginären Punkte (also Punkte der unteren Halbebene), so ist folglich die Funktion

$$(23) \qquad \frac{V'}{V} - \frac{\delta}{Z-P} - \frac{\delta'}{Z-Q} - \frac{\delta_1}{Z-P_1} - \frac{\delta_1'}{Z-Q_1}$$

holomorph in der Umgebung dieser singulären Punkte; dabei sind δ, δ' gewisse Konstante und δ_1, δ_1' die konjugiert imaginären Konstanten. Wir werden in § 5 sehen, daß $\delta = \delta' = \delta_1 = \delta_1' = -\frac{3}{2}$ zu setzen ist.

Zur näheren Erläuterung dieser Schlüsse muß man das gegebene Polygon an dem betrachteten Kegelschnitte „spiegeln", was mittelst der Formel (22) geschieht, und dann verfolgen, was aus den Brennpunkten, die im Innern liegen, wird, genau wie bei den Parabeln in meiner früheren Arbeit. Wir kommen darauf in § 8 zurück.

§ 5. Die Integration der aufgestellten Differentialgleichung.

Die Gleichung (13) kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$3\frac{\Pi'}{\Pi} - 8\left(\frac{V'}{V} - 3\frac{z''}{z'}\right) = 0$$

und erlaubt also ein erstes Integral in der Gestalt:

$$3\lg \Pi - 8\lg V + 24\lg z' = C$$

oder:

$$(24) \qquad \Pi^3 \cdot z'^{24} = C' V^8, \quad \Pi = C'' V^{\frac{8}{3}} z'^{-8},$$

wo C'' eine Konstante bedeutet; und die Gleichung (12a) wird infolgedessen:

$$-9V^2 z''' + 9VV'z'' + (3VV'' - 5V'^2)z' = C''z' \cdot V^{\frac{8}{3}}$$

oder:

$$(25) \quad z''' - \frac{V'}{V}z'' - \left(\frac{1}{3}\frac{V''}{V} - \frac{5}{9}\frac{V'^2}{V^2}\right)z' + CV^{\frac{8}{3}}z' = 0,$$

wo C wieder eine Konstante bedeutet. Ist letztere gleich Null, so erhalten wir die Gleichung, von welcher das Problem

der konformen Abbildung eines Parabelpolygons abhängt, nämlich:

$$(25\,a) \qquad z''' - \frac{V'}{V} z'' - \left(\frac{1}{3}\frac{V''}{V} - \frac{5}{9}\frac{V'^2}{V^2}\right) z' = 0.$$

Die Koeffizienten von z', z'' verhalten sich an den singulären Stellen wie rationale Funktionen, denn wir sahen in den beiden vorhergehenden Paragraphen, daß man für jeden singulären Punkt A_i eine Konstante ε_i so bestimmen kann, daß die Differenz

$$\frac{V'}{V} - \sum_i \frac{\varepsilon_i}{Z - A_i}$$

an der Stelle A_i nicht mehr singulär ist. Dabei kann A_i ein Punkt der reellen Axe (einer Ecke entsprechend) sein oder ein einem Brennpunkte entsprechender Punkt der Halbebene $Y > 0$, bzw. ein hierzu konjugierter Punkt der Halbebene $Y < 0$. In der Umgebung eines jeden singulären Punktes kann daher auf die Gleichung (25 a) die Fuchssche Theorie der linearen Differentialgleichungen angewandt werden. Für den singulären Punkt A lautet die determinierende Fundamentalgleichung:

$$(25\,b) \qquad \varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2) - \varepsilon\varrho(\varrho - 1) + \tfrac{1}{3}(3\varepsilon + 2\varepsilon^2)\varrho = 0$$

oder:

$$\varrho^3 - \varrho^2(\varepsilon + 3) + \varrho\tfrac{2}{3}(\varepsilon + 3)^2 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\varrho' = 0, \quad \varrho'' = \tfrac{1}{3}(\varepsilon + 3), \quad \varrho''' = \tfrac{2}{3}(\varepsilon + 3).$$

Für eine Ecke des Polygons ist nach (20): $\varepsilon = 3(\lambda - 1)$, also die Lösung von der Form

$$z = a_i + (Z - A_i)^{\lambda_i}\mathfrak{P}_1(Z - A_i) + (Z - A_i)^{2\lambda_i}\mathfrak{P}_2(Z - A_i),$$

wenn $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen bedeuten. Es ist dies in Übereinstimmung mit Gleichung (20 a). Um die Potenzreihen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ aufzustellen, muß zuvor die Funktion V noch näher bestimmt sein; diese Bestimmung von V wird uns in § 7 beschäftigen.

Ist die Parabel in der Form

$$Z = (\alpha' + i\alpha'')X^{\lambda} + (\beta' + i\beta'')X^{2\lambda} \tag{25c}$$

durch ihre Parameterdarstellung gegeben, wobei Potenzen von X mit dem Exponenten $\lambda + 1$ vernachlässigt sind, und wo $a = 0$, $A = 0$ gedacht ist, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\delta = \frac{\alpha'' + 2\beta'' X^{\lambda}}{\alpha' + 2\beta' X^{\lambda}},$$

und, wenn X den Faktor $e^{\pi i}$ erhält, für die nächste Parabel

$$\frac{d'y}{d'x} = \frac{\alpha''\cos\lambda\pi + \alpha'\sin\lambda\pi + X^{2\lambda}(\beta''\cos 2\lambda\pi - \beta'\sin 2\lambda\pi)}{\alpha'\cos\lambda\pi - \alpha''\sin\lambda\pi + X^{2\lambda}(\beta''\cos 2\lambda\pi + \beta'\sin 2\lambda\pi)} = \operatorname{tg}\delta',$$

folglich für $X = 0$: $\operatorname{tg}\delta' = \operatorname{tg}(\delta + \lambda\pi)$, wie es sein muß.

Liegt der singuläre Punkt A in einem Brennpunkt, so muß die determinierende Fundamentalgleichung (25b) neben der Wurzel $\varrho = 0$ mindestens eine Wurzel $\varrho = 1$ haben. Es ergibt sich also

$$\varepsilon = 0 \text{ oder } \varepsilon = -\tfrac{3}{2}. \tag{25c}$$

Im ersteren Falle ergibt sich als dritte Wurzel der Wert 2, im zweiten Falle der Wert $-\frac{1}{2}$. Da ε von Null verschieden sein muß, so kann nur dieser zweite Fall eintreten; es muß also für einen Brennpunkt $\varepsilon = -\frac{3}{2}$ genommen werden.

Das Verhalten der Integrale an der Stelle $Z = \infty$ wird in § 6 näher erörtert werden.

Ist in (25) C von Null verschieden, so kann die Fuchssche Theorie nicht angewandt werden; man findet aber in diesem Falle, sobald die Funktion V bekannt ist, durch folgenden Ansatz eine Lösung der Differentialgleichung.

Infolge der Relation (21) kann in der Umgebung der singulären Stelle A gesetzt werden:

$$V = (Z - A)^{3\lambda - 3} \cdot \mathfrak{P}(Z - A), \tag{25b}$$

wo $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe bedeutet. Multiplizieren wir also die linke Seite von (25) mit $(Z - A)^3$, so erscheint diese Differentialgleichung in der Form:

$$(Z-A)^3 z''' + (Z-A)^2 p_1(Z-A)\cdot z'' + [(Z-A)p_2(Z-A)$$
$$+ (Z-A)^{2\lambda+1} p_3(Z-A)]z' = 0, \tag{25c}$$

wobei λ eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung derjenigen Differentialgleichung bezeichnet, welche aus (25) entsteht, wenn die Konstante C gleich Null ist. Wir schreiben diese Gleichung in der Form:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + x^2 \cdot p_1(x) \frac{d^2y}{dx^2} + [x p_2(x) + x^{2\varrho+1} p_3(x)] \frac{dy}{dx}$$
$$\equiv P(y) + x^{2\varrho+1} p_3(x) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{25d}$$

und setzen für y eine nach n und ν genommene Doppelsumme ein:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{n\nu} \cdot x^{\nu}; \tag{25e}$$

dann wird

$$P(y) = \sum_n \sum_\nu [g_{n\nu} f_0(n\varrho+\nu) + g_{n,\nu-1} f_1(n\varrho+\nu-1) + \cdots$$
$$+ g_{n,1} f_{\nu-1}(n\varrho+1) + g_{n0} f_\nu(n\varrho)]\, x^{n\varrho+\nu},$$

wenn

$$P(x^\varrho) = x^\varrho f(x,\varrho) = x^\varrho \sum_\nu f_\nu(\varrho)\, x^\nu,$$

$$f(x,\varrho) = \varrho(\varrho-1)(\varrho-2) + \varrho(\varrho-1)p_1(x) + \varrho\, p_2(x)$$

gesetzt wird. Es wird ferner:

$$x^{2\varrho+1} p_3(x) \frac{dy}{dx} = (\pi_0 + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \cdots)$$
$$\times \sum_n \sum_{\nu=0} [(n+2)\varrho + \nu + 1]\, g_{n\nu} x^{(n+2)\varrho+\nu}.$$

Ordnet man nun die linke Seite der Differentialgleichung nach Potenzen von x und setzt die Koeffizienten derselben einzeln gleich Null, so ergibt sich zur Bestimmung der Koeffizienten $g_{n\nu}$ das folgende System von Gleichungen:

$$g_{10} f_0(\varrho) = 0, \quad \text{also } f_0(\varrho) = 0,$$
$$g_{11} f_0(\varrho+1) + g_{10} f_1(\varrho) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{1\nu} f_0(\varrho+\nu) + g_{1,\nu-1} f_1(\varrho+\nu-1) + \cdots + g_{10} f_\nu(\varrho) = 0;$$

ferner $\quad g_{20} = 0, \; g_{21} = 0, \; \ldots \; g_{2\nu} = 0;$

und weiter:

$$(3\varrho+1)\pi_0 g_{10} + g_{30} f_0(3\varrho) = 0,$$
$$(3\varrho+1)\pi_1 g_{10} + (3\varrho+2)\pi_0 g_{11} + g_{31} f_0(3\varrho+1) + g_{30} f_1(3\varrho) = 0,$$
$$(3\varrho+1)\pi_2 g_{10} + (3\varrho+2)\pi_1 g_{11} + (3\varrho+2)\pi_0 g_{12} + g_{32} f_0(3\varrho+2) + g_{31} f_1(3\varrho+1) + g_{30} f_2(3\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das erste System liefert die Koeffizienten $g_{1,\nu}$, das zweite die Koeffizienten $g_{2,\nu}$, welche sämtlich verschwinden, das dritte die Koeffizienten $g_{3,\nu}$, vorausgesetzt, daß ϱ eine Wurzel der determinierenden Fundamentalgleichung der Gleichung $P(y) = 0$, nämlich

$$f_0(\varrho) = 0$$

bedeutet und daß in der Differentialgleichung (25 d) im Faktor von $p_3(x)$ dieselbe Wurzel ϱ im Exponenten von x erscheint. Man erhält ferner:

$$g_{40} = 0, \quad g_{41} = 0, \quad \ldots \quad g_{4,\nu} = 0,$$
$$(5\varrho+1)\pi_0 g_{30} + g_{50} f_0(5\varrho) = 0,$$
$$(5\varrho+1)\pi_1 g_{30} + (5\varrho+2)\pi_0 g_{31} + g_{51} f_0(5\varrho+1) + g_{50} f_1(5\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{60} = 0, \quad g_{61} = 0, \quad \ldots \quad g_{6,\nu} = 0,$$
$$(7\varrho+1)\pi_0 g_{50} + g_{70} f_0(7\varrho) = 0,$$
$$(7\varrho+1)\pi_1 g_{50} + (7\varrho+2)\pi_0 g_{51} + g_{71} f_0(7\varrho+1) + g_{70} f_1(7\varrho) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

usw. Es ergeben sich also alle Koeffizienten $g_{n,\nu}$ mit geradem Index n gleich Null, während die mit ungeradem Index n aus diesem Systeme von linearen Gleichungen berechnet werden können. Vorausgesetzt ist dabei, daß keiner der Ausdrücke

$$f_0(\varrho+1), \; f_0(\varrho+2), \; \ldots \; f_0(3\varrho), \; f_0(3\varrho+1), \; \ldots$$
$$f_0(5\varrho), \; f_0(5\varrho+1), \quad \ldots \; f_0(7\varrho), \; f_0(7\varrho+1), \; \ldots$$

verschwindet. Tritt dies ein, so würden Logarithmen in die Lösung eingehen können. Im allgemeinen erscheint hiernach ein Integral der Differentialgleichung (25 d) in der Form (25 e) durch eine unendliche Reihe darge-

stellt. Die Konvergenz dieser Reihe ist durch den allgemeinen Beweis für die Möglichkeit der Lösung des Abbildungsproblems mit gesichert. Da die Gleichung (25 d) von der zweiten Ordnung in y' ist, so kann ein zweites Integral durch Quadratur gefunden werden. Für unsere Abbildungsaufgabe kommt indessen nur das in (25 e) gefundene Integral in Betracht, da dieses die Verwandlung des Winkels π der Z-Ebene in den Winkel $\lambda\pi$ der z-Ebene in Analogie zu der für Parabeln geltenden Formel (25 c) für den singulären Punkt $x = 0$ $(Z = A)$ vermittelt.

Bei einem Umgang von Z um den Punkt A ändert sich infolge der Gleichung (25) die Konstante C in der Differentialgleichung (25 d) um einen Faktor $e^{2\pi i(3\lambda-3)}$, und unsere Lösung y geht in eine Lösung der so entstehenden neuen Differentialgleichung über, bei der alle Koeffizienten π_i der Reihe $p_3(x)$ sich um einen Faktor geändert haben.

In unserem Falle sind $\varrho = \lambda$ und $\varrho = 2\lambda$ Wurzeln der Fundamentalgleichung $f_0(\varrho) = 0$; man kann daher ein zweites Integral der Gleichung (25 d) auch auf folgendem Wege finden. Man setze

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} g'_{n\nu} x^{\nu} \tag{25 f}$$

und führe die entsprechenden Rechnungen aus; dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&g'_{10} f_0(2\varrho) = 0, \text{ also } f_0(2\varrho) = 0,\\
&g'_{11} f_0(2\varrho+1) + g'_{10} f_1(2\varrho) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g'_{1\nu} f_\nu(2\varrho+\nu) + g'_{1,\nu-1} f_1(2\varrho+\nu-1) + \cdots + g'_{10} f_\nu(2\varrho) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g'_{20} = 0,\ g'_{21} = 0, \ldots g'_{2\nu} = 0,\\
&(6\varrho+1)\pi_0 g'_{10} + g'_{30} f_0(6\varrho) = 0,\\
&(6\varrho+1)\pi_1 g'_{10} + (6\varrho+2)\pi_0 g'_{11} + g'_{31} f_0(6\varrho+1)\\
&\qquad + g'_{30} f_1(6\varrho) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&g'_{40} = 0,\ g'_{41} = 0, \ldots g'_{4\nu} = 0,\\
&(10\varrho+1)\pi_0 g'_{30} + g'_{50} f_0(10\varrho) = 0,\\
&(10\varrho+1)\pi_1 g'_{30} + (10\varrho+2)\pi_0 g'_{31} + g'_{51} f_0(10\varrho+1)\\
&\qquad + g'_{50} f_1(10\varrho) = 0 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (25 d) kann daher in der Form

$$C_0 + Cy + C_1 y_1 \tag{25 g}$$

aufgestellt werden, wo y durch (25 e), y_1 durch (25 f) definiert sind und wo C_0, C und C_1 Integrationskonstante bedeuten.

§ 6. Der Einfluss des unendlich fernen Punktes der Z-Ebene.

Der unendlich ferne Punkt der Z-Axe soll kein singulärer Punkt der Abbildung sein; z muß sich also in der Umgebung desselben in der Form

$$z = c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_1}{Z^2} + \cdots$$

entwickeln lassen. Für den konjugiert-imaginären Wert gilt dann die Entwicklung

$$z_1 = c_0' + \frac{c_1'}{Z_1} + \frac{c_2'}{Z_1^2} + \cdots,$$

wo c_i' zu c_i konjugiert sein soll. Auf dem Rande, zu dem der Punkt $Z = \infty$ gehört, ist $Z = Z_1 = X$, folglich:

$$z_1'' z' - z_1' z'' = \frac{c_1 c_2' - c_2 c_1'}{X^6} + \cdots = \frac{1}{X^6}(b_0 + b_1 X^{-1} + b_2 X^{-2} + \cdots)$$

und somit gilt im Unendlichen die Entwicklung:

$$\frac{z_1''' z' - z''' z_1'}{z_1'' z' - z'' z_1'} = \frac{V'}{V} = -\frac{6}{X}(1 + b_1 X^{-1} + b_2 X^{-2} + \cdots), \tag{26}$$

wo mit b_1, b_2, ... Konstante bezeichnet sind, und zwar auch (nach dem Prinzip der Fortsetzung), wenn jetzt X durch den allgemeinen Wert Z ersetzt wird.

Um den Einfluß des Punktes $Z = \infty$ auf die Differentialgleichung (25) zu beurteilen, transformieren wir die letztere mittelst der Substitution

$$Z = T^{-1}. \tag{27}$$

Führt man zunächst statt V eine andere Funktion R mittelst der Gleichung

$$\frac{V'}{V} = -\frac{3}{2}\frac{R'}{R}, \quad V = C' \cdot R^{-\frac{3}{2}} \tag{28}$$

ein, wo C' eine Konstante bedeutet, so nimmt die Differentialgleichung die einfachere Gestalt an:

$$z''' + \frac{3}{2}\frac{R'}{R}z'' + \left(\frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{C}{R}\right)z' = 0, \tag{29}$$

die für einige Beispiele (unten § 10) zur Anwendung kommt; und infolge der Substitution (27) geht sie über in:

$$\frac{d^3z}{dT^3} + \left(6T - \frac{3}{2}\frac{R'}{R}\right)\frac{1}{T^2}\frac{d^2z}{dT^2} + \left(6T^2 - 3\frac{R'}{R}T + \frac{1}{2}\frac{R''}{R} + \frac{C}{R}\right)\frac{1}{T^4}\frac{dz}{dT} = 0. \tag{30}$$

Zufolge (26) und (28) ist

$$\frac{3}{2}\frac{R'}{R} = 6T + 6b_1T^2 + 6b_2T^3 + \cdots, \quad \frac{R'}{R} = 4T + \cdots$$

Es ist ferner:

$$\frac{R''}{R} = \frac{d}{dZ}\left(\frac{R'}{R}\right) + \left(\frac{R'}{R}\right) = -\frac{4}{Z^2} - 8b_1\frac{1}{Z^3} - 12b_2\frac{1}{Z^4}\cdots + (4T + \cdots)^2$$

folglich:

$$6T^2 - 3\frac{R'}{R}T + \frac{1}{2}\frac{R''}{R} = T^2(6 - 12 - 2 + 8) + T^3(16 - 4)b_1 + \cdots$$

Es wird daher in der Gleichung (30) weder der Faktor von $\frac{d^2z}{dT^2}$ noch der Faktor von $\frac{dz}{dT}$ an der Stelle $T = 0$ unendlich groß; die Funktion z verhält sich demnach an der Stelle $T = 0$ oder $Z = \infty$ regulär, wie es die Natur des Problems verlangt.

Im Faktor von $\frac{dz}{dT}$ ist allerdings das Glied mit CR^{-1} noch nicht berücksichtigt. Um es näher zu untersuchen, erinnern wir daran, daß zufolge (21), (23) und (26) die Funktion

$$\frac{V'}{V} - \sum_s \frac{\varepsilon_s}{Z - A_s}, \tag{31}$$

wo A_s die den Ecken oder den Brennpunkten der z-Ebene in der Z-Ebene entsprechenden Punkte (bzw. bei den Brennpunkten die konjugierten Punkte) und ε_s die zugehörigen Residuen bezeichnen, im Endlichen nicht unendlich wird, im Unendlichen aber sich verhält wie $-6Z^{-1}$. Zur näheren Bestimmung dieser Funktion dienen die folgenden Überlegungen:

Es ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} z' &= -z'_T \cdot T^2 = -\frac{dz}{dT} \cdot T^2, \\ z'' &= z''_T \cdot T^4 + 2z'_T \cdot T^3, \end{aligned} \tag{31a}$$

folglich:

$$V = z''_1 z' - z'_1 z'' = -(z''_1 z' - z'_1 z'')_T \cdot T^6, \tag{32}$$

wo der Index T an der Klammer (sowohl hier wie im folgenden) andeuten soll, daß die Differentiationen im Innern der Klammer nach T (statt nach Z) ausgeführt werden sollen. Weiter wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V'}{V}\right)_Z &= -\left(\frac{V'}{V}\right)_T T^2 - 6T, \\ \left(\frac{V''}{V}\right)_Z &= \left(\frac{V''}{V}\right)_T T^4 + 14\left(\frac{V'}{V}\right)_T T^3 + 24T^2, \end{aligned} \tag{33}$$

und hieraus:

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_Z = \left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_T \cdot T^4. \tag{34}$$

Die linke Seite ist reell auf der X-Axe und hat nur die in § 3 und § 4 besprochenen singulären Stellen. Hat ε_i wieder dieselbe Bedeutung wie in (31), so wird der Ausdruck

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 + \frac{1}{6}\frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(Z-A_i)^2} - \frac{\beta_i}{Z-A_i}$$

an der Stelle A_i nicht mehr unendlich, wenn die Konstante β_i passend gewählt wird. Soll im Unendlichen kein singulärer Punkt von V liegen, so kann man demnach setzen:

$$(35)\quad \frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = -\frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(Z-A_i)^2} + \sum_i \frac{\beta_i}{Z-A_i} + C,$$

wo β_i und C Konstante bezeichnen. Mittelst der Transformation (27) und der Gleichung (34) ergibt sich hieraus:

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_T = -\frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)}{(T-B_i)^2} + \frac{1}{6}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i}{T-B_i}$$

$$(36)\quad -\sum \frac{A_i^2\beta_i}{T-B_i} - \frac{1}{T}\sum\left[\tfrac{1}{3}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i - A_i^2\beta_i\right]$$

$$-\frac{1}{T^2}\sum\left[\tfrac{1}{6}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) - A_i\beta_i\right] + \frac{1}{T^3}\sum\beta_i - \frac{1}{T^4}C, \text{ wo } B_i = \frac{1}{A_i}.$$

Damit diese Gleichung mit der Gleichung (35) formal übereinstimmt und damit kein singulärer Punkt an der Stelle $T = 0$ entsteht, folgt:

$$(37)\qquad C = 0,\ \sum\beta_i = 0,\ \sum A_i\beta_i = \tfrac{1}{6}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6),$$
$$\sum A_i^2\beta_i = \tfrac{1}{3}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6)A_i.$$

Das Verhalten von V im Unendlichen war durch die Gleichung (26) charakterisiert. Entwickelt man demnach beide Seiten von (35) nach Potenzen von Z^{-1}, so wird der Faktor von Z^{-2} $6 - \frac{1}{6}\cdot 36 = -\frac{1}{6}\sum\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) + \sum_i A_i\beta_i$;

beide Ausdrücke sind gleich Null, so daß die Bedingung (26) von selbst erfüllt ist. Der Faktor von Z^{-1} auf der rechten Seite von (35) ist infolge der zweiten Gleichung (37) gleich Null.

Legt man für eine Ecke des Polygons den entsprechenden Punkt der Z-Ebene (etwa A_1) in den unendlich fernen Punkt, so folgt aus der letzten Relation (37): $\beta_1 = 0$, also:

$$(38)\quad \sum_{i=2}^{N}\beta_i = 0,\ \beta_1 A_1 = 0.\infty = \tfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(\varepsilon_i+6) - \sum_{i=2}^{N}A_i\beta_i,$$

wo N die Anzahl der in Betracht kommenden Punkte A_i bedeutet.

Unter Voraussetzung der Gleichungen (37) haben wir in (35) eine Differentialgleichung zur Bestimmung von V; die weitere Behandlung dieser Differentialgleichung beschäftigt uns in § 7.

§ 7. Eigenschaften der Differentialgleichung (35).

Um die Gleichung (32) identisch zu befriedigen, führen wir mittelst der Gleichungen

$$V = \left(\frac{dW}{dZ}\right)^3, \quad \frac{V'}{V} = 3\frac{W''}{W'} \tag{39}$$

eine neue Funktion W von Z ein; es wird dann:

$$\frac{V''}{V} - \frac{2}{3}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = 3\frac{W'''}{W'} = 3\{W, Z\} + \frac{9}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = 3\{W, Z\} = 3\left[\frac{W'''}{W'} - \frac{3}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2\right], \tag{40}$$

wo nun auf der rechten Seite der bekannte Schwarzsche Differentialausdruck auftritt, dessen Eigenschaften von Cayley näher entwickelt wurden. Gemäß (35) bestimmt sich diese Funktion W aus der Gleichung:

$$\{W, Z\} = -\frac{1}{18}\sum_i \frac{\varepsilon_i(\varepsilon_i + 6)}{(Z - A_i)^2} + \frac{1}{3}\sum_i \frac{\beta_i}{Z - A_i}, \tag{41}$$

wobei die Konstanten β_i und A_i an die Bedingungen (37) gebunden sind.

Die Einführung der Funktion W läßt den invarianten Charakter der Differentialgleichung (35) gegenüber linearen Transformationen von Z deutlich hervortreten. Die Differentialgleichung wird dann:

$$\frac{d^3z}{dZ^3} - 3\frac{W''}{W'}\frac{d^2z}{dZ^2} - \left[\{W, Z\} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{W''}{W'}\right)^2 + CW'^2\right]\frac{dz}{dZ} = 0. \tag{42}$$

Die Lösung der Abbildungsaufgabe erfordert also zunächst die Lösung der Differentialgleichung (41) zur Bestimmung von W, sodann die Bestimmung von V aus (35), und endlich die Bestimmung von z aus (25) nach der in § 5 gegebenen Methode.

Ersetzt man Z durch $\alpha T + \beta$, so ändert sich nur die Integrationskonstante C. Es bleibt die Wirkung der Transformation

$$Z = T^{-1}$$

zu untersuchen. Wir erhalten mit Hilfe der Gleichungen (31 a) und der Gleichungen

$$\frac{d^3 z}{dZ^3} = -\frac{d^3 z}{dT^3} \cdot T^6 - 6\frac{d^2 z}{dT^2} \cdot T^5 - 6\frac{dz}{dT} T^4,$$

$$W_Z' = -W_T' \cdot T^2, \quad \left(\frac{W''}{W'}\right)_Z = -\left(\frac{W''}{W'}\right)_T \cdot T^2 - 2T,$$

$$\{W, Z\} = \{W, T\} T^4$$

in der Tat dieselbe Gleichung (42), wenn nur überall T statt Z geschrieben wird.

Die allgemeine Lösung W der Differentialgleichung (41) wird bekanntlich nach Kummer[1]) als Quotient zweier partikulären Integrale w_1 und w_2 einer linearen Gleichung der Form

$$w'' + pw' + qw = 0$$

gefunden, wobei $2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dZ}$ gleich der rechten Seite von (41) ist, also eine der beiden Funktionen p und q willkürlich bleibt. Beschreibt nun Z einen geschlossenen Weg um einen der singulären Punkte, so verwandelt sich W in eine lineare Funktion von W. Ersetzt man W durch $\alpha W + \beta$, wo α und β Konstante bedeuten, so bleibt die Gleichung (41) offenbar ungeändert; nur an Stelle der Konstanten C tritt eine andere Konstante. Es bleibt die Transformation

$$W = \Omega^{-1}$$

[1]) Programm des Gymnasiums Liegnitz, 1834, abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 100.

zu untersuchen. Dann geht (42), indem z sich in ζ verwandelt, über in:

$$\frac{d^3\zeta}{dZ^3} - 3\left(\frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega}\right)\frac{d^2\zeta}{dZ^2} - \left[\{\Omega, Z\} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega}\right)^2 + C\left(\frac{\Omega'}{\Omega^2}\right)^2\right]\frac{d\zeta}{dZ} = 0. \tag{43}$$

Die Lösung ζ dieser Gleichung muß dann eine algebraische Funktion der Lösung z von (42) sein, wie die folgenden Betrachtungen zeigen.

§ 8. Die Fortsetzung der Abbildungsfunktion.

Wenn nämlich der Punkt z das Innere des Polygons verläßt und den begrenzenden Kegelschnitt K_1, der durch die Gleichung

$$f_1(z, z_1) = 0 \tag{44}$$

gegeben sei, überschreitet, so überschreitet der entsprechende Punkt Z die zu K_1 entsprechende Strecke L_1 der X-Axe und tritt in die untere Halbebene über. Enthält das gegebene Polygon keinen Brennpunkt des Kegelschnitts (44), so entspricht der unteren Halbebene ein Polygon, das von algebraischen Kurven begrenzt wird und sich an das gegebene Polygon längs des Kegelschnittes K_1 anlegt. Die Zahl seiner Ecken ist gleich der Zahl der Ecken des gegebenen Polygons, und die Winkel in diesen Ecken sind gleich den entsprechenden Winkeln des ursprünglichen Polygons.

Enthält aber das gegebene Polygon einen Brennpunkt des Kegelschnittes (44), so entspricht der Halbebene $Y < 0$ als „Spiegelbild“ des gegebenen Bereiches längs des Kegelschnittes (44) ein Polygon, das sich durch zwei Blätter der zu (44) gehörigen Riemannschen Fläche (welche entsteht, wenn z_1 als Funktion von z aufgefaßt wird) erstreckt und sich erst nach zweimaligem Umgange schließt; die Zahl der Seiten und Ecken dieses Spiegelbildes ist doppelt so groß, als die entsprechende Zahl bei dem gegebenen Polygon.

Enthält endlich das gegebene Polygon die beiden Brennpunkte des Kegelschnittes (44), so ist das Innere desselben als aus zwei Blättern bestehend aufzufassen, auf denen zwei getrennte Polygone, die übereinander liegen und vollkommen kongruent sind, die Begrenzung bilden, so daß das Innere als zweifach zusammenhängend zu gelten hat. Ihm entspricht bei der „Spiegelung" am Kegelschnitte (44) ein ringförmiger Bereich, der nach innen und außen je von einem Polygon algebraischer Kurven begrenzt wird und in dessen Inneren zwei Punkte liegen, die den beiden Brennpunkten (Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche) entsprechen. So geht z. B., wenn es sich um die Abbildung des Innern einer einzigen Ellipse handelt, dieses zweiblättrig gedachte Innere in einen Ring über, der sich um die gegebene Ellipse herumlegt und nach außen durch eine konfokale Ellipse begrenzt wird[1]).

Die besprochene Spiegelung an dem Kegelschnitte (44) wird durch die Gleichung

$$f_1(x + iy,\ \xi - i\eta) = 0 \tag{45}$$

vermittelt, vermöge welcher jedem Punkte x, y des Polygon-Innern ein Punkt ξ, η des Spiegelbildes entspricht. Die einem andern begrenzenden Kegelschnitte

$$f_i(z, z_1) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_i(x, y) = 0$$

entsprechende Kurve des Spiegelbildes ergibt sich durch Elimination von x und y aus der Gleichung $\varphi_i(x, y) = 0$ und den beiden Gleichungen, in welche (45) sich auflöst, wenn man den reellen und den imaginären Teil der linken Seite für sich gleich Null setzt.

Der Kegelschnitt $f_1 = 0$ möge durch die Ecke a_1 von dem Kegelschnitt $f_2 = 0$ getrennt werden. Der Ecke a_1 entspreche der Punkt A_1 der X-Axe, der Kurve $f_2 = 0$ eine Strecke L_2 dieser Axe. Bei der Spiegelung am Kegelschnitt $f_1 = 0$ möge $f_2 = 0$ in eine Kurve $\psi_2 = 0$ übergehen. Überschreitet nun der Punkt z diese Kurve $\psi_2 = 0$, so überschreitet

[1]) Vgl. meine frühere Arbeit in Bd. 26 dieser Sitzungsberichte, 1896.

der entsprechende Punkt Z die Strecke L_2 und tritt dabei aus der Halbebene $Y<0$ wieder in die obere Halbene $Y>0$ ein. Letzterer entspricht jetzt in der z-Ebene ein Polygon, das aus dem Spiegelbilde des zuerst gegebenen Polygons (das aus ihm durch Spiegelung an $f_1 = 0$ entstanden war) durch weitere Spiegelung an der Kurve $\psi_2 = 0$ hervorgeht. Jedem Punkte z im Innern des gegebenen Polygons entspricht so zunächst ein Punkt $\xi - i\eta$ vermöge (45) im ersten Spiegelbilde und diesem ein Punkt $\xi = \xi' + i\eta'$ im zweiten Spiegelbilde vermöge der Gleichung

$$\psi_2(\xi' + i\eta',\ \xi - i\eta) = 0,$$

die für $\xi' = \xi,\ \eta' = \eta$ die Kurve $\psi_2 = 0$ darstellt. Die Funktion ζ ist also eine algebraische Funktion von z und muß der Differentialgleichung (43) genügen, wenn bei dem Umgange von Z um den Punkt A_1 aus W die Funktion Ω entstanden ist. So ergeben sich algebraische Beziehungen zwischen den Lösungen ζ und z zweier Differentialgleichungen, die zunächst durch transzendente Relationen verknüpft sind.

Das zweite Spiegelbild hat wegen der Konformität der Beziehungen an den Ecken dieselben Winkel wie das zuerst gegebene Polygon. Die Koeffizienten von $\frac{d^2\zeta}{dZ^2}$ und $\frac{d\zeta}{dZ}$ in (43) müssen daher sich in der Nähe des Punktes A_1 ebenso verhalten wie die Koeffizienten der von z befriedigten Differentialgleichung (42). In der Tat ist, wenn $\Omega = W^{-1}$ gesetzt wird:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\varepsilon_1}{Z - A_1} + \cdots = 3\frac{W''}{W'} = \frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega},$$

also:

$$W' = (Z - A)^{\eta}(\cdots), \quad \text{wo } \eta = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\Omega = (Z - A)^{-\eta-1}(\cdots), \quad \frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{-\eta+1}{Z-A} + \cdots,$$

$$\frac{\Omega''}{\Omega'} = \frac{-\eta-2}{Z-A} + \cdots, \quad \frac{\Omega''}{\Omega'} - 2\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{\eta}{Z-A} + \cdots$$

und bekanntlich $\{W, Z\} = \{\Omega, Z\}$. Bei einem vollständigen Umgange von Z um mehrere singuläre Punkte A_i wird also im allgemeinen W ersetzt durch eine lineare Funktion von W von der Form $\frac{\alpha W + \beta}{W}$, denn obige Betrachtung würde gestört werden, wenn auch noch $\Omega +$ konst. an Stelle von Ω gesetzt wird.

Für einen Umgang des Punktes Z um einen einzelnen singulären Punkt A kommt ferner die Bemerkung am Schlusse von § 5 in Betracht (S. 470).

§ 9. Die Kreisbogen-Polygone.

Es bleibt zu untersuchen, wie sich die Schwarzsche Abbildung der Kreisbogenpolygone in die vorstehenden Untersuchungen einordnet. Dazu dienen die obigen Gleichungen (7) und (8). Wir setzen wieder

$$z = x + iy, \quad z_1 = x - iy, \quad 2x = z + z_1, \quad 2iy = z - z_1;$$

dann wird:

$$t = \frac{dy}{dx} = i\frac{dz - dz_1}{dz + dz_1}, \quad 1 + t^2 = \frac{4\,dz\,dz_1}{(dz + dz_1)^2},$$

$$a = \frac{d^2y}{dx^2} = 8\,\frac{d^2z_1(dz)^2 + d^2z(dz_1)^2 - dz\,dz_1(d^2z + d^2z_1)}{(dz + dz_1)^4}.$$

Durch Einführung der oben mit U und V bezeichneten Ausdrücke mittels der Gleichungen (9) und (12) wird der durch (7) definierte Differentialausdruck K:

$$K = \frac{1}{x'^7}[(U'x' - 3Ux'')(x'^2 + y'^2) - 3U^2y'']$$

$$= \frac{i}{4x'^7}[V'(z' + z_1')z'z_1' - 3V(z'' + z_1'')z'z_1' - \tfrac{3}{2}V^2(z' - z_1')].$$

Nun ist identisch:

$$2(z'' + z_1'')z'z_1' + V(z' - z_1') = 2(z'' + z_1'')z'z_1' + (z_1''z' - z_1'z'')(z' - z_1')$$
$$= (z_1''z' + z''z_1')(z' + z_1'),$$

und folglich:

$$4x'^7 \cdot K = i(z' + z'_1)[z'''_1 z' - z''' z'_1 - \tfrac{3}{2}(z''^2_1 z'^2 - z''^2 z'^2_1)]$$

$$(46) \qquad = i(z' + z'_1) z'^2 z'^2_1 [\{z_1, X\} - \{z, X\}],$$

wenn man den Schwarzschen Ausdruck

$$\{z, X\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2, \text{ wo } z' = \frac{dz}{dX} \text{ etc.}$$

in üblicher Weise einführt. Ferner ist bekanntlich nach Cayley:

$$\{z_1, X\} - \{z, X\} = \{z_1, z\}\left(\frac{dz}{dX}\right)^2,$$

$$2x'^6 \cdot K = i z'^4 z'^2_1 \{z_1, z\}.$$

In Variabeln z, z_1 erhalten wir so die Differentialgleichung aller Kreise in der bekannten Form $\{z_1, z\} = 0$. Dieser Ausdruck für K ist in (8) einzuführen. In Rücksicht auf die Relationen

$$K'_x = \frac{K'_X}{x'}, \quad 3ad - 13bc = P'_x - 6bc, \quad K''_x = \frac{K''_X}{x'^2} - \frac{K'_X \cdot x''}{x'^3}$$

kann dies mit Hilfe der Gleichungen (10a) und (11) leicht geschehen. Es ist indessen nicht notwendig, hier näher darauf einzugehen; es genügt, darauf hinzuweisen, daß die Differentialgleichung $L = 0$ der Kurven zweiter Ordnung infolge der Gleichung (46) sich in der Form

$$\Psi \cdot (3ad - 13bc) \cdot x'^3 + 13\,\Psi'_X \cdot x'^2 \cdot b^2 - 3(\Psi''_X \cdot x' - x''\Psi'_X)ab = 0$$

schreiben läßt, wo

$$\Psi = \frac{z'^2 z'^2_1}{2x'^6}[\{z_1, X\} - \{z, X\}], \quad 2x' = z' + z'_1, \quad 2x'' = z'' + z''_1.$$

Da für jeden Punkt des Kreises Ψ, Ψ'_X, Ψ''_X identisch Null sind, so geht hieraus hervor, daß die Gleichung $L = 0$ für ein Kreispolygon ihre Bedeutung für Lösung des Abbildungsproblems verliert. Die Kreisbogenpolygone nehmen daher eine Ausnahmestellung ein; für sie führt eine besondere Untersuchung des Differentialausdrucks $\{z, X\}$ nach Schwarz zum Ziele.

§ 10. Beispiele.

1. Eine einzelne Ellipse. Für eine solche kann man von dem Ansatze[1])

$$(47)\qquad \frac{z'}{\sqrt{(z-p)(z-q)}} = C\,\frac{1}{\sqrt{(Z-A)(Z-B)(Z-A_1)(Z-B_1)}}$$

ausgehen, oder

$$z' = C\sqrt{\frac{T}{R}},\quad \text{wo}\quad T=(z-p)(z-q),$$
$$R=(Z-A)(Z-B)(Z-A_1)(Z-B_1);$$

dabei sind A, B die Punkte, welche den Brennpunkten p, q der Ellipse in der Halbebene $Y>0$ entsprechen, und A_1, B_1 sind die konjugierten Punkte der unteren Halbebene. Es wird dann

$$z'' = -\tfrac{1}{2}C\frac{\sqrt{T}}{R^{3/2}}\cdot R' + \tfrac{1}{2}C\frac{1}{\sqrt{RT}}\cdot T'\cdot z',\quad \text{wo}\quad T'=\frac{dT}{dz},$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{R'}{R}z' + \frac{C^2}{2}\frac{T'}{R},$$
$$z''' = -\frac{1}{2}\frac{R'}{R}z'' - \tfrac{1}{2}z'\left(\frac{R''}{R}-\frac{R'^2}{R^2}\right) + \frac{C^2}{2}\frac{T''}{R}z' - \frac{C^2}{2}\frac{T'}{R^2}R',$$
$$= -\frac{3}{2}\frac{R'}{R}z'' - \left(\frac{1}{2}\frac{R''}{R}+\frac{C^2}{R}\right)z',\quad \text{da}\quad T''=2.$$

Der Differentialquotient z'_X genügt also in der Tat einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung der verlangten Form, wie sie in (29) aufgestellt wurde. Die Koeffizienten sind in diesem Falle rationale Funktionen von Z.

2. Das Polygon wird durch Bögen konfokaler Ellipsen und Hyperbeln begrenzt. Nach den früher von mir gegebenen Resultaten[2]) wird die Aufgabe auf eine Gleichung der Form

---

[1]) Vgl. meine früheren Arbeiten, insbesondere Bd. 26 dieser Sitzungsberichte, S. 401 ff., 1896.

[2]) Vgl. diese Sitzungsberichte, Bd. 25, S. 219 ff., 1895.

(48) $$\frac{z'}{\sqrt{z^2 - e^2}} = \sqrt{R(Z)}$$

zurückgeführt, wo $x = e$ und $x = -e$ die Brennpunkte des konfokalen Systems bezeichnen und R eine rationale Funktion von Z ist. Letztere verschwindet an den Stellen der X-Axe, welche Ecken des Polygons mit dem Winkel $\frac{3}{2}\pi$ entsprechen, und wird unendlich an den Stellen, welche Ecken mit dem Winkel $\frac{\pi}{2}$ zugehören, außerdem in den Stellen der X-Axe, welche den Brennpunkten entsprechen, falls diese als Ecken auftreten. Die Elimination von e^2 geschieht ebenso wie bei der Gleichung (47). Es wird, wenn $T = z^2 - e^2$ gesetzt wird:

$$z' = \sqrt{T R}, \quad z'' = \frac{1}{2}\frac{R'}{R} z' + \tfrac{1}{2} T' R,$$

$$z''' = \frac{1}{2}\frac{R'}{R} z'' + \tfrac{1}{2} z'\left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2}\right) + R z' + \tfrac{1}{2} T' R'$$

$$= \frac{3}{2}\frac{R'}{R} z'' + z'\left[\frac{1}{2}\frac{R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + R\right].$$

Es ergibt sich also in der Tat wieder eine Differentialgleichung der verlangten Form (29). Die oben mit R bezeichnete Funktion ist jetzt mit R^{-1} bezeichnet.

3. Es soll die halbe Ellipse, welche den einen Brennpunkt $z = +e$ enthält, auf die Halbebene abgebildet werden. Hier sind zwei Ecken mit den Winkeln $\lambda_1 \pi = \lambda_2 \pi = \frac{\pi}{2}$ vorhanden; ihnen mögen die Punkte $X = A$ und $X = B$ entsprechen. Ferner möge dem Brennpunkte der Punkt $Z = C + iD$ zugehören; dann ist zunächst W aus der Gleichung (41), d. i. der Gleichung

$$\{W, Z\} = \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-A)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-B)^2} + \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-C-iD)^2}$$
$$+ \frac{3}{8}\frac{1}{(Z-C+iD)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\beta_1}{Z-A} + \frac{\beta_2}{Z-B} + \frac{\beta_3}{Z-C-iD}\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_4}{Z-C+iD}\right)$$

zu bestimmen; denn hier ist $\varepsilon = 3\lambda - 3 = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$ für die Punkte A und B, und nach (25c) hat ε für die Punkte $C \pm iD$ hier zufällig denselben Wert $-\frac{3}{2}$; β_4 ist konjugiert imaginär zu β_3. Nach (37) ist dabei:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0,\ \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3(C + iD) + \beta_4(C - iD) = -\tfrac{9}{2},$$

$$\beta_1 A^2 + \beta_2 B^2 + \beta_3(C+iD)^2 + \beta_4(C-iD)^2 = -9(A+B+2C).$$

Nimmt man insbesondere $A = \infty$, $B = 0$, $C = 0$, $\beta_3 - \beta_4 = -\gamma i$, wo γ reell ist, so wird nach (38):

$$\{W, Z\} = -\frac{3}{8}\frac{1}{Z^2} + \frac{3}{4}\frac{Z^2 - D^2}{(Z^2 + D^2)^2} + \frac{1}{3}\frac{\beta^2 D^2 + \gamma Z}{Z(Z^2 + D^2)}.$$

Die Konstanten D und γ bestimmen sich durch die halbe große Axe und die Exzentrizität der Ellipse. Die Lösung geschieht durch den Quotienten zweier Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei singulären Punkten.

Die Spiegelung an der kleinen Axe der Ellipse, die das Flächenstück begrenzt, ergibt die andere Hälfte der gegebenen Ellipse. Eine Spiegelung an letzterer selbst verwandelt das Flächenstück in einen Halbring, begrenzt von der gegebenen Halbellipse, einer dazu konfokalen Halbellipse und zwei Strecken der begrenzenden Axe, auf der das Spiegelbild 4 Ecken mit Winkeln von je 90^0 hat; und so geht dies weiter.

4. Das abzubildende Flächenstück wird begrenzt von zwei Ellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkte und gemeinsamen Axen, die sich auf der kleinen Axe berühren. Liegen beide Brennpunkte im Innern der kleineren Ellipse, also keiner im Innern des Flächenstückes, so lautet die Differentialgleichung (41) (indem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -3$ zu nehmen ist und $\beta_i = 3\beta_i'$ gesetzt ist):

$$\{W, Z\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(Z-A)^2} + \frac{1}{(Z-B)^2}\right\} + \frac{\beta_1'}{Z-A} + \frac{\beta_2'}{Z-B}$$

mit den Bedingungen

$$\beta_1' + \beta_2' = 0,\ \beta_1' A + \beta_2' B = -1,\ \beta_1' A^2 + \beta_2' B^2 = -(A+B)$$

oder, wenn $A = \infty$, $B = 0$ genommen wird:

$$\{W, Z\} = \frac{1}{2}\frac{1}{Z^2}.$$

Das allgemeine Integral ist eine lineare Funktion von $\log Z$:

$$W = \frac{\alpha + \beta \lg Z}{\gamma + \delta \lg Z},$$

also:

$$W' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma + \delta \lg Z)^2} \cdot \frac{1}{Z}, \quad \frac{W''}{W'} = \frac{-2}{\gamma + \delta \lg Z} \cdot \frac{\delta}{Z} - \frac{1}{Z}.$$

Diese Werte sind in die Differentialgleichung (42) einzusetzen. Das Auftreten der Logarithmen, das durch die Winkel von der Größe Null bedingt ist, wird im folgenden noch näher besprochen.

§ 11. Ecken des Polygons mit dem Winkel Null.

Im letzten Beispiel haben wir das Auftreten einer Polygonecke mit dem Winkel $\lambda = 0$ als Grenzfall einer Ecke mit $\lambda > 0$ behandelt. Eine direkte Ableitung der betreffenden Formeln kann in folgender Weise geschehen. Wir denken uns eine Transformation

$$z = F(\zeta)$$

gegeben, durch welche der eine der beiden sich berührenden Kegelschnitte in eine gerade Linie, der andere in einen diese Linie berührenden Kreis übergeführt wird. Der Berührungspunkt liege an der Stelle $\zeta = 0$, und die gerade Linie sei die reelle Axe der ζ-Ebene. Durch die Formel[1])

$$\zeta = (a + b \lg Z)^{-1}, \tag{49}$$

wo a und b reell sind, werden dann der Kreis und die Gerade auf die Z-Ebene derartig abgebildet, daß den beiden Kurven die reelle Axe der Z-Ebene entspricht und daß einem halben

[1]) Vgl. Schwarz, Crelles Journal, Bd. 75; gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, S. 228 ff.

Umgange um den Punkt $Z = 0$ (wobei $\lg X$ um πi wächst) in der ζ-Ebene ein Übergang von der geraden Linie zu dem berührenden Kreise entspricht. Der geraden Linie entspreche der durch die Gleichung (14 a), d. i.

$$z = \frac{a_1 t + a_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}$$

dargestellte Kegelschnitt. Aus ihr ergibt sich t als Funktion von z, die in der Umgebung von $z = 0$ eindeutig ist; und es sei wieder:

$$t = \varphi(z) = f(\zeta),$$

also auch an Stelle von (16):

$$t = f(\zeta) = f((a + b \log X)^{-1}) = \psi(X).$$

In Gleichung (17) ist jetzt auf der rechten Seite

$$\zeta_1' = \frac{-b}{(a + b \lg X)^2} \cdot \frac{1}{X}, \quad \frac{\zeta_1''}{\zeta_1'} = \frac{-2b}{(a + b \lg X)} \cdot \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2},$$

und somit wieder reell; in Gleichung (17 c) dagegen wird:

$$\frac{\zeta_2''}{\zeta_2'} = \frac{2b}{a + b \lg R + b \pi i} \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2},$$

wenn R den absoluten Wert von X bezeichnet, und dieser Ausdruck ist nicht reell, so daß die an die Gleichung (17), (17 c) und (18) geknüpften Überlegungen nicht mehr anwendbar sind. Um wieder einen Ausdruck zu erhalten, der auf beiden Kegelschnitten rational von X abhängt und reell ist, bilden wir

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_1 = \psi_1'(X)^2 \left[\frac{U''}{U} - \frac{7}{6}\left(\frac{U'}{U}\right)^2\right]_t - \psi_1''(X)\left(\frac{U'}{U}\right)_t + 3\{\psi_1, X\}, \tag{50}$$

wenn wieder $\{\psi, X\}$ den schon oben in (40) eingeführten Differentialausdruck bezeichnet, und auf dem zweiten Kegelschnitte:

$$\left[\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2\right]_2 = \psi_2'(X)^2 \left[\frac{U''}{U} - \frac{7}{6}\left(\frac{U'}{U}\right)^2\right]_\tau - \psi_2''(X)\left(\frac{U'}{U}\right)_\tau + 3\{\psi_2, X\}, \tag{50 a}$$

wenn sich der Index 1 auf die erste, der Index 2 auf die zweite Kurve bezieht. Hierin ist nach der bekannten Cayleyschen Formel

$$\{\psi_1, X\} = \{f_1, \zeta_1\}\left(\frac{d\zeta_1}{dX}\right)^2 + \{\zeta_1, X\},$$

$$\{\psi_2, X\} = \{f_2, \zeta_2\}\left(\frac{d\zeta_2}{dX}\right)^2 + \{\zeta_2, X\},$$

wenn f_1 und f_2 analog zu f in (16) definiert sind, und weiter

$$\{\zeta_1, X\} = \{\zeta_2, X\} = \frac{1}{2}\frac{1}{X^2},$$

also reell auf beiden Kurven. Infolgedessen können auf die übrigen Glieder der rechten Seite von (50) und (50a) die früheren Schlüsse (Entwicklung nach Potenzen von ζ_1 bzw. ζ_2) angewandt werden, aus denen gefolgert wurde, daß alle Koeffizienten der Entwicklungen verschwinden müssen.

Hier handelt es sich um Entwicklungen nach Potenzen von $(a + b \lg X)^{-1}$ und von $(a + b\pi i + b \lg X)^{-1}$.

Da aber die Abbildung (49) nicht das Flächenstück, auf welches sich die Abbildung $z = F(\zeta)$ bezog, sondern nur einen Teil desselben auf die Halbebene $Y > 0$ konform überträgt, indem die Gleichung (49) sich auf eine durch zwei sich berührende Kreise gebildete Sichel bezieht, so hat man allgemeiner statt (49) zu setzen:

$$\zeta^{-1} = (a + b \lg Z)(a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \cdots)$$

und dann ergibt sich, daß die Funktion

$$\frac{V''}{V} - \frac{7}{6}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{Z^2} - \frac{\gamma}{Z}$$

an der Stelle $Z = 0$ nicht mehr singulär ist. Auch wenn die begrenzenden Kegelschnitte sich in den Polygonecken berühren, geschieht daher die Bestimmung von V durch eine Differentialgleichung der Form (36) oder mittels der Funktion W durch eine Gleichung der Form (41).

Zusatz zu Seite 216 f. dieses Bandes.

„Das Verhalten der Funktionen V_{31}' und V_{21}' im Unendlichen bedarf noch der näheren Untersuchung; vgl. darüber oben S. 471 ff.“

Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Dezember 1918.

Ernst Mach hat einmal gesagt: „Verschiedene Wissensgebiete entwickeln sich oft lange Zeit nebeneinander, ohne daß eines auf das andere Einfluß nimmt. Gelegentlich können sie aber wieder in engeren Kontakt treten, wenn bemerkt wird, daß die Lehren des einen durch jene des andern eine unerwartete Aufklärung finden.“ Diese Erfahrung bestätigt sich auch für die Teilgebiete einer Wissenschaft. Innerhalb der Mathematik stehen z. B. in diesem Verhältnis bald kühler Zurückhaltung, bald fördernder Wechselwirkung die *Variationsrechnung* und alle jene Forschungen, die sich mit der geometrischen Theorie der Differentialgleichungen, insbesondere mit den *Berührungstransformationen* befassen. Man braucht nur an Namen wie Weierstraß und Lie zu erinnern, um eine Zeit völliger Trennung sich ins Gedächtnis zu rufen. Das hat sich aber geändert; es war das Bestreben von Cartan, Engel, Kneser und dem Verfasser dieser Mitteilung, durch die in der Gedankenrichtung von Lie gelegenen Vorstellungen der Variationsrechnung neue Seiten abzugewinnen — oder nach von anderer Seite ausgesprochener Auffassung alte Saiten neu erklingen zu lassen — weniger in der Richtung nach den strengen Existenzbeweisen hin, als mit der Absicht, die Bedeutung der Extremalen dem geometrischen Verständnis näher zu führen[1]).

[1]) Vgl. Math. Enc. III D 7 (*Berührungstransformationen*), Nr. 8 e, sowie die ergänzende Bemerkung, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver.

Damit ergeben sich dann von selbst, insbesondere durch erneute Heranziehung der von Lie zu einem Lehrgebäude ausgebauten Theorie der Berührungstransformationen, neue Aufgaben.

Ganz abgesehen aber von dieser Erweiterung und Bereicherung des Gebietes, über deren Wert ein selbst seit Jahren an derartigen Untersuchungen Beteiligter sich kein Urteil erlauben darf, hat aber bei den isoperimetrischen Hauptproblemen über Kreis und Kugel gerade für die den Abschluß bildenden Existential- und Eindeutigkeitssätze die klassische und einfachste Berührungstransformation, die von Huygens in die Optik eingeführte *Dilatation* eine große Rolle gespielt. Es mag nur daran erinnert werden, daß F. Bernstein bei seinem Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises auf der Kugel (deren Radius gleich Eins gesetzt ist) von dem Ausdruck

$$(2\pi - F)^2 + L^2 \geq 4\pi^2$$

ausgeht[1]). F bedeutet dabei den Inhalt, L die Länge einer geschlossenen Kurve, und der Umstand, daß dieser Ausdruck eine Integralinvariante bei der Gruppe der Dilatationen ist, spielt eine große Rolle bei dem Beweis, daß die angeschriebene Ungleichheit besteht und der untere Grenzwert nur für den Kreis erreicht wird.

Wir stellen uns, indem wir dabei die Rücksicht auf isoperimetrische Probleme fest im Auge behalten, die Aufgabe, systematisch *Integralinvarianten für die Gruppe der Dilatationen zu bilden.* Die Bausteine dieser Invarianten sollen bestimmte Integrale bilden, auf die man bei Betrachtung geschlossener Kurven in der Ebene, geschlossener Flächen im Raum usw. ganz von selbst geführt wird. Als Beispiele seien noch genannt Rauminhalt (J), Oberfläche (L) und das Flächenintegral der mittleren Krümmung

$$M = \tfrac{1}{2}\int (R_1 + R_2)\, d\omega = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) df,$$

1915, S. 66. In einer neuen Bearbeitung des Encyklopädieartikels über *Variationsrechnung* würde der Herr Verfasser schon auf Grund seiner eigenen Arbeiten den Anlaß haben, verschiedene Zusätze zu machen.

[1]) Math. Ann. 60 (1905), S. 117.

in dem R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, df das Flächenelement, $d\omega$ das Element des sphärischen Bildes bedeutet. Bekanntlich hat schon Steiner festgestellt, daß bei endlicher Dilatation, d. h. bei Übergang zur Parallelfläche im Abstand t, die Integrale übergehen in

$$J(t) = J + Ot + Mt^2 + \frac{4\pi}{3} t^3,$$
$$O(t) = O + 2Mt + 4\pi t^2,$$
$$M(t) = M + 4\pi t,$$

und hieraus kann man durch Elimination von t die Invarianten bestimmen. Man kann sich aber auch zur Bestimmung der Invarianten der Methode von Lie bedienen, wobei man nur einfache Systeme von Differentialgleichungen zu integrieren hat, und das ist oft leichter durchzuführen als Eliminationen. Bei der Wahl der Integrale, aus denen man Invarianten aufzubauen gedenkt, wird man sich selbstverständlich durch bestimmte Gesichtspunkte leiten lassen[1]). Mit aller gebotenen Zurückhaltung darf darauf hingewiesen werden, *daß wir dabei auf eine Reihe noch offener Fragen stoßen*, deren Beantwortung hiermit angeregt werden möge. Es soll dabei nicht vergessen werden, daß jede neue Fragestellung im Meer der Wissenschaft die Klippe der Unlösbarkeit und den seichten Strand der Trivialität zu fürchten hat; auch ist sie auf den starken persönlichen Schwankungen unterworfenen Geschmack angewiesen!

Neben der euklidischen wollen wir die sphärische und hyperbolische Geometrie zu ihrem Recht kommen lassen, in der zuletzt genannten soll die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf Grund des vervollständigten „Viergelenkverfahrens“ von Steiner nachgewiesen werden.

[1]) Die bereits zu einem ganzen Zweig mathematischer Spezialforschung angewachsene, in einer Reihe von Abhandlungen in den Berichten der K. Sächs. Ges. d. W. seit 1916 dargestellte „*Affingeometrie*“ hat ihren Ausgangspunkt auch in der Bestimmung von *Integralinvarianten*, die G. Pick für die affine Gruppe nach Lieschen Methoden bestimmt hat. Aus den Invarianten werden die isoperimetrischen Probleme aufgebaut, die einen großen Teil dieses „neuen Zweiges der Geometrie“ ausmachen.

§ 1. Integralinvarianten der euklidischen Dilatationsgruppe.

Aus den beiden Größen F (Flächeninhalt) und L (Bogenlänge) erhält man leicht eine Größe, die gegenüber Dilatationen invariant ist. Ist $d\tau$ der Kontingenzwinkel, so wachsen bei einer infinitesimalen Dilatation, d. h. bei einer Verschiebung der Linienelemente ds der Kurve in der Richtung der Normale um die Strecke dt diese Größen um

$$dL = dt \int d\tau = 2\pi\, dt, \quad dF = dt \int ds = L\, dt.$$

Demnach ist

$$1) \qquad \frac{dL}{2\pi} = \frac{dF}{L} = dt,$$

und man findet sofort durch Integration die Invariante

$$2) \qquad L^2 - 4\pi F = c_1.$$

Es ist bekannt, wie großer Anstrengungen es bedurfte, um nachzuweisen, daß diese Invariante ihren kleinsten Wert Null nur beim Kreis erreicht[1]). Man kann aber auch eine

[1]) W. Blaschke, Kreis und Kugel (Leipzig 1916), Kap. I. — Einen Beweis für die Ungleichheit*

$$L^2 - 4\pi F > 0,$$

der sich an Einfachheit dem Beweis der entsprechenden Ungleichheit für sphärische Kurven messen kann, gibt es noch nicht. Es läge nahe, zu versuchen, den Beweis von Frobenius (Berl. Ak. Ber. 28, 1915, S. 387—404) für die Brunn-Minkowskische Ungleichung so zu fassen, daß man unmittelbar erkennen könnte: Unter den Parallelkurven eines Ovals gibt es auch Kurven mit negativem Inhalt, wenn das Oval kein Kreis ist. Dann müßte nämlich

$$F + tL + t^2\pi$$

durch geeignete Wahl von t negativ gemacht werden können, also die Ungleichheit bestehen. Allein eine von Frobenius selber herrührende Bemerkung warnt vor einem solchen Versuch. — Leider lassen sich die so einfachen Betrachtungen dieses Forschers auch nicht zum Beweis der für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel erforderlichen Beziehung

$$0^3 - 36\pi J^2 \geqq 0$$

verwenden. Es sei gestattet, hier eine Briefstelle mitzuteilen: „Als ich meine Arbeit über den gemischten Flächeninhalt schrieb, habe ich sehr

obere Grenze für c_1 bestimmen, die ebenfalls nur beim Kreis mit der unteren zusammenfällt und für Schätzungen einen gewissen Wert hat. Versteht man unter ϱ_1 den größten, unter ϱ_2 den kleinsten Krümmungsradius der Eilinie, so ist

$$L < 2\pi\varrho_1, \quad F > \pi\varrho_2^2.$$

Zieht man jetzt die innere Parallelkurve im Abstand t, so erhält man

$$L^2 - 4\pi F = L^2(-t) - 4\pi F(-t) \leqq 4\pi((\varrho_1 - t)^2 - (\varrho_2 - t)^2).$$

Setzt man $-t$ gleich ϱ_2, so folgt die für Schätzungen verwertbare Beziehung

$$2') \qquad 4\pi(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \geqq L^2 - 4\pi F.$$

Für die Ebene wollen wir noch eine zweite Integralinvariante bilden, indem wir noch das Integral

$$E = \tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\tau$$

mit hereinziehen, das den Flächeninhalt zwischen Kurve und Evolute (mit Berücksichtigung der mehrfachen Überdeckung einiger Gebiete) angibt.

Man erhält $\qquad dE = dtL,$

und aus $\qquad \dfrac{dF}{L} = \dfrac{dE}{L} = dt$

die leicht zu deutende Invariante

$$3) \qquad E - F = c_2.$$

Auch diese Invariante hat die obere Grenze $\pi(\varrho_1 - \varrho_2)^2$ und dürfte nur für den Kreis die untere Grenze Null erreichen.

---

angestrengt, aber vergeblich darüber nachgedacht, ob man die Methode auch auf das gemischte Volumen ausdehnen kann. . . . Wenn man ein Polyeder darstellen kann als Differenz eines umschließenden Tetraeders und einer Anzahl anschließender Tetraeder, so bietet die weitere Untersuchung keine besonderen Schwierigkeiten. Aber das kann man nur in den seltensten Fällen, und daran scheitert der Versuch, meine Methode auf den Raum zu übertragen."

* Bemerkung bei Korrektur: Der Beweis ist doch auf dem hier angedeuteten Weg durchführbar.

Im (dreidimensionalen) Raum bauen wir Invarianten zunächst auf aus den schon in der Einleitung erwähnten Größen, dem Rauminhalt J einer geschlossenen, doppelpunktfreien Fläche, der Oberfläche

$$O = \int R_1 R_2 \, d\omega,$$

und dem Integral der mittleren Krümmung

$$M = \tfrac{1}{2} \int (R_1 + R_2) \, d\omega,$$

Infinitesimale Dilatation läßt $d\omega$ ungeändert, läßt aber R_1 und R_2 um dt wachsen, so daß man erhält

$$dJ = O\,dt, \quad dO = 2M\,dt, \quad dM = dt \int d\omega = 4\pi\,dt,$$

also zur Bestimmung der Invarianten das System

$$\frac{dJ}{O} = \frac{dO}{2M} = \frac{dM}{4\pi} = dt \tag{4}$$

zu integrieren hat. Man erhält die eine Invariante

$$M^2 - 4\pi O = c_1 \tag{5}$$

und aus

$$dJ = O\,dM = \frac{M^2 - c_1}{16\pi^2}\,dM$$

die weitere

$$J - \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{M^3}{3} - c_1 M\right) = c_2$$

oder

$$16\pi^2 J + \frac{2M^3}{3} - 4\pi M O = c_2. \tag{6}$$

Die Invariante (5) ist bekanntlich (Blaschke, a. a. O., S. 104) nur für die Kugel gleich Null, für alle anderen Flächen positiv; sie tritt beim Nachweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel auf. Man kann auch leicht die der Formel (3′) entsprechende Beziehung

$$16\pi^2 (\bar{R}_1 - \bar{R}_2)^2 \geq M^2 - 4\pi O \tag{5′}$$

nachweisen, in der $\bar{R}_1$ den größten, $\bar{R}_2$ den kleinsten auf der Fläche vorhandenen Hauptkrümmungsradius bedeutet.

Noch zwei weitere Integrale wollen wir in Betracht ziehen, nämlich

$$N = \int \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega$$

und

$$P = \int R_1 R_2 \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega.$$

Beachtet man

$$\frac{dN}{dt} = 2M, \quad \frac{dP}{dt} = 2N + O,$$

so erhält man bei Integration des durch die Gleichungen

$$\frac{dN}{2M} = \frac{dP}{2N + O} = dt$$

zu ergänzenden Systems (4) die weiteren Invarianten

$$M^2 - 4\pi N = c_3, \tag{7}$$

$$P + \frac{M}{8\pi^2}(M^2 - 4\pi N - 2\pi O) = c_3, \tag{8}$$

die, ohne daß ihre besondere geometrische Bedeutung und ihre Verwertbarkeit für isoperimetrische sinngemäße Aufgaben hier näher untersucht wird, einfach als Fortsetzung der Invariantentabelle angeführt sein mögen.

Erweiterungen für euklidische Räume höherer Dimension liegen auf der Hand. Es möge die Durchführung noch für den vierdimensionalen Raum gestattet sein[1]).

Sind $R_1 R_2 R_3$ die drei Hauptkrümmungsradien, so nehmen wir als Bausteine außer dem Rauminhalt T einer geschlossenen Hyperfläche den Inhalt

$$S = \int R_1 R_2 R_3 \, d\omega$$

der Hyperfläche und die beiden Integrale:

$$M_1 = \tfrac{1}{3} \int (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) \, d\omega,$$

$$M_2 = \tfrac{1}{3} \int (R_1 + R_2 + R_3) \, d\omega.$$

[1]) Über mehrdimensionale Krümmungstheorie vgl. Bianchi-Lukat, Differentialgeometrie, Leipzig 1899, Kap. 21.

Die folgenden Gleichungen

$$\frac{dT}{S} = \frac{dS}{3M_1} = \frac{dM_1}{2M_2} = \frac{dM_2}{2\pi^2} = dt$$

geben dann die Zuwachsgrößen für T, S, M_1 und M_2 bei einer infinitesimalen Dilatation an und man erhält die Invarianten

$$M_2^2 - 2\pi^2 M_1 = c_1,$$
$$4\pi^4 S + 2M_2^3 - 6\pi^2 M_1 M_2 = c_2,$$
$$8\pi^6 T - 4\pi^4 S M_2 - \frac{3M_2^4}{4} + 3\pi^2 M_1 M_2^2 = c_3,$$

deren Eigenschaft an der Hand der für endliche Dilatationen geltenden Beziehungen

$$M_1(t) = M_1 + 2tM_2 + 2t^2\pi^2,$$
$$M_2(t) = M_2 + 2t\pi^2,$$
$$S(t) = S + 3M_1 t + 3M_2 t^2 + 2t^3\pi^2,$$
$$T(t) = T + tS + \frac{3t^2}{2} M_1 + t^3 M_2 + \frac{t^4\pi^2}{2}$$

bestätigt werden können. Wer sich für die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im R_4 interessiert, würde vermutlich mit diesen Invarianten zu tun haben.

§ 2. Integralinvarianten bei Dilatationen in der sphärischen Geometrie.

Wir wollen zunächst die in der Einleitung erwähnte Invariante von Bernstein ableiten. Ist F wieder Inhalt, L die Bogenlänge einer geschlossenen Kurve auf der Kugel, so ist bei infinitesimaler Dilatation genau wie in der (euklidischen) Ebene

$$dF = L\,dt, \quad dL = dt \int d\tau;$$

doch hat hier das Integral über den Kontingenzwinkel

$$\mathsf{T} = \int d\tau$$

nicht mehr den Wert 2π, sondern es steht mit dem Inhalt in der Beziehung $F = 2\pi - \mathsf{T}$.

Man erhält also

$$\frac{d\mathsf{T}}{L} = \frac{dL}{\mathsf{T}} = dt$$

und hieraus

$$\mathsf{T}^2 + L^2 = (2\pi - F)^2 + L^2 = c_1^2 (\geqq 4\pi^2).$$

Man kann, was wir in der euklidischen Geometrie aus naheliegenden Gründen unterließen, hier das die Invariante bestimmende System auch benützen, um z. B. aus

$$\int \frac{dL}{\sqrt{c_1^2 - L^2}} = \arcsin \frac{L(t)}{c_1} = \operatorname{arctg} \frac{L(t)}{\mathsf{T}(t)} = t + c_2$$

auch die Darstellung der endlichen Dilatation

$$L(t) = L \cos t + \mathsf{T} \sin t$$
$$\mathsf{T}(t) = \mathsf{T} \cos t - L \sin t$$

zu gewinnen.

Eine noch einfachere Invariante ist

$$\int d\varphi = \int \frac{d\tau}{\cos \varrho},$$

wobei $d\varphi$ den Winkel zweier unendlich benachbarten Normalen bedeutet und ϱ den (sphärischen) Krümmungsradius. Es besteht vermutlich (auf Grund geometrischer Betrachtungen über Kurve und Evolute) noch die Beziehung

$$(\int d\varphi)^2 \geqq \mathsf{T}^2 + L^2,$$

wobei das Gleichheitszeichen wieder nur für den Kreis gilt.

Sodann gehen wir zum *sphärischen Raum* über. Hier gilt die Euler-Mongesche Krümmungstheorie mit kleinen Änderungen. Wir denken uns jetzt eine Fläche durch ihre Krümmungslinien in infinitesimale Rechtecke zerlegt und bei jedem Rechteck die Flächennormalen in den Mittelpunkten der Seiten errichtet. Die Normalen schneiden dann einander paarweise in den Krümmungsmittelpunkten der Hauptschnitte; die Schnittwinkel seien $d\varphi_1$ und $d\varphi_2$, die Krümmungsradien der Hauptschnitte R_1 und R_2. Dann ist das Oberflächenelement

$$dO = \sin R_1 \sin R_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

und die Oberfläche

$$O = \int\int \sin R_1 \sin R_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 .$$

Neben dem Rauminhalt (J) und der Oberfläche sollen noch die beiden Integrale

$$S = \tfrac{1}{2} \int\int \sin (R_1 + R_2) \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$
$$C = \tfrac{1}{2} \int\int \cos (R_1 + R_2) \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

in Betracht gezogen werden.

Für die Kugel, und vermutlich für sie allein, ist

$$\int\int d\varphi_1 \, d\varphi_2 = 4\pi .$$

Bei infinitesimaler Dilatation wird

$$dO = 2S\,dt, \quad dS = 2C\,dt, \quad dC = -2S\,dt, \quad dJ = O\,dt.$$

Demnach findet man Integralinvarianten aus

$$\frac{dO}{2S} = \frac{dS}{2C} = -\frac{dC}{2S} = \frac{dJ}{O} = dt.$$

Man erhält sofort

$$1) \quad S^2 + C^2 = c_1^2,$$
$$2) \quad O + C = c_1$$

und endlich aus $\dfrac{dJ}{O} + \dfrac{dC}{2S} = 0$ oder

$$2\,dJ + \frac{(c_2 - C)\,dC}{\sqrt{c_1^2 - C^2}} = d\left(2J + c_2 \arcsin \frac{C}{c_1} + \sqrt{c_1^2 - C^2}\right) = 0$$

noch $3) \quad 2J + (O + C) \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{S}{C}\right) + S = c_3 .$

Daß diese Größen wirklich Invarianten sind, kann man mit Hilfe der für endliche Dilatationen geltenden Gleichungen nachträglich bestätigen, also aus den Formeln

$$C(t) = C \cos 2t - S \sin 2t,$$
$$S(t) = S \cos 2t + C \sin 2t,$$
$$O(t) = O + S \sin 2t + C(1 - \cos 2t),$$
$$J(t) = J + \int O(t)\,dt = J + Ot + \frac{S}{2}(1 - \cos 2t) + \frac{C}{2}(2t - \sin 2t).$$

Eine naheliegende Frage bedarf noch genauerer Untersuchung. Es müßte festgestellt werden, ob die Invarianten gewissen Ungleichheiten unterliegen, die nun für den Fall der Kugel in Gleichungen übergehen. Es ist noch nicht zu übersehen, ob man auf diesem Weg oder vielmehr Umweg über den sphärischen Raum schließlich zu einem einfacheren Beweis auch für die isoperimetrische Haupteigenschaft der Kugel im euklidischen Raum gelangen kann, ähnlich, wie ihn Bernstein für die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises erbracht hat.

Über diesen Grenzübergang zur euklidischen Geometrie sei schließlich noch eine Bemerkung gestattet. Er wird durchgeführt, indem man R_1 und R_2 ersetzt durch $R_1 : k$ und $R_2 : k$ und in Reihen entwickelt. Die Koeffizienten der Potenzen von k^{-1} sind dann Invarianten bei Dilatationen im euklidischen Raum. Berücksichtigt man z. B. nur k^{-2}, so wird

$$O \approx O k^{-2},\ C = \tfrac{1}{2} \int\int \cos\left(\frac{R_1 + R_2}{2k}\right) d\varphi_1\, d\varphi_2$$

$$\approx \int \left(1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 k^{-2}\right) d\omega$$

und man erhält aus (2) die Invariante

$$O - \int \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^2 d\omega = O - N,$$

die sich aus den in § 1 angegebenen Invarianten

$$M^2 - 4\pi O = c_1 \text{ (§ 1, 5)}$$
$$M^2 - 4\pi N = c_2 \text{ (§ 1, 7)}$$

zusammensetzen läßt.

§ 3. Die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises in der hyperbolischen Ebene.

Wir gehen jetzt zur hyperbolischen Ebene über und wollen das in der Überschrift zum Ausdruck gebrachte Ziel verfolgen, von weiteren Untersuchungen dagegen absehen. Bezeichnet wieder F den Flächeninhalt, L die Länge einer geschlossenen doppelpunktfreien Kurve, $d\tau$ den Kontingenzwinkel und wird

$$\int d\tau = \mathsf{T}$$

gesetzt, so ist bei einer infinitesimalen Dilatation

$$dF = L\,dt,$$
$$dL = \mathsf{T}\,dt,$$

und hierzu kommt die Gleichung

$$F = \mathsf{T} - 2\pi,$$

die den Zusammenhang zwischen Flächeninhalt und dem Integral T angibt. Man erhält also die Invariante aus

$$\frac{d\mathsf{T}}{L} = \frac{dL}{\mathsf{T}} = dt,$$

sie ist $$\mathsf{T}^2 - L^2 \equiv (F + 2\pi)^2 - L^2 = c.$$

Um die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises zu beweisen, muß man zeigen, daß die angegebene Funktion für alle vom Kreis verschiedenen Kurven kleiner ist als $4\pi^2$, denn dann eben erreicht bei gegebenem L der Flächeninhalt einzig und allein seinen größten Wert für den Kreis. Beim Kreis (vom Radius r) ist nämlich

$$F = 2\pi(chr - 1), \quad L = 2\pi\, shr$$

gerade $$(F + 2\pi)^2 - L^2 = 4\pi^2(ch^2 r - sh^2 r) = 4\pi^2.$$

Der Weg zu diesem Nachweis ist im wesentlichen das von Blaschke verschärfte Viergelenksverfahren von Steiner, erfordert aber einige trigonometrische Rechnungen, die nicht zu langwierig ausfallen dürfen.

Wir brauchen auch hier zunächst den Satz, daß unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten das Sehnenviereck den größten Inhalt besitzt. Das würde durch Übertragung der Baurschen Formel[1]) von der Kugel auf die hyperbolische Ebene ja sofort erwiesen sein. Es genügt aber, wie sich zeigen wird, wenn wir den Satz nur für ein Viereck mit paarweise gleichen Seiten ($a, b, c = b, d = a$) beweisen.

[1]) Vgl. G. Hessenberg, Elementare Beweise für eine Maximumseigenschaft des Sehnenvierecks (Math. Abh. zum 50jährigen Doktorjubiläum von H. A. Schwarz, Berlin 1914, S. 76—83).

Bekannt ist, daß ein Viereck dann und nur dann Sehnenviereck ist, wenn die beiden Summen der Paare von Gegenwinkeln einander gleich sind. Denken wir uns nun unser spezielles Viereck durch die eine Diagonale in die beiden symmetrischen Hälften zerlegt, so ist in diesem Fall in jedem der beiden Teildreiecke der von den Seiten a und b eingeschlossene Winkel gleich der Summe der beiden anderen Winkel

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Die Maximaleigenschaft des Sehnenvierecks in dem hier beschriebenen Spezialfall ist also erwiesen, wenn der Satz bewiesen ist:

Der Inhalt eines Dreiecks, von dem die beiden Seiten a und b gegeben sind, erreicht seinen größten Wert, wenn der von a und b eingeschlossene Winkel γ gleich der Summe der beiden andern Winkel $\alpha + \beta$ ist.

Zwischen dem Inhalt

$$\varepsilon = \pi - \alpha - \beta - \gamma,$$

zwei Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}\sin\gamma}{1 + th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}\cos\gamma},$$

die aus den Neperschen Formeln für das schiefwinklige Dreieck zu gewinnen ist[1]). Bezeichnen wir die festgehaltenen Werte der hyperbolischen Tangensfunktionen der halben Seiten mit t_1 und t_2, so handelt es sich also um das Maximum von

$$f(\gamma) = \frac{\sin\gamma}{1 - t_1 t_2 \cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{N}.$$

Aus

$$f'(\gamma) = \frac{\cos\gamma(1 - t_1 t_2\cos\gamma) - \sin\gamma\, t_1 t_2 \sin\gamma}{N} = \frac{\cos\gamma - t_1 t_2}{N^2} = 0$$

[1]) Hinsichtlich der trig. Formeln der hyperbolischen Geometrie sei auf H. Liebmann, Nichteuklid. Geometrie, 2. Aufl. (1912), Kap. III verwiesen.

erhält man $\cos\gamma = t_1 t_2,$

und dieser Wert ist möglich, da die Funktion

$$th\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

kleiner als Eins ist. Es tritt auch tatsächlich ein Maximum ein, denn es ist

$$f''(\gamma) = -\frac{\sin\gamma}{N^2} - (\cos\gamma - t_1 t_2)\left(\frac{1}{N^2}\right)' < 0.$$

Nach den Neperschen Formeln ist dann

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \cot\frac{\gamma}{2}\,\frac{1 - th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}}{1 + th\frac{a}{2}\,th\frac{b}{2}} = \cot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Da ferner wegen

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

keine Unsicherheit über die Auflösung dieser Gleichung besteht (wie dies doch bei der entsprechenden Untersuchung für die sphärische Geometrie eintreten würde), erhält man

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Damit ist der ausgesprochene Satz für das Dreieck und das symmetrische Viereck bewiesen.

Nach dieser Vorbereitung wenden wir das Viergelenkverfahren an. Wir betrachten also ein Polygon mit einer geraden Anzahl gegebener, gleich großer Seiten und weisen nach, daß sein Inhalt so lange vergrößert werden kann, als die Ecken nicht sämtlich auf demselben Kreis liegen. Wir verbinden eine beliebige Ecke P mit der Gegenecke Q, die dadurch bestimmt ist, daß der Polygonzug PQ gerade der halbe Umfang ist. Ohne Änderung des Umfangs ersetzt man dann das Polygon durch ein anderes mit gleichem Umfang, das größeren Inhalt hat und zur P-Diagonale symmetrisch liegt, indem man den Teil mit größerem Inhalt an PQ spiegelt. Auch wenn beide Teile gleichen Inhalt haben, nimmt man diese Spiegelung vor,

um eine symmetrische Figur zu erhalten. Liegen in diesem neuen, zu PQ symmetrischen Polygon nicht alle Ecken auf dem über PQ als Durchmesser errichteten Kreis, so dürfen insbesondere auch nicht alle Paare R, R' von Punkten, die zu PQ symmetrisch liegen, mit P und Q auf einem Kreis gelegen sein. Dann zieht man die Sehnen

$$PR,\ RQ,\ PR' = PR,\ PQ' = PQ$$

und macht die Gelenke der vier Polygonzüge zwischen P und R, P und R', Q und R, Q und R' steif. Man kann jetzt (nach dem Viereckssatz) unter Beibehaltung des Umfangs des Polygons und des Inhalts der bei diesem Vorgang mit sich kongruent bleibenden Polygonsegmente, die über den vier Sehnen stehen, den Inhalt des Vierecks $PRQR'$, dessen Seiten unverändert bleiben, und damit zugleich den Inhalt des Polygons vergrößern, ohne die Seiten zu ändern.

Man kann also in der Tat den Inhalt unter Beibehaltung der Seiten so lange vergrößern, als die Ecken noch nicht sämtlich auf einem Kreis liegen. Damit ist die Maximaleigenschaft des Sehnenpolygons, vielmehr des regulären $2m$-Ecks, noch nicht bewiesen. Sie ergibt sich erst durch den Nachweis der Existenz des Maximums für den Inhalt, wie ihn Blaschke durchgeführt hat, und wie er sich mit geringen Modifikationen auf die hyperbolische Geometrie überträgt; mit Modifikationen lediglich formaler Natur.

Der nächste Schritt ist, daß wir beim *regulären Polygon* die Beziehung

$$(2\pi + F)^2 - L^2 < 4\pi^2$$

nachweisen. Das würde wohl auf recht unbequeme Rechnungen führen, wenn wir die Seiten keiner Beschränkung unterwerfen; für unseren Zweck genügt es, wenn man die Seiten so klein nimmt, als dies der Gang des Beweises wünschenswert erscheinen läßt.

Es sei also r der Radius, n die Anzahl der Seiten, daher $\frac{\pi}{n}$ der Winkel gegenüber $\frac{s}{2}$ in dem rechtwinkligen Dreieck,

dessen Ecken der Mittelpunkt des regulären Polygons, eine Ecke und eine benachbarte Seitenmitte sind. Bezeichnet man mit τ den Außenwinkel zwischen einer Seite und der Verlängerung der nächsten Seite, so ist der zweite Winkel in dem benützten rechtwinkligen Dreieck

$$\frac{\pi - \tau}{2}$$

und weiter $$2\pi + F = n\tau.$$

Wir haben also den Wert von

$$\mathsf{T}^2 - L^2 = 4n^2\left(\frac{\tau^2}{4} - \frac{s^2}{4}\right)$$

zu untersuchen. Dabei ist auf Grund der Formeln für das rechtwinklige Dreieck der hyperbolischen Geometrie

$$sh\,\frac{s}{2} = shr \sin\frac{\pi}{n} = u$$

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} = chr\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = v.$$

Weiter ist, wenn wir die Glieder bis zur dritten Ordnung (n^{-3}) beibehalten

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

$$\frac{\tau}{2} \approx v - \frac{v^3}{3} \approx chr\left(\frac{\pi}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 ch^3 r$$

$$\approx \frac{\pi}{n} chr\left(1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \frac{sh^2 r}{3}\right)$$

und daher

$$\frac{\tau^2}{4} \approx \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 ch^2 r\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 sh^2 r\right).$$

Entsprechend findet man auch

$$\sin\frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3$$

und $$\frac{s}{2} \approx u - \frac{u^3}{6}$$

auch $$\frac{s^2}{4} \approx \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 ch^2 r\right).$$

Es ist daher für hinreichend groß gewähltes n bis einschließlich Größen von der Ordnung n^{-2} bei unserem Polygon

$$(2\pi + F)^2 - L^2$$
$$= 4n^2 \frac{\pi^2}{n^2}\left(ch^2 r - \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r\, ch^2 r - sh^2 r - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 sh^2 r\, ch^2 r\right)$$
$$= 4\pi^2\left(1 - \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 ch^2 r\, sh^2 r\right) < 4\pi^2.$$

Mit der Ableitung dieser Ungleichheit sind aber jetzt alle Mittel gegeben, die man zum Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft des Kreises braucht. Man kann jetzt, dem Gedankengang von Blaschke (a. a. O., S. 31) vollständig parallel gehend, durch Annäherung der zu untersuchenden Kurve mit Hilfe eines einbeschriebenen Polygons V^* mit einer geraden Anzahl von lauter gleichen Seiten nachweisen, daß für die Kurve niemals

$$(2\pi + F)^2 - L^2 > 4\pi^2$$

sein kann, daß also

$$(2\pi + F)^2 - L^2 \leqq 4\pi^2$$

ist. Ist die Kurve kein Kreis, so kann man bei festgehaltenem L noch F in $F' > F$ durch das Viergelenkverfahren überführen und wegen

$$(2\pi + F)^2 - L^2 < (2\pi + F')^2 - L^2 \leqq 4\pi^2$$

ist hiermit erwiesen, daß in der oben stehenden Beziehung das Gleichheitszeichen nur für den Kreis gilt.

Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auch für die hyperbolische Geometrie sichergestellt.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Januar, Februar u. März 1*

Abhandlungen.

R. Seeliger: Über den Ursprung der durchdringenden atmosphärischen Strahlung 1

R. König: Weierstraß' „Abelsche Transzendenten" und ihre Weiterführung 47

A. Pringsheim: Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche . 65

M. v. Frey: Die Bedeutung des Drucksinns für die Wahrnehmung von Bewegung und Lage der Glieder 93

O. Frank: Anwendung des Prinzips der gekoppelten Schwingungen auf einige physiologische Probleme (2. Abhandlung) . . 107

M. Lagally: Die Abbildung einer bewegten Ebene durch eine photographische Kammer mit Schlitzverschluß 161

L. Burmester: Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges (mit 1 lithogr. Tafel) 171

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1918

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Mai bis Juli . . 5*

Abhandlungen.

F. Lindemann, Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon . . . 203

H. Gießberger, Das Reichenhaller Einsturzbeben vom 19. November 1910 (mit einer Kartenskizze und einem Anhang) . 221

F. Klengel, Der Verlauf des Winters 1916/17 im sächsisch-bayerischen Grenzgebiete (mit einer Kartenskizze und fünf Figuren) 259

A. Johnsen, Optisches Drehungsvermögen und Schraubungsaxen regulärer Kristalle 279

A. Voss, Zur Theorie der Kurven im Raume 283

W. Lenz, Über ein invertiertes Bohrsches Modell . . . 355

A. Sommerfeld, Über die Feinstruktur der $K\beta$-Linie . . 367

M. Schmidt, Untersuchung von Höhen- und Lageänderungen von Messungspunkten im bayerischen Alpenvorland (mit einem Kärtchen) 373

H. Liebmann, Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen (nach Ideen von Boltzmann und Jacobi) 385

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft III
Oktober- bis Dezembersitzung

München 1918
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Oktober bis Dezember 9*

Verzeichnis der im Jahre 1918 eingelaufenen Druckschriften . . 11*

Abhandlungen.

R. Emden, Über elektrische Wellen in geschichteten Medien . 417

S. Günther, Über eine ostafrikanische Naturkatastrophe . . 437

F. Lindemann, Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon . . 453

H. Liebmann, Integralinvarianten und isoperimetrische Probleme 489

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

er B. Akad. der
24-94731

5) M 1

AMNH LIBRARY
100229661